УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
09 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Гармонический анализ**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФФПФ**
факультет: **ФОПФ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 4

Трудоёмкость:
Базовая часть — 4 зач. ед.;
лекции — 45 часов
практические занятия — 45 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 90

Самостоятельная работа:
60 часов

Составитель программы:
д. ф.-м. н., профессор Р. Н. Карасёв

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 15 ноября 2022 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

Приближение функций равномерно, в среднем и среднеквадратичном

1. Равномерное приближение непрерывной функции на отрезке кусочно-линейными функциями и приближение кусочно-линейных функций многочленами.
2. Приближение непрерывных 2π-периодических функций тригонометрическими многочленами.
3. * Алгебры непрерывных на компактах функций. Теорема Стоуна–Вейерштрасса.
4. Пространства L_p. Неравенства Гёльдера и Минковского.
5. Полнота пространства L_p.
6. Приближение функций в L_p ступенчатыми и бесконечно гладкими.

Ограниченная вариация, абсолютная непрерывность и осцилляция

7. Функции ограниченной вариации, представление функции ограниченной вариации в виде суммы монотонных и ограниченных.
8. Абсолютно непрерывные функции, абсолютная непрерывность интеграла с переменным верхним пределом.
9. Представление абсолютно непрерывной функции в виде суммы монотонных абсолютно непрерывных функций.
10. Существование производной почти всюду у абсолютно непрерывной функции и обобщённая формула Ньютона–Лейбница.
11. Абсолютная непрерывность произведения абсолютно непрерывных функций и обобщённое интегрирование по частям.
12. Теорема Римана об осцилляции и равномерной осцилляции.
13. Порядок убывания коэффициентов Фурье абсолютно непрерывных и несколько раз обобщённо дифференцируемых функций.
14. Порядок убывания коэффициентов Фурье функций ограниченной вариации.

Ряд Фурье в пространстве L_2

15. Скалярное произведение в пространстве L_2, неравенство Коши–Буняковского.
16. Свойство минимальности коэффициентов Фурье по ортогональной системе функций в L_2 и неравенство Бесселя
17. Полные системы в пространстве L_2. Полнота тригонометрической системы в $L_2[-\pi,\pi]$.
18. Сходимость ряда Фурье в L_2 и равенство Парсеваля для коэффициентов Фурье функций из $L_2[-\pi,\pi]$ по ортогональным системам.

Тригонометрический ряд Фурье и его сходимость

19. Интегральное представление частичных сумм тригонометрического ряда Фурье, ядро Дирихле.
20. Принцип локализации для рядов Фурье и равномерный принцип локализации.
21. Признак Липшица равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье на отрезке.
22. Признак Дирихле равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье на отрезке.
23. Признаки Липшица и Дирихле сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке.
24. Почленное дифференцирование и интегрирование тригонометрических рядов Фурье.
25. Теорема Фейера о суммировании тригонометрического ряда Фурье методом средних арифметических.
26. Представление котангенса и косеканса в виде бесконечной суммы элементарных дробей.
27. Формула дополнения для бета-функции.

Интеграл Фурье и преобразование Фурье

28. Вычисление интеграла Дирихле с помощью дифференцирования по параметру.
29. Представление функций интегралом Фурье, свёртка с ядром Дирихле для интеграла Фурье.
30. Принцип локализации для интеграла Фурье.
31. Признаки Липшица и Дирихле сходимости интеграла Фурье для абсолютно интегрируемой функции.
32. Преобразование Фурье. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.
33. Пространство $\mathcal{S}$, его инвариантность при преобразовании Фурье и непрерывность преобразования Фурье как отображения $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.
34. Унитарность преобразования Фурье относительно стандартного скалярного произведения в пространстве $\mathcal{S}$.
35. Продолжение преобразования Фурье на пространство L_2.
36. Явление Гиббса для представления $\operatorname{sgn} x$ интегралом Фурье.
37. Преобразование Фурье функций нескольких переменных. Преобразование Фурье гауссовой плотности.

38. Формула обращения преобразования Фурье функции нескольких переменных с абсолютно интегрируемым преобразованием Фурье.
39. * Формула обращения преобразования Фурье функции нескольких переменных с достаточным количеством непрерывных частных производных.
40. Свёртка функций из L_1 и преобразование Фурье.

Банаховы пространства

41. Нормированные векторные пространства и банаховы пространства. Полнота пространства $C[a, b]$.
42. Теорема Бэра в банаховом пространстве.
43. Двойственное к банахову пространству, эквивалентность ограниченности и непрерывности линейного функционала.
44. Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха–Штейнгауза) для семейств непрерывных линейных функционалов в банаховых пространствах.
45. Расходимость рядов Фурье непрерывных 2π-периодических функций и норма свёртки с ядром Дирихле.
46. * Явный пример непрерывной 2π-периодической функции, ряд Фурье которой расходится в одной точке.
47. Непрерывные линейные отображения между банаховыми пространствами, их норма, эквивалентность ограниченности и непрерывности.
48. Факторпространство банахового пространства по замкнутому линейному подпространству. Его полнота и норма проекции на факторпространство.
49. Теорема об изоморфизме для непрерывных линейных отображений банаховых пространств.
50. ε-сети в метрических пространствах, эквивалентность предкомпактности и вполне ограниченности подмножества полного метрического пространства.
51. Теорема Арцела–Асколи о предкомпактных подмножествах в пространстве непрерывных на метрическом компакте функций.

Гильбертовы пространства

52. Гильбертовы пространства над действительными и комплексными числами. Неравенство Коши–Буняковского.
53. Полнота и замкнутость ортонормированной системы в гильбертовом пространстве, ряд Фурье по ней, неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.
54. Изометрии гильбертовых пространств и описание с точностью до изометрии гильбертовых пространств, имеющих счётную полную систему.

55. Метрическая проекция на замкнутое аффинное подпространство гильбертового пространства.
56. Описание двойственного к гильбертову пространству.

*** Лемма Цорна и двойственные пространства банаховых пространств**

57. * Теорема Цермело и лемма Цорна.
58. * Теорема Хана–Банаха. Вложение банахова пространства во второе двойственное.
59. * Теорема Тихонова о произведении компактов.
60. $*$-слабая топология двойственного к банахову пространству, компактность в $*$-слабой топологии.
61. * Теорема Хана о разложении меры со знаком.
62. * Теорема Радона–Никодима о плотности абсолютно непрерывной (относительно меры Лебега) меры.
63. * Теорема Рисса о двойственном пространстве к $C[a, b]$.

Распределения (обобщённые функции)

64. Пространство $\mathcal{E}$ и топология в нём, его полнота.
65. Связь непрерывности и ограниченности линейного отображения $\mathcal{E} \to \mathbb{R}$. Пространство $\mathcal{E}'$ распределений с компактным носителем.
66. Описание элементов $\mathcal{E}'$ через интегрирование производных по отрезку.
67. Пространство $\mathcal{D}$ и определение сходимости в нём.
68. Пространство $\mathcal{D}'$ распределений (обобщённых функций). Регулярные и нерегулярные распределения, дельта-функция.
69. Топология и сходимость в пространстве $\mathcal{D}'$, сходимость последовательности регулярных функций к дельта-функции.
70. Дифференцирование распределений, корректность его определения и непрерывность дифференцирования как операции $\mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$.
71. Умножение распределения в $\mathcal{D}'$ на бесконечно гладкие функции, корректность его определения и непрерывность как операции $\mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$.
72. Равенство нулю распределения на открытом множестве, носитель распределения из $\mathcal{D}'$.
73. Пространство $\mathcal{S}'$ обобщённых функций, преобразование Фурье обобщённых функций из $\mathcal{S}'$, преобразование Фурье дельта-функции.
74. * Распределения на многообразиях, бескоординатное определение, сужение распределения на открытое множество.

Литература

Основная

1. *Карасёв Р. Н.* Отдельные темы математического анализа. rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf

Дополнительная

2. *Харди Г. Ч., Рогозинский В. В.* Ряды Фурье. — М.: Физматгиз, 1959.
3. *Katznelson Y.* An Introduction to Harmonic Analysis. — Cambridge University Press, 2004.
4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Физматлит, 2006.

ЗАДАНИЯ

Замечание. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендуется разобрать на семинарских занятиях. Если задача с подчёркнутым номером была разобрана, то студент не обязан записывать её решение в домашнее задание.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 4–8 марта)

I. Неравенства, пространства L_p и вариация

1. Пусть $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — возрастающая выпуклая функция. Докажите, что функция $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, заданная формулой $f_n(x) = f(|x|)$, тоже выпуклая.

2. Докажите, что если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выпуклая, то для любого набора $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{R}^n$ и неотрицательных коэффициентов $t_1, \dots, t_N$, в сумме дающих 1, выполняется

$$f(t_1 v_1 + \dots + t_N v_N) \leqslant t_1 f(v_1) + \dots + t_N f(v_N).$$

3. Докажите, что если функция f определена на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^n$ и выпукла, то она непрерывна на U.

4. Докажите, что для абсолютно интегрируемой $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\int_0^1 e^{f(x)}\, dx \geqslant e^{\int_0^1 f(x)\, dx}.$$

5. Докажите для измеримой $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$, и положительных $s < t$ неравенство

$$\left(\int_0^1 f(x)^s\, dx\right)^{1/s} \leqslant \left(\int_0^1 f(x)^t\, dx\right)^{1/t}.$$

6. Положительная функция на промежутке называется *логарифмически выпуклой*, если её логарифм выпуклый. Докажите, что сумма логарифмически выпуклых функций логарифмически выпукла.

7. Докажите, что функция $\ln \det A$ вогнута на множестве положительно определённых симметричных матриц A любого размера.

8. Докажите, что $L_2[0, 1] \subseteq L_1[0, 1]$, но $L_2(\mathbb{R}) \not\subseteq L_1(\mathbb{R})$. Проверьте, что в первом случае вложение строгое.

9. Докажите, что если функция f лежит в $L_1(\mathbb{R})$ и в $L_4(\mathbb{R})$, то она лежит и в $L_2(\mathbb{R})$.

10. Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$. Докажите, что
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)|^2 \, dx \to 0 \text{ при } t \to 0.$$

11. Имеет ли ограниченную вариацию на интервале $(0, 1)$ функция:
а) $x \sin \frac{1}{x}$;
б) $x^2 \sin \frac{1}{x}$?

12. Докажите, что если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию на всей прямой, то для любого $t \in \mathbb{R}$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)| \, dx \leqslant \|f\|_B \cdot |t|.$$

13. Докажите, что абсолютно непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке ограниченную вариацию.

14*. Проведите пример непрерывной функции на отрезке, которая имеет ограниченную вариацию, но не является абсолютно непрерывной.

II. Порядок убывания коэффициентов Фурье

15. Найдите порядок убывания коэффициентов в Фурье в виде $c_n = O\left(\frac{1}{n^s}\right)$ разложения функции f по тригонометрической системе на отрезке $[-\pi, \pi]$:

а) $f(x) = x^6$; б) $f(x) = (x^2 - \pi^2)^5$;

в) $f(x) = (x^2 - \pi^2) \sin^2 x$; г) $f(x) = |\sin^7 x|$.

16*. Найдите порядок убывания коэффициентов Фурье функции $f(x) = \sqrt{|x|}$ по тригонометрической системе на отрезке $[-\pi, \pi]$.

III. Поточечная и равномерная сходимость рядов Фурье

17. Разложите в ряд Фурье по тригонометрической системе на отрезке $[-\pi, \pi]$:

а) $f(x) = \sin^7 x$; б) $f(x) = \sin^8 x + \cos^8 x$.

18. Разложите в ряд Фурье по тригонометрической системе на отрезке $[-\pi, \pi]$, постройте график суммы ряда и исследуйте ряд на равномерную сходимость:

а) $f(x) = \operatorname{sgn} x$; б) $f(x) = |x|$; в) $f(x) = x$; г) $f(x) = x^2$.

19. Разложите в ряд Фурье по 1-периодической тригонометрической системеb, постройте график суммы ряда и исследуйте ряд на равномерную сходимость:

а) $f(x) = \{x\}$ (дробная часть x); б) $f(x) = \sin \pi x$.

20. Разложите функцию, заданную формулой $\cos ax$ на отрезке $[-\pi,\pi]$ при $a \notin \mathbb{Z}$, в ряд Фурье. Выведите из полученного выражения формулы:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} x &= v.p. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x-\pi k} \\ \frac{1}{\sin x} &= v.p. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x-\pi k} \\ \sin x &= x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right), \end{aligned}$$

где $v.p. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} a_k$.

21. Разложите в тригонометрический ряд Фурье в комплексной форме на отрезке $[-\pi,\pi]$ функции ($|a|<1$):

а) $f(x) = \dfrac{1-a^2}{1-2a\cos x + a^2}$; б) $f(x) = \dfrac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}$.

22. Как следует продолжить функцию $f \in L_1[0,\pi/2]$ на отрезок $[-\pi,\pi]$, чтобы

а) её ряд Фурье имел вид $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2k-1)x$;

б) её ряд Фурье имел вид $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(2k-1)x$?

23. Сходятся ли равномерно ряды Фурье функции $f(x) = e^x, x \in [0;\pi/2]$ по системам:
а) $\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; б) $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$; в) $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; г) $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$? Постройте графики сумм этих рядов.

24. Докажите, что если тригонометрический ряд сходится в среднем к функции $f \in L_1[-\pi,\pi]$, то он является рядом Фурье функции f.

25. Являются ли следующие выражения рядами Фурье функций из $L_1[-\pi,\pi]$:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$?

IV. Интегрирование ряда Фурье и равенство Парсеваля

26. Докажите, что выражение $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{\ln n}$ не является рядом Фурье никакой абсолютно интегрируемой функции.

27. Докажите, что если у функции $f \in L_1[-\pi,\pi]$ все коэффициенты Фурье нулевые, то f равна нулю почти всюду.

28. Исходя из разложения $x = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$, получите интегрированием разложения функций x^2, x^3, x^4 в тригонометрический ряд Фурье на $[-\pi,\pi]$.

29. С помощью равенства Парсеваля вычислите суммы рядов:
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$; в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}$.

V. Суммирование по Чезаро и суммы Фейера

30. Найдите суммы по Чезаро рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$; б) $\frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos nx$.

31. Докажите, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится в обычном смысле, то его сумма по Чезаро равна его сумме.

32. Докажите, что при суммировании ряда Фурье ограниченной на $[0,2\pi]$ функции по Фейеру значения сумм в точке x не выходят за диапазон значений функции.

33. Докажите, что для любой $f \in L_1[-\pi,\pi]$, L_1-норма любой суммы Фейера функции f не превосходит L_1-нормы самой функции f.

34*. Докажите, что суммы Фейера любой функции $f \in L_1[-\pi,\pi]$ сходятся в среднем на отрезке $[-\pi,\pi]$ к функции f.

35*. Пусть последовательность $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ положительных чисел убывает, стремится к нулю и выпукла (в смысле $a_{n-1} - 2a_n + a_{n+1} \geqslant 0$ при $n \geqslant 1$). Докажите, что сумма

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

неотрицательна (в некоторых точках может быть $+\infty$).

36*. Пусть функция f непрерывная и 2π-периодическая, α — иррациональное число. Докажите, что предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_0 + 2\pi\alpha k)$$

не зависит от x_0.

$\boxed{30+6^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 1–5 апреля)

I. Собственные интегралы, зависящие от параметра

1. Выясните, можно ли переставить интегрирование и переход к пределу в выражениях:

а) $\lim\limits_{a\to+0}\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{a}{x^2+a^2}\,dx$; б) $\lim\limits_{a\to+0}\int\limits_0^{1}\dfrac{x}{a^2}e^{-x^2/a^2}\,dx$.

2. Найдите производную по параметру $a>0$ интеграла $\int\limits_{1/a}^{2/a}\dfrac{\sin ax}{x}\,dx$.

3. С помощью дифференцирования интеграла $\int\limits_0^x\dfrac{1}{t^2+a^2}\,dt$ по параметру $a>0$, вычислите интеграл $\int\limits_0^x\dfrac{1}{(t^2+a^2)^2}\,dt$.

4. С помощью дифференцирования интеграла по параметру $a>1$, вычислите интеграл $\int\limits_0^{\pi}\ln(a^2-\sin^2 x)\,dx$.

5. Вычислите интеграл при натуральных n

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}\,dx.$$

6*. Определим функцию

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

Докажите, что для любого натурального k и любого $x\in\mathbb{R}$ выполняется неравенство $|f^{(k)}(x)|\leqslant 1$.

II. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

7. Сходится ли интеграл равномерно по параметру $a\in E_1$, $a\in E_2$

а) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^a}\,dx$, $E_1=(1,+\infty)$, $E_2=(1+\delta,+\infty)$, $\delta>0$;

б) $\int\limits_0^{+\infty}x^a e^{-x}\,dx$, $E_1=(-1,1)$, $E=[0,+\infty)$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2}\,dx$, $E_1=[-1,1]$, $E_2=\mathbb{R}$;

г) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+(x-a)^6}\,dx$, $E_1=(-\infty,0]$, $E_2=[0,+\infty)$;

д) $\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{a}e^{-ax^2}\,dx$, $E_1=[0,1]$, $E_2=[1,+\infty)$;

е) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x^2}{1+x^a}\,dx$, $E_1=(-\infty,0]$, $E_2=[0,+\infty)$?

8. Вычислите интегралы Дирихле и Лапласа с параметром $a\in\mathbb{R}$

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\,dx,\ \int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx,\ \int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{1+x^2}\,dx.$$

9. Пусть функция $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ непрерывна в нуле и для любого $A>0$ сходится несобственный интеграл $\int\limits_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,dx$. Докажите, что при любых $a,b>0$ справедлива формула Фруллани (для несобственного в нуле и бесконечности интеграла): $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=f(0)\ln\dfrac{b}{a}$.

10. Вычислите интеграл с помощью формулы Фруллани для $a,b>0$:

а) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x}\,dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$;

в) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}\,dx$; г) $\int\limits_0^{1}\dfrac{x^a-x^b}{\ln x}\,dx$.

11. Вычислите интеграл, зависящий от параметров $a,b,c>0$:

а) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}\,dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin^3 ax}{x^3}\,dx$; в) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin^4 ax}{x^2}\,dx$;

г) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\sin^2 x\cos ax}{x^2}\,dx$; д) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{(e^{-ax}-e^{-bx})\cos cx}{x}\,dx$; е) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\cos ax}{(1+x^2)^2}\,dx$.

III. Интеграл Фурье и преобразование Фурье

12. Представьте функцию интегралом Фурье:

а) $f(x)=\operatorname{sgn}(x-a)-\operatorname{sgn}(x-b)$, $b>a$; б) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+a^2}$, $a\neq 0$;

в) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|\leqslant\pi,\\ 0, & |x|>\pi.\end{cases}$ г) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|<\pi/2,\\ 0, & |x|\geqslant\pi/2.\end{cases}$

13. Вычислите интегралы Лапласа с помощью обращения преобразования Фурье.

14. Найдите преобразование Фурье функции с параметром $a > 0$:

а) $f(x) = e^{-ax^2}$; б) $f(x) = e^{-x^2/2} \cos ax$; в) $f(x) = xe^{-a|x|}$.

15. Докажите, что функция вида $P(x)e^{-x^2/2}$, где $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, при преобразовании Фурье переходит в функцию того же вида $Q(y)e^{-y^2/2}$, причём $\deg Q \leqslant \deg P$.

16. Докажите, что для любой функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ и любых двух чисел $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство (*соотношение неопределённостей*)

$$\|(x - x_0)f(x)\|_2 \cdot \|(y - y_0)\hat{f}(y)\|_2 \geqslant \frac{1}{2}\|f\|_2^2.$$

Выясните, в каком случае выполняется равенство.

17. Пусть $\hat{f}(y)$ — преобразование Фурье функции $f(x) = \dfrac{1}{1 + |x|^5}$. Докажите, что

а) $\hat{f}$ трижды непрерывно дифференцируема;

б) $\hat{f}(y) = O\left(\dfrac{1}{y^6}\right)$ при $y \to \infty$.

18. Найдите преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} x^{p-1}e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

при $p > 0$.

19. Вычислите преобразование Фурье функции $f(x) = |x-1|+|x+1|-2|x|$, представив её как свёртку.

20. Определите, при каких y обращается в нуль преобразование Фурье функции $f(x) = \dfrac{\sin^n x}{x^n}$, в зависимости от натурального n.

21*. Докажите, что если преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ равно нулю, то f равна нулю почти всюду.

22. Существует ли функция $f \in L_1[0, +\infty)$, такая что $\int\limits_0^{+\infty} f(x) \sin yx \, dx = e^{-y}$ для любого $y > 0$? Существует ли такая f, если интегралу разрешено быть несобственным?

23*. Пусть функции $f_1, \ldots, f_{k+2} \in L_1(\mathbb{R})$ имеют ограниченную вариацию на всей прямой. Докажите, что свёртка $f_1 * f_2 * \cdots * f_{k+2}$ будет k раз непрерывно дифференцируема.

24. Найдите преобразование Фурье функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f = e^{-Q(x)}$, где $Q(x)$ — положительно определённая квадратичная форма.

$\boxed{21 + 3^*}$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 13–17 мая)

I. Сходимость и полнота систем функций в пространствах C и L_p

$\underline{1}$. Докажите, что если f — функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, а $\{f_n\}$ – последовательность функций, непрерывных на $[a, b]$, то между разными видами сходимости имеются связи, указанные в схеме (при перечеркнутой стрелке привести контрпример):

$$\begin{array}{ccccc}
\{f_n\} \text{ сходится} & \not\longleftarrow & \{f_n\} \text{ сходится по} & \not\longleftarrow & \{f_n\} \text{ сходится по} \\
\text{равномерно к } f & \longrightarrow & \text{норме } L_2 \text{ к } f & \longrightarrow & \text{норме } L_1 \text{ к } f \\
\not\uparrow\ \downarrow & & \not\uparrow\ \not\downarrow & & \not\uparrow\ \not\downarrow \\
\{f_n\} & & \text{сходится поточечно к} & & f
\end{array}$$

2. Приведите пример, когда последовательность функций (f_n) сходится в пространстве $L_1[a, b]$, но для любого $x \in [a, b]$ последовательность чисел $(f_n(x))$ расходится.

3. Докажите, что естественное отображение $C[a, b] \to L_1[a, b]$ непрерывно и не сюръективно, не забывая, что элементы L_1 — это не функции, а классы эквивалентности функций.

$\underline{4}$. Полна ли система функций $\{x^{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $L_1[0, 1]$?

5. Полна ли система функций $\{\sin(2k - 1)x\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве

а) $L_2[0, \pi/2]$; б) $L_1[0, \pi/2]$; в) $L_1[0, \pi]$?

$\underline{6}$. Какая из систем функций $\{\sin(2k - 1)x\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\cos(2k - 1)x\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$ полна в пространстве $C[0, \pi/2]$?

7. Приведите пример какой-нибудь счётной системы функций, полной в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

II. Конечномерные банаховы пространства

8. Докажите, что в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, то есть одна оценивается через другую как

$$c\|\cdot\| \leqslant \|\cdot\|' \leqslant C\|\cdot\|$$

с некоторым положительными константами c, C.

9. Докажите, что любое конечномерное нормированное пространство полно.

III. Норма линейного функционала и линейного отображения

10. Пусть пространство ℓ_p^n $(p > 1)$— это $\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

Докажите, что если $1/p + 1/q = 1$, то пространство ℓ_p^n двойственно пространству ℓ_q^n.

11. Найдите норму функционала

$$f \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$$

на пространстве $C[0,1]$ в зависимости от $n \in \mathbb{N}$.

12. Пусть функция g непрерывна на $[a,b]$. Найдите норму линейного отображения

$$M_g : L_2[a,b] \to L_2[a,b], \quad M_g(f) = gf.$$

13. Пусть функция K непрерывна на $[a,b]\times[a,b]$. Найдите норму линейного отображения

$$A : C[a,b] \to C[a,b], \quad A(f)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)\,dy.$$

14. Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$. Докажите, что норма оператора $C_f : L_1(\mathbb{R}) \to L_1(\mathbb{R})$, заданного формулой $C_f(g) = f * g$, равна $\|f\|_1$.

15. Докажите, что двойственное к пространству ℓ_1 абсолютно сходящихся последовательностей есть пространство ограниченных последовательностей ℓ_∞ с нормой $\|(a_n)\|_\infty = \sup\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$.

IV. Базисы банаховых пространств

16. Докажите, что алгебраический базис бесконечномерного банахова пространства не может быть счётным.

<u>17</u>. Является ли система функций $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ базисом в пространстве $C[-1, 1]$?

18. Является ли тригонометрическая система функций

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots\}$$

базисом в пространстве непрерывных 2π-периодических функций с нормой $\|\cdot\|_C$?

19*. Является ли тригонометрическая система функций

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots\}$$

базисом в пространстве $L_1[-\pi, \pi]$?

V. Топологические свойства банаховых пространств

20. Докажите, что любое конечномерное линейное подпространство банахова пространства замкнуто.

21. Докажите, что в любом бесконечномерном банаховом пространстве E единичный шар не является компактным.

22*. Выведите из теоремы Хана–Банаха, что любое конечномерное подпространство V в банаховом пространстве E имеет замкнутое дополнение $W \subseteq E$, такое что $E = V \oplus W$.

23*. Приведите пример замкнутого в топологии нормы множества $X \subset E'$ (двойственное к некоторому банахову пространству) которое не замкнуто в его $*$-слабой топологии.

24*. Докажите, что в $*$-слабой топологии E' компактность некоторого множества влечёт его замкнутость.

25*. Приведите пример топологического пространства, в котором есть компактные, но не замкнутые подмножества.

26*. Докажите, что в пространстве бесконечных в обе стороны последовательностей из нулей и единиц $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ с топологией декартова произведения сдвиг, $(x_n) \mapsto (y_n)$, $y_n = x_{n-1}$, является гомеоморфизмом.

VI. Распределения (обобщенные функции)

<u>27</u>. Найдите пределы последовательностей регулярных элементов пространства $\mathcal{D}'$

а) $f_n(x) = \cos nx$; б) $f_n(x) = n \sin nx$.

28. Докажите, что в $\mathcal{D}'$ справедливы равенства

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{1+n^2x^2} = \pi\delta(x)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin nx}{x} = \pi\delta(x)$.

29. Найдите в $\mathcal{D}'$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3x}{(1+n^2x^2)^2}$.

30. Упростите в $\mathcal{D}'$ выражения

а) $(e^{\sin x} + x\cos x)\delta(x)$; б) $\left(\dfrac{x\,\mathrm{ch}\,x}{1+x^4} - \sin x\right)\delta'(x)$.

31. Найдите в $\mathcal{D}'$ первые и вторые производные выражений

а) $(x+\cos x)\,\mathrm{sign}\,x$; б) $(x+1)e^{|x|}$.

32. Докажите, что при $x_n \to \infty$ оказывается $\delta_{x_n} \to 0$ в смысле слабой сходимости.

33. Докажите, что при конечном x_0 слабая сходимость $\delta_{x_n} \to \delta_{x_0}$ эквивалентна обычной сходимости $x_n \to x_0$.

34*. Докажите, что любое распределение $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ имеет первообразную, то есть такое распределение $\mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, что $\mu' = \lambda$ в смысле дифференцирования распределений.

35. Докажите, что любые две первообразные одного и того же распределения отличаются на константу.

36*. Приведите пример распределения $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, которое не является m-й производной регулярного распределения ни для какого m.

VII. Преобразование Фурье распределений

37. Найдите преобразование Фурье в $\mathcal{S}'$ функции

а) $\sin x$;

б) $\delta^{(n)}$ (n-я производная дельта-функции);

в) $\vartheta(x)$ (функция Хевисайда).

38*. Докажите, что если $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и преобразование Фурье $F[f] \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, то $f \equiv 0$.

39*. Докажите, что преобразование Фурье в $\mathcal{S}'$ переводит распределение

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{2\pi n} \quad \text{в распределение} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n.$$

$\boxed{29 + 10^*}$

Задания составили: д. ф.-м. н., профессор Р. Н. Карасёв, д. ф.-м. н., доцент А. И. Тюленев