ЗАДАЧИ ДЛЯ ШКОЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА

Р.Н. КАРАСЁВ

Содержание

Общие замечания

Сборник задач предназначен, в основном, для самостоятельной работы школьников. Хотя, как показывает опыт практической работы, консультации с преподавателем всё же желательны.

В сборнике встречаются следующие типы задач.

- Упражнения — их решения надо знать, или в крайнем случае решить самостоятельно.
- Задачи, помеченные знаком $\triangleright$ — нужно по возможности решить.
- Задачи, помеченные знаком † — решать не обязательно, но полезно над ними поразмышлять.

Задачи рекомендуется решить в том порядке, в котором они написаны, и рекомендуется читать пояснения, определения и теоремы перед задачами. Это позволяет понять, какие методы применяются при решении задачи.

Источники информации

Задачи в основном взяты из сборников Всесоюзных и Всероссийских математических олимпиад, Санкт-Петербургских математических олимпиад, и прочих широко известных источников. Перечислить всех авторов задач не представляется возможным, списки авторов в сборниках задач Всероссийских математических олимпиад могут дать некоторое представление об авторах.

В составлении сборника, помимо основного автора, принимали участие В.Л. Дольников (комбинаторная геометрия), И.И. Богданов (теория чисел, графы и конечные множества) и А.В. Акопян (геометрия).

1. Школьная геометрия

В задачах этого раздела используются только сведения из школьной программы, более того, некоторые задачи входят в программу школ с углублённым изучением физики и математики.

1.1. **Свойства биссектрис треугольника.** В следующей задаче полезно помнить, что теорема о пересечении биссектрис в одной точке имеет и вариант для биссектрис внешнего угла.

▷ 1.1. В треугольнике ABC $\angle A = 120°$. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — биссектрисы $\triangle ABC$. Докажите, что $\angle B_1A_1C_1 = 90°$.

Также полезно знать общеизвестный факт о том, что вписанные углы, опирающиеся на равные дуги с одной и той же стороны, равны.

▷ 1.2 (Лемма о трезубце). Треугольник ABC вписан в окружность Ω, I — центр вписанной окружности $\triangle ABC$, I_A — центр вневписанной оркужности треугольника, лежащий в угле $\angle BAC$. Прямая AI пересекает Ω второй раз в точке A'. Докажите, что $A'B = A'C = A'I = A'I_A$.

Следующие задачи развивают идею леммы о трезубце.

▷ 1.3. Треугольник ABC вписан в окружность Ω. I_B и I_C — центры вневписанных окружностей $\triangle ABC$, касающихся AC и AB соответственно. Точка A'' является серединой дуги BAC окружности Ω. Докажите, что $A''B = A''C = A''I_B = A''I_C$.

▷ 1.4. В условии предыдущей задачи рассмотрим ещё точки B' и C' — середины дуг AC и AB окружности Ω, не содержащих другие вершины треугольника ABC. Докажите равенства треугольников

$$\triangle I_BB'A'' = \triangle CB'A'' = \triangle A''C'B = \triangle A''C'I_C = \triangle B'IC' = \triangle B'AC' = \triangle C'A''B'.$$

▷ 1.5. Докажите, что окружность, описанная вокруг срединного треугольника (образованного серединами сторон) треугольника ABC содержит также основания высот $\triangle ABC$ и середины отрезков, соединяющих ортоцентр $\triangle ABC$ с его вершинами. Найдите описанную в этой задаче конфигурацию в предыдущей задаче.

Упражнение 1.6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, а середины дуг AB, BC, CD, DA отмечены как точки X, Y, Z, T. Докажите, что $XZ \perp YT$.

▷ 1.7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABC, BCD, CDA, DAB образуют прямоугольник.

Следующее утверждение помогает решать задачи про биссектрисы аналитически в тех случаях, когда геометрическое решение не получается.

▷ 1.8. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Докажите, что $AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC$. Выразите биссектрисы треугольника через его стороны.

▷ 1.9. В треугольнике равны две биссектрисы. Докажите, что он равнобедренный.

† 1.10. Докажите признак равенства треугольников по трём биссектрисам.

Упражнение 1.11. Докажите, что биссектриса треугольника делит пополам угол между высотой и направлением на центр описанной окружности из той же вершины.

▷ 1.12. Одна из вершин треугольника, его центры вписанной и описанной окружности и ортоцентр лежат на одной окружности. Докажите, что один из углов треугольника равен $60°$.

1.2. **Касательные к окружности.** Напомним известное школьное утверждение.

Упражнение 1.13. Докажите, что выпуклый четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности тогда и только тогда, когда $AB + CD = BC + DA$.

Если хорошо вспомнить доказательство этого упражнения, то следующие три задачи решаются без труда.

$\triangleright$ 1.14. Пусть выпуклый четырёхугольник $ABCD$ не имеет параллельных сторон. Пусть $K = AB \cap CD$, $L = BC \cap DA$, K и L лежат по разные стороны от прямой AC. Тогда $ABCD$ описан около окружности тогда и только тогда, когда $KA + LC = KC + LA$.

$\triangleright$ 1.15. В условиях предыдущей задачи $ABCD$ описан около окружности тогда и только тогда, когда $KB + LB = KD + LD$.

$\triangleright$ 1.16. В условиях предыдущей задачи $AK + KC = AL + LC$ равносильно $KB + KD = LB + LD$ и равносильно $AB + BC = AD + DC$.

Следующий факт также хорошо известен и полезен в разных задачах.

Упражнение 1.17. Докажите, что две общие внешние касательные к паре окружностей равны между собой и две внутренние касательные к паре непересекающихся окружностей равны между собой.

$\triangleright$ 1.18. В четырёхугольнике $ABCD$ проведена пара непересекающихся отрезков с концами на сторонах AB и CD и пара непересекающихся отрезков с концами на сторонах BC и DA. Таким образом четырёхугольник поделился на 9 маленьких четырёхугольников. Пусть в «угловые» четырёхугольники можно вписать окружность. Докажите, что в $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда окружность можно вписать в «центральный» четырёхугольник разбиения.

Упражнение 1.19. Докажите, что если AK и AL — касательные к окружности Ω с центром O, то AO — биссектриса $\angle KAL$.

Из этого упражнения сразу выводится задача.

$\triangleright$ 1.20. Докажите, что четыре точки пересечения внутренних и внешних общих касательных к двум непересекающимся окружностям Ω_1 и Ω_2 и центры окружностей Ω_1 и Ω_2 лежат на одной окружности.

Упражнение 1.21. Докажите, что если вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон соответственно в точках A_1, B_1, C_1, то $AB_1 = AC_1 = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$. Как изменится формула, если рассмотреть точки касания вневписанных окружностей со сторонами A_2, B_2, C_2 вместо A_1, B_1, C_1?

Из этого упражнения (или из прямого подсчёта касательных) выводится задача.

$\triangleright$ 1.22. Докажите, что длина общей внешней касательной к непересекающимся окружностям Ω_1 и Ω_2 равна длине отрезка общей внутренней касательной, который высекается на ней общими внешними касательными.

$\triangleright$ 1.23. Окружности Ω_1 и Ω_2 касаются изнутри окружности Ω в диаметрально противоположных точках и не пересекаются. Общие внутренние касательные Ω_1 и Ω_2 пересекают Ω в точках A, B, C, D в указанном порядке на окружности Ω. Докажите, что две стороны четырёхугольника $ABCD$ соответственно параллельны двум внешним общим касательным окружностей Ω_1 и Ω_2.

1.3. **Вписанные углы.** Следующая задача легко доказывается (например, если вспомнить, что такое «гомотетия»), но очень важна во многих других задачах, где есть касания окружностей друг с другом.

▷ 1.24 (Лемма о сегменте). Прямая ℓ делит окружность Ω на дуги α_1 и α_2. Окружность Ω' касается дуги α_1 изнутри и прямой ℓ в точках A и B соответственно. Докажите, что прямая AB пересекает α_2 в её середине.

▷ 1.25. Пусть картинка та же, что в предыдущей задаче. Пусть точки пересечения ℓ с Ω — это K и L. Пусть точка пересечения AB и α_2 — это C, а длина касательной из C к Ω' равна t. Докажите, что $CK = CL = t$.

▷ 1.26. Пусть треугольник ABC вписан в окружность Ω. Пусть окружность Ω' касается Ω изнутри в точке D и касается отрезков AB и AC в точках B' и C' соответственно. Докажите, что точка пересечения описанных окружностей треугольников $CC'D$ и $BB'D$ лежит на прямой $C'B'$. Докажите, что отрезок $B'C'$ содержит центр вписанной окружности треугольника ABC.

▷ 1.27. Пусть две окружности радиусов R_1 и R_2 касаются друг друга и касаются прямой ℓ в точках A и B. Докажите, что $AB^2 = 4R_1R_2$.

▷ 1.28. На прямой расположены точки A, B, C в указанном порядке. На отрезках AB, BC, AC как на диаметрах построены в одну сторону от прямой полуокружности H_{AB}, H_{BC}, H_{AC}, через точку B проведена прямая $\ell \perp AC$. Окружность Ω_1 касается H_{AC} изнутри, H_{AB} снаружи и прямой ℓ. Окружность Ω_2 касается H_{AC} изнутри, H_{BC} снаружи и прямой ℓ. Докажите, что радиусы окружностей Ω_1 и Ω_2 равны.

▷ 1.29. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в некоторую окружность и в него вписана окружность с центром I. Продолжения сторон AD и BC пересекаются в точке K. Докажите, что $KA \cdot KD = KI^2$.

Из этой задачи с помощью сведений из раздела «Геометрия 2» можно вывести следующую задачу:

▷ 1.30. На плоскости даны две окружности и рассматриваются всевозможные четырёхугольники, вписанные в первую и описанные вокруг второй. Докажите, что точки пересечения диагоналей всех этих четырёхугольников совпадают.

Далее идут разные факты про окружности, вписанные в сегмент или криволинейный треугольник.

▷ 1.31. Треугольник ABC вписан в окружность Ω, центр его вписанной окружности обозначим I. Окружность Ω' касается дуги CAB окружности Ω в точке K и касается отрезка BC в точке L. Пусть M — это вторая точка пересечения прямой LI и окружности Ω'. Докажите, что точки A, K, M, I лежат на одной окружности.

▷ 1.32. Докажите, что в условиях предыдущей задачи прямая AM является касательной к окружности Ω'. Иначе говоря, центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на прямой, соединяющей точки L и M, в которых Ω' касается отрезка BC и одной из касательных из точки A.

▷ 1.33. В окружность Ω вписан четырёхугольник $ABCD$, две его диагонали делят соответствующий круг на четыре криволинейных треугольника. В каждый из четырёх криволинейных треугольников вписана окружность (касающаяся двух диагоналей и Ω) и проведена прямая, соединяющая точки касания такой вписанной окружности с AC и BD. Докажите, что четыре построенных так прямых образуют прямоугольник из задачи 1.7.

▷ 1.34. Треугольник ABC вписан в окружность Ω. D — некоторая точка на стороне BC. Окружности Ω_1 и Ω_2 касаются окружности Ω изнутри, отрезка AD и отрезка BC. Окружности Ω_1 и Ω_2 лежат по ту же сторону от BC, что и точка A и по разные стороны от отрезка AD. Докажите, центра вписанной окружности треугольника ABC лежит на прямой, соединяющей центры окружностей Ω_1 и Ω_2.

▷ 1.35. Треугольник ABC вписан в окружность Ω. D — точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC. Окружности Ω_1 и Ω_2 касаются окружности Ω изнутри, отрезка AD и отрезка BC. Окружности Ω_1 и Ω_2 лежат по ту же сторону от BC, что и точка A и по разные стороны от отрезка AD. Докажите, что радиусы окружностей Ω_1 и Ω_2 совпадают с радиусом вписанной окружности треугольника ABC.

Следующая задача является некоторым обобщением задачи 1.26 и доказывается похожим рассуждением. Её результат применяется в разных задачах, две из которых приведены ниже.

▷ 1.36 (Теорема о лунке). Дана окружность Ω и точка A вне ее. Рассматриваются всевозможные треугольники ABC, описанные вокруг Ω. На стороне BC в каждом случае во внешнюю (или всегда во внутреннюю) сторону строится сегмент фиксированной угловой меры α. Докажите, что дуга сегмента всегда касается некоторой фиксированной окружности Ω', касающейся прямых AB и AC.

▷ 1.37. Окружности Ω_1 и Ω_2 касаются изнутри окружности Ω и не пересекаются (ср. с задачей 1.23). Общие внутренние касательные Ω_1 и Ω_2 пересекают Ω в точках A, B, C, D в указанном порядке на окружности Ω. Докажите, что две стороны четырёхугольника $ABCD$ соответственно параллельны двум внешним общим касательным окружностей Ω_1 и Ω_2.

▷ 1.38. Докажите теорему Фейербаха: окружность, описанная вокруг срединного треугольника $\triangle ABC$ касается вписанной окружности $\triangle ABC$ и всех вневписанных окружностей $\triangle ABC$

1.4. **Высоты треугольника.**

▷ 1.39. Внутри остроугольного треугольника ABC отмечена точка X. Оказалось, что выполняются равенства углов

$$\angle ABX = \angle ACX, \quad \angle BCX = \angle BAX, \quad \angle CAX = \angle CBX.$$

Докажите, что X — точка пересечения высот (ортоцентр) $\triangle ABC$.

▷ 1.40. Пусть в остроугольном треугольнике $\triangle ABC$ проведена высота AA_1 и на ней взята точка X. Через точку X проведены отрезки до пересечения с соответствующей противоположной стороной треугольника BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle B_1A_1A = \angle C_1A_1A$.

Подсказка: предыдущая задача очевидна для случая, когда X — ортоцентр $\triangle ABC$.

▷ 1.41. Докажите, что если H — ортоцентр $\triangle ABC$, то $\overline{AH} = \operatorname{ctg} \angle BAC \cdot I(\overline{BC})$, где I — поворот вектора влево на 90°, а котангенс берётся для ориентированного угла.

Из этой задачи можно вывести следующую задачу.

▷ 1.42. Четыре прямые общего положения образуют четыре треугольника (по тройкам прямых). Докажите, что ортоцентры этих треугольников лежат на одной прямой.

▷ 1.43. В остроугольном треугольнике $\triangle ABC$ расположен соответственно подобный ему треугольник $\triangle A_1B_1C_1$, у которого продолжение прямой A_1B_1 содержит C, продолжение прямой B_1C_1 содержит A, продолжение прямой C_1A_1 содержит B. Докажите, что центр описанной окружности $\triangle A_1B_1C_1$ совпадает с ортоцентром $\triangle ABC$.

Следующая задача непосредственно следует из теоремы Пифагора.

$\triangleright$ 1.44. Пусть в треугольнике $\triangle ABC$ на сторонах AB, BC, CA взяты точки C_1, A_1, B_1 соответственно и через них проведены прямые ℓ_C, ℓ_A, ℓ_B перпендикулярно AB, BC, CA соответственно. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2 = C_1B^2 + A_1C^2 + B_1A^2.$$

Идею предыдущей задачи развивает следующая:

$\triangleright$ 1.45. В остроугольном треугольнике $\triangle ABC$ проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. В треугольниках $\triangle AB_1C_1, \triangle BC_1A_1$ и $\triangle CA_1B_1$ проведены соответственно высоты AA_2, BB_2, CC_2. Через точки A_2, B_2, C_2 проведены прямые ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C перпендикулярно BC, CA, AB соответственно. Докажите, что прямые ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C пересекаются в одной точке.

1.5. **Изогональное сопряжение.**

Определение 1.46. Точки X и Y внутри треугольника $\triangle ABC$ называются *изогонально сопряжёнными*, если

$$\angle BAX = \angle CAY, \quad \angle CBX = \angle ABY, \quad \angle ACX = \angle BCY.$$

Упражнение 1.47. Докажите с помощью теоремы Чевы, что у всякой точки X внутри треугольника $\triangle ABC$ существует изогонально сопряжённая ей точка внутри треугольника.

$\triangleright$ 1.48. (Частный случай теоремы Паскаля) Пусть точки A, B, C, D, E, F лежат на окружности в данном порядке. Обозначим точки пересечения:

$$X = AE \cap BF, \quad Y = AD \cap CF, \quad Z = BD \cap CE.$$

Докажите, что X, Y и Z лежат на одной прямой.

$\triangleright$ 1.49. Дан треугольник $\triangle ABC$ и точка P внутри него такая, что

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC.$$

Обозначим центры вписанных окружностей треугольников $\triangle APB$ и $\triangle APC$ через D и E соответственно. Докажите, что прямые AP, BD и CE пересекаются в одной точке.

$\triangleright$ 1.50. Внутри треугольника $\triangle ABC$ отмечена точка P. Обозначим I_A, I_B и I_C центры вписанных окружностей треугольников $\triangle BPC, \triangle CPA$ и $\triangle APB$ соответственно. Известно, что I_A лежит на биссектрисе $\angle BAC$, I_B лежит на биссектрисе $\angle ABC$. Докажите, что I_C лежит на биссектрисе $\angle BCA$.

$\triangleright$ 1.51. В треугольнике $\triangle ABC$ проведена медиана AM. Центры вписанных окружностей треугольников $\triangle BAM$ и $\triangle CAM$ обозначим I_1 и I_2, середину дуги BAC описанной окружности обозначим A'. Докажите, что четыре точки A', A, I_1 и I_2 лежат на одной окружности.

2. Теория чисел

2.1. **Алгоритм Евклида.** В дальнейшем наибольший общий делитель натуральных n и m обозначается (n, m).

▷ 2.1. Докажите, что для любых натуральных n и m найдутся такие целые n' и m', что $(n, m) = n'n + m'm$.

▷ 2.2. Докажите, что наибольший общий делитель (m, n) обладает двумя свойствами: он является делителем m и n, и любой другой общий делитель m и n является также делителем (n, m).

▷ 2.3. Докажите, что если $(n, m) = 1$, то $(2^n - 1, 2^m - 1) = 1$.

▷ 2.4. Чему равен наибольший общий делитель $(2^n - 1, 2^m - 1)$ при произвольных n и m?

▷ 2.5. Докажите, что если для натуральных m и n выполняется $(m, n) = 1$, то для любого натурального k

$$(m, nk) = (m, k).$$

▷ 2.6. Докажите, что если p — простое число, a и b — натуральные числа и ab делится на p, то одно из чисел a и b делится на p.

▷ 2.7. Докажите, что если $(m, n) = 1$, а число a делится на m и на n, то оно делится на mn.

▷ 2.8 (Основная теорема арифметики). Докажите, что любое натуральное число раскладывается в произведение простых однозначно с точностью до перестановки множителей.

▷ 2.9 (Китайская теорема об остатках). Предположим, что $m_1, \dots, m_k$ — попарно взаимно простые числа, $M = m_1 m_2 \dots m_k$ — их произведение. Тогда отображение, сопоставляющее остатку x по модулю M набор его остатков $(x_1, \dots, x_k)$, где x_i — остаток по модулю m_i, определено и взаимно однозначно.

Другая формулировка: если числа $m_1, \dots, m_k$ попарно взаимно просты, а $a_1, \dots, a_k$ — некоторые целые числа, то найдётся целое число x такое, что для любого $i = 1, \dots, k$

$$x \equiv a_i \mod m_i.$$

▷ 2.10. Докажите, что если $(m, n) = 1$ и дано натуральное число $N > mn - m - n$, то N можно представить в виде

$$N = m'm + n'n$$

с целыми неотрицательными m' и n'.

▷ 2.11. Пусть f_n — числа Фибоначчи (напомним, что $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ при $n \in \mathbb{N}$). Докажите, что если $(n, m) = 1$, то $(f_n, f_m) = 1$. Докажите более общее утверждение:

$$(f_n, f_m) = f_{(n,m)}.$$

2.2. **Сложение дробей.**

▷ 2.12. Докажите, что если $\sqrt{7} - \dfrac{m}{n} > 0$ (m и n — натуральные числа), то $\sqrt{7} - \dfrac{m}{n} > \dfrac{1}{mn}$.

▷ 2.13. Докажите, что если $p \in \mathbb{P}$ и $p \neq 2$, то

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1},$$

то $p \mid m$ (p делит m).

▷ 2.14. Пусть p — простое число, а x — рациональное число. Положим $\deg_p x = k$, если

$$x = p^k \frac{m}{n},$$

где m и n не делятся на p. Докажите, что

$$\deg_p(x+y) \geqslant \min\left\{\deg_p x, \deg_p y\right\}$$

и если $\deg_p x \neq \deg_p y$, то

$$\deg_p(x+y) = \min\left\{\deg_p x, \deg_p y\right\}.$$

▷ 2.15. В обозначениях предыдущей задачи, приведите пример ситуации, когда $\deg_p x = \deg_p y = k$, но $\deg_p(x+y) \neq k$.

▷ 2.16. Докажите, что ни при каком натуральном $n > 1$ число

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

не целое.

▷ 2.17. Докажите, что ни при каком натуральном $n > 1$ число

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$$

не целое.

2.3. **Простейшие уравнения в целых числах.**

Определение 2.18. Уравнение $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ называется однородным, если при замене

$$x_1' = kx_1,\ x_2' = kx_2, \ldots, x_n' = kx_n$$

уравнение умножается на k в некоторой степени.

При решении однородных уравнений в целых числах полезно сначала поделить все переменные на их н. о. д., и далее предполагать, что переменные взаимно просты в совокупности. Описав все взаимно простые решения, мы знаем, что все остальные решения получаются из них домножением на одну и ту же целую константу.

▷ 2.19. Докажите, что все решения уравнения

$$x^2 + y^2 = z^2$$

имеют вид (возможно, после перестановки x и y)

$$x = 2Cmn, \quad y = C(m^2 - n^2), \quad z = C(m^2 + n^2), \quad C, m, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Если потребовать взаимную простоту (в совокупности) x, y, z, то можно считать, что $C = 1$.

Также если уравнение однородное, то можно свести его к уравнению в рациональных числах, сделав замену

$$t_1 = x_1/x_n,\ t_2 = x_2/x_n, \ldots, t_{n-1} = x_{n-1}/x_n,$$

тогда взаимно простые целые решения однородного уравнения $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ с условием $x_n > 0$ (или $x_n < 0$) находятся во взаимно однозначном соответствии (с точностью до знака) с рациональными решениями уравнения $F(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, 1) = 0$.

▷ 2.20. Решите задачу 2.19 с помощью сведения к уравнению в рациональных числах.

▷ 2.21. Найдите все натуральные решения уравнения

$$x^2 + y^2 = 2z^2.$$

▷ 2.22. Докажите, что уравнение в рациональных числах $P(s,t)=0$, где $P(s,t)$ — многочлен третьей степени, может быть решено в явном виде, если найдётся такая пара рациональных чисел (s_0,t_0), что

$$P(s_0,t_0)=\frac{\partial P}{\partial s}(s_0,t_0)=\frac{\partial P}{\partial t}(s_0,t_0)=0.$$

▷ 2.23. Найдите хотя бы три различных решения уравнения

$$s^3+t^3=9$$

в рациональных числах.

▷ 2.24. Докажите, что существует бесконечное количество пар m,n взаимно простых натуральных чисел таких, что все соответствующие уравнения

$$(x+m)^3=nx$$

имеют по три различных целых корня.

▷ 2.25. Докажите, что не существует четырёх точек на плоскости таких, что расстояние между любыми двумя из них — нечётное целое число.

2.4. **Спуск в уравнениях в целых числах.** В некоторых уравнениях в целых числах (как правило, второго порядка) возможно построение нового решения из старого. При этом, при некоторых дополнительных предположениях, у нового решения сумма модулей, максимум модуля, или какая-то другая величина будет меньше, чем у старого решения.

Это позволяет построить все решения уравнения, или доказать отсутствие решений. В последнем случае обычно строится противоречие так: доказывается, что для всякого решения существует меньшее решение.

▷ 2.26. Докажите, что уравнение

$$x^2+y^2+z^2=2xyz$$

не имеет решений в натуральных числах.

▷ 2.27. Докажите, что уравнение

$$x^2+y^2+z^2+t^2=2xyzt$$

не имеет решений в натуральных числах.

▷ 2.28. Докажите, что 7 нельзя представить в виде суммы трёх квадратов рациональных чисел.

▷ 2.29. Докажите, что уравнение

$$x^4+y^4=z^4$$

не имеет решений в натуральных числах.

Далее для уравнений второго порядка нам понадобится простое утверждение.

Упражнение 2.30. Если квадратный трёхчлен со старшим коэффициентом 1 и целыми коэффициентами имеет один целый корень, то другой его корень тоже целый.

Заметьте, что второй корень квадратного уравнения можно найти по теореме Виета двумя способами. Это позволяет осуществлять спуск в уравнениях, квадратичных относительно своих переменных.

▷ 2.31. Докажите, что пара натуральных чисел (x, y) является решением уравнения

$$x^2 - kxy + y^2 = 1, \quad k \geqslant 2$$

тогда и только тогда, когда это пара соседних членов последовательности

$$a_1 = 1, a_2 = k, a_{n+1} = ka_n - a_{n-1}\ (n \geqslant 2).$$

▷ 2.32. Докажите, что уравнение

$$x^2 - kxy + y^2 = 2, \quad k \in \mathbb{N}$$

не имеет решений в целых числах.

▷ 2.33. Решите в целых числах уравнения

$$x^2 - xy - y^2 = 1$$

и

$$x^2 - xy - y^2 = -1.$$

▷ 2.34. Пусть для натуральных a и b число $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ целое. Докажите, что тогда это число квадрат целого.

† 2.35. Натуральные числа m, n, k таковы, что $4mn = (2k+1)^2 + 11$. Докажите, что тогда для некоторых нечётных a и b

$$4m = a^2 + 11b^2 \quad \text{или} \quad 4n = a^2 + 11b^2.$$

2.5. **Малая теорема Ферма.** Одним из основных методов в элементарной теории чисел является взятие остатков по модулю какого-либо числа. Первым нетривиальным фактом про остатки является малая теорема Ферма:

Теорема 2.36 (Малая теорема Ферма)**.**

$$x^p - x \equiv 0 \mod p, \quad x \in \mathbb{Z}, \ \ p \in \mathbb{P}.$$

Упражнение 2.37. Докажите малую теорему Ферма.

Теорема 2.38. *Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами степени n, старший коэффициент которого не делится на p. Тогда количество разных остатков $x \mod p$, удовлетворяющих сравнению*

$$f(x) \equiv 0 \mod p$$

не превосходит n.

▷ 2.39. Докажите теорему 2.38.

▷ 2.40. Пусть p — простое число n взаимно просто с p, а k — наименьшее натуральное число, такое что $n^k \equiv 1 \mod p$. Докажите, что $k \mid p - 1$.

▷ 2.41. В условиях предыдущей задачи докажите, что если k чётное, то $n^{k/2} \equiv -1 \mod p$.

▷ 2.42. Докажите, что все простые делители числа $2^{2^k} + 1$ имеют вид $m2^{k+1} + 1$.

▷ 2.43. Докажите, что если $k \neq l$, то числа $2^{2^k} + 1$ и $2^{2^l} + 1$ взаимно просты.

▷ 2.44. Докажите, что если число $2^{2k} + 2^k + 1$ простое, то $2^{2k} + 2^k + 1 \mid 2^{2^k+1} - 1$.

▷ 2.45. Докажите, что объединение последовательностей $\{2^{2^n} + 1\}$ и $\{6^{2^n} + 1\}$ содержит бесконечно много составных чисел.

▷ 2.46. Пусть $l \geqslant 1$, $k \geqslant 0$, $p \in \mathbb{P}$ и $m \in \mathbb{N}$. Докажите, что

$$p^{l+k} \mid (1 + p^l m)^{p^k} - 1.$$

▷ 2.47. Пусть $k \geqslant 1$ и $m \in \mathbb{N}$. Докажите, что

$$2^{k+2} \mid (1+2m)^{2^k} - 1.$$

2.6. **Квадратичные вычеты.**

Определение 2.48. Остаток r по простому модулю p называется *квадратичным вычетом* по модулю p, если существует такое целое x, что $x^2 \equiv r \mod p$.

Для начала мы исследуем, когда -1 является или не является квадратичным вычетом по простому модулю.

▷ 2.49. Если $p \in \mathbb{P}$ имеет вид $p = 4k-1$, то из того, что $p \mid x^2 + y^2$ следует, что $p \mid x$ и $p \mid y$.

▷ 2.50. Докажите, что простых чисел вида $4k+1$ бесконечно много.

▷ 2.51. Если $p \in \mathbb{P}$ имеет вид $p = 4k+1$, то существует такое целое α, что $\alpha^2 + 1 \equiv 0 \mod p$.

▷ 2.52. Докажите, что уравнение

$$x^2 + 5 = y^3$$

не имеет решений в целых числах.

Введём обозначение $\varepsilon(p) = \frac{p-1}{2}$. Оно будет применяться для нечётных простых чисел p.

▷ 2.53. Докажите, что сравнение (p — нечётное простое)

$$x^2 \equiv a \mod p$$

разрешимо, если $a^{\varepsilon(p)} \equiv 1 \mod p$ и неразрешимо, если $a^{\varepsilon(p)} \equiv -1 \mod p$.

▷ 2.54. Докажите, что если $p > 3$, то сумма всех квадратичных вычетов по модулю p сравнима с 0 по модулю p.

Обозначим

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \pm 1, \quad \left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\varepsilon(p)} \mod p,$$

это выражение называется символом Лежандра.

Вычисление символа Лежандра может облегчить следующая замечательная теорема:

Теорема 2.55 (Квадратичный закон взаимности)**.** *Для нечётных простых чисел q и p справедлива формула:*

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\varepsilon(p)\varepsilon(q)}.$$

† 2.56. Докажите квадратичный закон взаимности.

▷ 2.57. Как вычислить $\left(\frac{2}{p}\right)$?

При решении двух предыдущих задач может помочь утверждение такой задачи:

▷ 2.58. Пусть S — такое множество ненулевых остатков $\mod p$, что для любого ненулевого остатка x ровно один из остатков x и $-x$ принадлежит S. Обозначим $e(s,a)$ такое из чисел 1 или -1, что $e(a,s)as \in S$ (по условиям на множество S оно определяется однозначно). Докажите, что верна формула

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \prod_{s \in S} e(a,s).$$

2.7. **Суммы двух квадратов.**

Теорема 2.59. *Пусть $x \in \mathbb{R}$ и $M \in \mathbb{N}$, тогда существуют такие $0 < m < M$ и $n \in \mathbb{Z}$, что*
$$|mx - n| \leqslant \frac{1}{M}.$$

▷ 2.60. Докажите теорему 2.59.

Теперь с помощью теоремы 2.59 мы можем в некоторых случаях переходить от сравнений по модулю к точным равенствам. Это позволит нам доказать, что простое число p представляется в виде суммы двух квадратов тогда и только тогда, когда это не противоречит сравнению по модулю p.

▷ 2.61. Докажите, что если $p = 4k + 1 \in \mathbb{P}$, то $p = x^2 + y^2$ для некоторых $x, y \in \mathbb{Z}$.

▷ 2.62. Докажите, что если числа a и b являются суммами двух квадратов, то их произведение тоже является суммой двух квадратов.

Из всех предыдущих задач следует такое утверждение:

Теорема 2.63. *Целое число представляется в виде суммы двух квадратов тогда и только тогда, когда его разложение на простые не содержит ни одного простого числа вида $4k - 1$ в нечётной степени.*

▷ 2.64. Докажите теорему 2.63.

Определение 2.65. Гауссовыми целыми числами называются комплексные числа вида $a + ib$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, а $i^2 = -1$. Их множество обозначается $\mathbb{Z}[i]$.

▷ 2.66. Докажите, что гауссовы целые числа можно делить с остатком, а именно: для любых $p, q \in \mathbb{Z}[i]$, $q \neq 0$, найдутся $s, r \in \mathbb{Z}[i]$, что
$$p = qs + r \quad |r| \leqslant |q|/\sqrt{2}.$$

▷ 2.67. Докажите, что гауссовы целые числа однозначно раскладываются на множители с точностью до умножения на $-1, i, -i$.

▷ 2.68. Выведите из предыдущей задачи возможность разложить простое число вида $4k + 1$ в сумму двух квадратов. Докажите, что такое разложение единственно с точностью до перестановки квадратов.

▷ 2.69. Какие гауссовы целые числа нельзя разложить на множители, каждый из которых не равен $1, -1, i, -i$?

▷ 2.70. Докажите, что любой ненулевой многочлен с целыми коэффициентами принимает ненулевое значение, делящееся на простое число вида $4k + 1$.

2.8. **Уравнение Пелля.**

▷ 2.71. Докажите, что уравнение Пелля
$$x^2 - Dy^2 = 1, \quad D \in \mathbb{N},\ D \neq n^2$$
имеет бесконечно много решений в целых числах и все пары решений могут быть заданы через соотношение:
$$x_k + \sqrt{D}y_k = \pm(x_1 + \sqrt{D}y_1)^k \quad x'_k + \sqrt{D}y'_k = \pm(x_1 - \sqrt{D}y_1)^k,$$
где x_1, y_1 — некоторые целые числа, $k \in \mathbb{Z}$.

2.9. **Суммы трёх и четырёх квадратов.**

▷ 2.72. Докажите, что числа вида $4^n(8m-1)$, $n \in \mathbb{Z}^+, m \in \mathbb{N}$, не являются суммами трёх квадратов целых чисел.

▷ 2.73. Докажите, что для всякого простого p найдутся три числа a, b, c, не все из которых делятся на p, для которых $p \mid a^2 + b^2 + c^2$.

▷ 2.74. Докажите, что если числа a и b являются суммами четырёх квадратов, то их произведение тоже является суммой четырёх квадратов.

▷ 2.75. Докажите, что если числа a и $b \neq 0$ являются суммами четырёх квадратов рациональных чисел, то их частное тоже является суммой четырёх квадратов рациональных чисел.

▷ 2.76. Докажите, что всякое положительное рациональное число является суммой четырёх квадратов рациональных чисел.

▷ 2.77. Докажите, что всякое натуральное число является суммой четырёх квадратов целых чисел.

† 2.78. Докажите, что все натуральные числа, кроме чисел из задачи 2.72, являются суммами трёх квадратов целых чисел.

2.10. **Первообразные корни по модулю p.** Структура остатков по модулю p относительно операции умножения описывается с помощью понятия «первообразного корня».

Определение 2.79. Остаток $g \mod p$ называется *первообразным корнем* по модулю p, если любой ненулевой остаток $x \mod p$ представляется в виде
$$x \equiv g^{\iota(x)} \mod p.$$

Теорема 2.80. *Для любого простого p существует первообразный корень по модулю p.*

▷ 2.81. Докажите предыдущую теорему, применяя теорему 2.38 к многочленам вида $x^k - 1$.

▷ 2.82. Для всех натуральных k и простых p вычислите остаток
$$1^k + 2^k + \ldots + (p-1)^k \mod p.$$

▷ 2.83. Пусть p — простое число, а $P(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлен от n переменных с целыми коэффициентами степени менее $n(p-1)$. Докажите, что сумма значений P по всем наборам целых чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ с $0 \leqslant x_i < p$ делится на p.

▷ 2.84. Пусть p — простое число, а $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — многочлен от n переменных с целыми коэффициентами степени менее n. Докажите, что количество решений сравнения
$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0 \mod p, \quad 0 \leqslant x_i < p$$
делится на p.

2.11. **Целые алгебраические числа.**

Определение 2.85. Многочлен со старшим коэффициентом 1 называется *унитарным.*

Теорема 2.86. *Если рациональное число x является корнем унитарного многочлена с целыми коэффициентами, то это число — целое.*

Упражнение 2.87. Если вы не знаете доказательства этой теоремы, то непременно докажите ее самостоятельно.

▷ 2.88. Докажите, что если $x + x^{-1} \in \mathbb{Z}$, то $x^n + x^{-n} \in \mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}$). Кроме того, если $x^n + x^{-n} \in \mathbb{Z}$ и $x + x^{-1} \in \mathbb{Q}$, то $x + x^{-1} \in \mathbb{Z}$.

▷ 2.89. Найдите все рациональные числа r и q такие, что
$$\cos \pi r = q.$$

▷ 2.90. Докажите, что если все корни унитарного многочлена с целыми коэффициентами являются комплексными числами с единичным модулем, то все эти корни являются корнями некоторых степеней из единицы.

▷ 2.91. Если все корни унитарного многочлена с целыми коэффициентами действительны и лежат на отрезке $[-2, 2]$, то все они имеют вид $2\cos \pi r$, где $r \in \mathbb{Q}$.

▷ 2.92. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число неприводимых унитарных многочленов с целыми коэффициентами, все корни которых действительны и лежат на отрезке $[-2+\varepsilon, 2-\varepsilon]$.

Вот ещё одна похожая задача, решение которой требует несколько иных идей. Здесь могут помочь знания о делимости многочленов.

▷ 2.93. Пусть для некоторого числа $x \in \mathbb{R}$ и натуральных взаимно простых m и n выполняется
$$x^m + x^{-m} \in \mathbb{Q}, \quad x^n + x^{-n} \in \mathbb{Q}.$$
Докажите, что тогда $x + x^{-1} \in \mathbb{Q}$.

2.12. **Разные задачи.** В этом разделе собраны задачи, решения которых требуют разных (иногда сразу нескольких) методов.

▷ 2.94. Докажите, что для любого $a > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ уравнение
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_m} = a$$
имеет конечное число решений в натуральных числах.

▷ 2.95. Пусть $\alpha, \beta > 0$ — иррациональные числа, причём $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Докажите, что множества $A = \{\lfloor \alpha n \rfloor : n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{\lfloor \beta n \rfloor : n \in \mathbb{N}\}$ ($\lfloor x \rfloor$ означает целую часть x) не пересекаются и их объединение равно $\mathbb{N}$.

▷ 2.96. Докажите, что если число $2^m + 1$ простое, то m является степенью двойки.

▷ 2.97. Докажите, что если число $2^m - 1$ простое, то m тоже простое.

▷ 2.98. Докажите, что число $n = 2^{2^k} + 1$ простое тогда и только тогда, когда
$$n \mid 3^{\frac{n-1}{2}} + 1.$$

▷ 2.99. Докажите, что число $2^m - 1$ простое тогда и только тогда, когда
$$2^m - 1 \mid (2+\sqrt{3})^{2^{m-2}} + (2-\sqrt{3})^{2^{m-2}}.$$

▷ 2.100. Докажите, что если p простое и $n < p < 2n$, то $p \mid C_{2n}^n$.

▷ 2.101. Докажите, что
$$\prod_{p \in \mathbb{P},\ p \leqslant n} p \leqslant 4^n.$$

Определение 2.102. Степень простого числа p в разложении n на простые множители обозначим $\deg_p n$.

▷ 2.103. Докажите, что
$$\deg_p C_n^k = \sum_{l \geqslant 1} \left\lfloor \frac{n}{p^l} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p^l} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{p^l} \right\rfloor.$$

$\triangleright$ 2.104. Докажите, что $\deg_p C_n^k$ равно количеству переносов, которые надо сделать для сложения $n-k$ и k в p-ичной системе счисления.

Исследование содержания простых чисел в разложении C_{2n}^n позволяет доказать постулат Бертрана (теорему Чебышёва):

† 2.105 (Теорема Чебышёва). Для любого натурального $n \geqslant 2$ существует простое число p такое, что
$$n < p < 2n.$$

† 2.106. Докажите, что число $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}$ иррационально при любом $n \geqslant 2$.

† 2.107. Дано $2n-1$ иррациональное число $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}$. Докажите, что из них можно выбрать n чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ так, что для любых положительных рациональных $r_1, r_2, \ldots, r_n$ число
$$r_1b_1 + r_2b_2 + \ldots + r_nb_n$$
будет иррациональным.

3. Многочлены

Определение 3.1. Будем обозначать множества многочленов с целыми, рациональными, действительными, комплексными коэффициентами $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$.

3.1. **Основная теорема алгебры.**

Теорема 3.2 (Основная теорема алгебры)**.** *У любого многочлена $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, который не является константой, есть хотя бы один комплексный корень.*

Замечание 3.3. Из этой теоремы следует, что любой многочлен $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ представляется в виде

$$P(x) = a_n \prod_{i=1}^{n} (x - x_i), \quad x_i \in \mathbb{C}.$$

Также любой многочлен $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ представляется в виде

$$P(x) = a_n \prod_{i=1}^{k} (x^2 + p_i x + q_i) \prod_{i=1}^{n-2k} (x - x_i), \quad x_i, p_i, q_i \in \mathbb{R},\ p_i^2 - 4q_i < 0.$$

Следующие задачи используют разложение многочленов на линейные или квадратичные множители.

$\triangleright$ 3.4. Представьте многочлен $x^4 + 4$ в виде произведения двух многочленов степени 2 с действительными коэффициентами.

$\triangleright$ 3.5. Докажите, что если $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ таков, что $P(x) \geqslant 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то

$$P(x) = A^2(x) + B^2(x),$$

где $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[x]$.

$\triangleright$ 3.6. Докажите, что утверждение предыдущей задачи не верно для многочленов от двух переменных.

$\triangleright$ 3.7. Докажите, что если $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ таков, что $P(x) > 0$ при $x > 0$, то

$$P(x) = \frac{Q(x)}{R(x)},$$

где многочлены $R(x)$ и $Q(x)$ имеют неотрицательные действительные коэффициенты.

$\triangleright$ 3.8. Докажите, что тригонометрический многочлен степени n

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

не равный тождественно нулю, имеет не более $2n$ корней на промежутке $[0, 2\pi)$.

В следующей задаче основная теорема алгебры может помочь, но можно решать и без неё:

$\triangleright$ 3.9. Докажите, что для любого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ найдутся ненулевые многочлены $Q(x), R(x) \in \mathbb{Z}[x]$ такие, что

$$P(x)Q(x) = R(x^{2000}).$$

3.2. **Делимость многочленов.** Для того, чтобы не формулировать отдельно утверждения для целых, рациональных, действительных или других чисел, сделаем несколько определений.

Определение 3.10. Множество $\mathbb{A}$ называется *коммутативным кольцом с единицей*, если на нем введены операции сложения и умножения, удовлетворяющие следующим условиям:

(1) $a+(b+c)=(a+b)+c,\ a+b=b+a,\ \exists 0\in\mathbb{A}:\forall a\ a+0=a,\ \forall a\ \exists -a: a+(-a)=0;$
(2) $a(bc)=(ab)c,\ ab=ba,\ \exists 1\in\mathbb{A}:\forall a\ a\cdot 1=a;$
(3) $a(b+c)=ab+ac.$

Замечание 3.11. В дальнейшем коммутативные кольца с единицей называются просто *кольцами.* Наиболее характерным примером кольца является множество целых чисел.

Определение 3.12. Будем говорить, что $a\in\mathbb{A}$ *делится* на $b\in\mathbb{A}$ и писать: $b\mid a$, если найдётся $c\in\mathbb{A}$ такое, что $a=bc$. Для некоторых $a,b,m\in\mathbb{A}$ будем говорить, что a сравним с b по модулю m и писать $a\equiv b \mod m$, если $m\mid a-b$. *Вычетом* элемента $a\in\mathbb{A}$ по модулю m называется множество элементов $\mathbb{A}$, сравнимых с a по модулю m.

Определение 3.13. Кольцо k называется *полем*, если в нем для любого $a\in k$, $a\neq 0$ найдётся $a^{-1}\in k$ такой, что $aa^{-1}=1$.

Примеры полей: рациональные и действительные числа $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$, поле остатков по модулю простого числа p — $\mathbb{Z}_p$.

Для любого кольца $\mathbb{A}$ множество многочленов с коэффициентами из $\mathbb{A}$ — $\mathbb{A}[x]$ является кольцом, аксиомы кольца проверяются тривиально. Рассмотрим некоторые важные утверждения о делимости многочленов. Первое говорит о том, что для многочленов с коэффициентами в некотором поле возможно деление с остатком.

Теорема 3.14. *Рассмотрим многочлены из $k[x]$, где k — некоторое поле. Для любых многочленов $P(x)$ и $Q(x)\neq 0$ найдутся такие многочлены $S(x)$ и $R(x)$, что*

$$P(x)=S(x)Q(x)+R(x)$$

и $\deg R(x)<\deg Q(x)$. При этом $S(x)$ называется частным, а $R(x)$ — остатком от деления $P(x)$ на $Q(x)$ (Все многочлены из $k[x]$).

$\triangleright$ 3.15. Докажите, что для многочленов с коэффициентами в произвольном кольце деление с остатком также возможно, если старший коэффициент делителя равен 1.

Из деления с остатком сразу следует теорема (общий случай теоремы 2.38):

Теорема 3.16. *Ненулевой многочлен $P(x)\in k[x]$ имеет не более $\deg P$ корней среди элементов поля k или любого поля K, содержащего k.*

Следующее утверждение говорит о существовании наибольшего общего делителя многочленов от одной переменной с коэффициентами в поле:

Теорема 3.17. *Для любых двух ненулевых многочленов $P(x),Q(x)\in k[x]$ найдётся многочлен $D(x)$ такой, что $R(x)\mid P(x)$ и $R(x)\mid Q(x)$, тогда и только тогда, когда $R(x)\mid D(x)$.*

$\triangleright$ 3.18. Докажите эту теорему с помощью деления с остатком и докажите, что существуют $A(x),B(x)\in k[x]$ такие, что

$$D(x)=A(x)P(x)+B(x)Q(x).$$

Определение 3.19. Многочлен $D(x)$ называется *наибольшим общим делителем* многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. Он определён с точностью до умножения на константу.

Итак, наибольший общий делитель многочленов от одной переменной с коэффициентами в некотором поле существует и линейно выражается через них.

Определение 3.20. Если н. о. д. многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ равен константе, то они называются *взаимно простыми.*

▷ 3.21 (Китайская теорема об остатках для многочленов). Предположим, что $M_1, \dots, M_k$ — попарно взаимно простые многочлены с коэффициентами в некотором поле, $M = M_1 M_2 \dots M_k$ — их произведение. Если многочлены $M_1, \dots, M_k$ попарно взаимно просты, а $A_1, \dots, A_k$ — некоторые многочлены, то найдётся многочлен P такой, что для любого $i = 1, \dots, k$

$$P \equiv A_i \mod M_i \Leftrightarrow M_i \mid (P - A_i).$$

▷ 3.22. Докажите, что если ненулевые многочлены $P(x), Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ не имеют общих комплексных корней и каждый из них не имеет натуральных корней, то последовательность

$$a_k = (P(k), Q(k)), \quad k \in \mathbb{N}$$

ограничена (в последовательности имеется в виду н. о. д. чисел, а не многочленов).

▷ 3.23. Пусть у многочлена 4-й степени с рациональными коэффициентами есть только один действительный корень. Докажите, что этот корень рациональный.

Определение 3.24. Многочлен $P(x) \in \mathbb{A}[x]$ называется *неприводимым*, если из того, что $P(x) = Q(x)S(x)$ следует, что один из многочленов $Q(x)$ или $S(x)$ является константой (не зависит от x).

Теорема 3.25. *Пусть k — поле. Каждый многочлен из $k[x]$ раскладывается в произведение неприводимых многочленов, причём эти многочлены определены однозначно с точностью до умножения на константы.*

▷ 3.26. Докажите эту теорему. Вспомните доказательство основной теоремы арифметики и воспользуйтесь возможностью деления с остатком.

Разберёмся теперь с неприводимостью многочленов из $\mathbb{Z}[x]$.

Определение 3.27. Многочлен $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ называется *примитивным*, если он не делится ни на одно натуральное число, большее 1.

Замечание 3.28. Это означает, что его коэффициенты взаимно просты.

Теорема 3.29 (Лемма Гаусса)**.** *Произведение примитивных многочленов является примитивным многочленом.*

▷ 3.30. Докажите лемму Гаусса с помощью редукции многочленов по модулю некоторого простого числа p. Редукция — это рассмотрение для некоторого $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ соответствующего $\overline{P}(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$, коэффициенты которого — остатки коэффициентов $P(x)$ по модулю p.

С помощью леммы Гаусса можно доказать следующую теорему:

Теорема 3.31. *Многочлен $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ неприводим тогда и только тогда, когда он неприводим как элемент $\mathbb{Q}[x]$.*

Эта теорема позволяет свести изучение неприводимости многочлена над $\mathbb{Q}$ (что сделать сложно) к изучению неприводимости над $\mathbb{Z}$, для которого есть некоторые отработанные методы.

▷ 3.32. Докажите эту теорему.

▷ 3.33. Докажите, что если несократимая дробь $p/q \in \mathbb{Q}$ является корнем уравнения $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_x + a_0 = 0$, то p является делителем a_0, а q — делителем a_n.

Теперь сформулируем наиболее полезный критерий неприводимости многочленов из $\mathbb{Z}[x]$.

Теорема 3.34 (Критерий Эйзенштейна). *Если у многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ все коэффициенты, кроме старшего, делятся на некоторое простое p, а свободный член не делится на p^2, то $P(x)$ неприводим.*

▷ 3.35. Докажите этот критерий.

▷ 3.36. Докажите, что многочлен $x^n + 5x^{n-1} + 3$ неприводим при любом $n \geqslant 2$.

▷ 3.37. Докажите, что при простом p многочлен $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$ неприводим.

▷ 3.38. Докажите также, что при любом $\ell \in \mathbb{N}$ многочлен $g(x) = f(x^{p^\ell})$ неприводим, при этом полезна теорема 3.52 (см. далее).

Рассмотрим многочлен $x^n - 1$. Его комплексные корни имеют вид $1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}$, где $w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ — первообразный корень n-й степени из единицы. Тогда получаем разложение на множители

$$x^n - 1 = \prod_{0\leqslant k\leqslant n-1} (x - w^k).$$

Определение 3.39. В приведённых выше обозначениях многочлен

$$\Phi_n(x) = \prod_{1\leqslant k\leqslant n-1, (k,n)=1} (x - w^k),$$

где произведение берётся по взаимно простым с n вычетам k называется многочленом деления круга. Считаем, что $\Phi_1(x) = x - 1$.

Степень многочлена деления круга равна $\phi(n)$ — количеству взаимно простых с n вычетов по модулю n.

▷ 3.40. Докажите формулу (произведение по делителям n)

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x).$$

▷ 3.41. Докажите, что многочлен $\Phi_n(x)$ имеет целые коэффициенты. Чему равен свободный член этого многочлена?

▷ 3.42. Пусть $a, n > 1$ — натуральные числа. Докажите, что всякий простой делитель числа $a^n - 1$ меньше $(a+1)^{\phi(n)}$.

† 3.43. Докажите, что каждый многочлен деления круга неприводим.

Сформулируем ещё один простой, но полезный факт про делимость многочленов:

Теорема 3.44. *Для любого $P(x) \in \mathbb{A}[x]$ имеем:*

$$x - y \mid P(x) - P(y).$$

Делимость рассматривается в смысле многочленов от двух переменных, то есть найдётся такой многочлен $D(x, y)$ от двух переменных с коэффициентами из $\mathbb{A}$ такой, что

$$(x - y)D(x, y) = P(x) - P(y).$$

▷ 3.45. Докажите, что если $Q(x) \mid P(x) - x$, то $Q(x) \mid P(P(\ldots P(x)\ldots)) - x$.

▷ 3.46. Докажите, что если многочлен $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ в трёх разных целых точках принимает значение 1, то он не имеет целых корней.

▷ 3.47. Пусть $P(x), Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть для всех $x \in \mathbb{Z}$ $k \mid P(Q(x)) - x$. Докажите, что для всех $x \in \mathbb{Z}$ $k \mid Q(P(x)) - x$.

3.3. **Многочлены по модулю** p. Рассмотрим множество остатков по модулю p и обозначим его $\mathbb{Z}_p$. Достаточно очевидно, что $\mathbb{Z}_p$ является полем и для многочленов с коэффициентами из $\mathbb{Z}_p$ имеют место все факты, верные для многочленов с коэффициентами в поле.

▷ 3.48. Многочлены $P(x), Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ называются *сравнимыми* по модулю p, если коэффициенты их разности делятся на p. Тогда мы будем писать $P(x) \equiv Q(x) \mod p$. Это равносильно тому, что редукции $P(x)$ и $Q(x)$ по модулю p совпадают. Аналогично определяется сравнимость для многочленов от нескольких переменных.

▷ 3.49. Какие корни в $\mathbb{Z}_p$ имеет многочлен $x^p - x$? Докажите теорему Вильсона

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \mod p.$$

Выведем несколько интересных тождеств для многочленов с коэффициентами из $\mathbb{Z}_p$.

Теорема 3.50. *Имеет место сравнение*

$$(x+y)^p \equiv x^p + y^p \mod p.$$

▷ 3.51. Докажите это сравнение.

Действуя по индукции, это утверждение можно усилить:

Теорема 3.52. *Имеет место сравнение ($\ell \in \mathbb{N}$)*

$$(x+y)^{p^\ell} \equiv x^{p^\ell} + y^{p^\ell} \mod p.$$

▷ 3.53. Докажите, что $p \mid C_{p^l}^k$ при $1 \leqslant k \leqslant p^l - 1$.

▷ 3.54. Докажите, что $C_{np}^{kp} - C_n^k \equiv 0 \mod p$.

▷ 3.55. Докажите, что $C_{2p}^p \equiv 2 \mod p^2$.

▷ 3.56. Докажите, что $p \nmid C_n^k$ тогда и только тогда, когда в p-ичной системе счисления каждая цифра числа k не превосходит стоящей на том же месте цифры числа n.

Так как $\mathbb{Z}_p$ является полем, то в кольце $\mathbb{Z}_p[x]$ имеет место однозначное разложение на неприводимые множители. Тогда имеет смысл следующий вопрос:

▷ 3.57. Найдите количество неприводимых многочленов в $\mathbb{Z}_p[x]$ степени n.

3.4. **Многочлены с действительными коэффициентами.** Далее будем рассматривать многочлены из $\mathbb{R}[x]$, если не оговорено противное. Будем изучать вопрос о местонахождении и количестве корней многочлена с использованием его производной.

Рассмотрим следующий вопрос: существует ли многочлен $P(x)$ степени не более n, который в заданных точках $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ принимает заданные значения $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$?

Упражнение 3.58. Докажите, что такой многочлен единственный.

Теорема 3.59 (Интерполяционная формула Лагранжа). *Многочлен $P(x)$ существует и задаётся формулой:*

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n+1} p_i \prod_{j \neq i} \frac{(x-a_j)}{(a_i - a_j)}.$$

▷ 3.60. Пусть многочлен $P(x)$ степени n имеет n различных действительных корней $x_1, x_2, \dots, x_n$. Докажите, что для любого $k < n-1$ имеет место формула:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{P'(x_i)} = 0.$$

▷ 3.61. Дан многочлен $P(x)$ степени n и различные целые числа $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$. Докажите, что если для всех $i = 1, \dots, n+1$ $|P(x_i)| < \dfrac{n!}{2^n}$, то старший коэффициент $P(x)$ по модулю меньше 1.

Определим многочлены Чебышёва:

Определение 3.62. *Многочленами Чебышёва* называются многочлены $T_k(x)$, удовлетворяющие условиям:

$$\cos kx = T_k(\cos x).$$

Упражнение 3.63. Проверьте, что такие многочлены существуют и выведите для них рекуррентную формулу, выражающую T_k через T_{k-1} и T_{k-2}.

▷ 3.64. Докажите, что многочлены $P_k(x) = 2T_k(x/2)$ имеют целые коэффициенты и старший коэффициент 1. Найдите старший коэффициент многочлена $T_k(x)$.

▷ 3.65. Докажите, что если старший коэффициент многочлена $P(x)$ степени n равен 1, то найдётся точка x такая, что $|x| \leqslant 1$ и $|P(x)| \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Заметьте, что многочлен Чебышёва, умноженный на некоторую константу, даёт крайний случай в этой задаче.

▷ 3.66. Докажите, что для любого тригонометрического многочлена степени n

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

с действительными a_k, b_k выполняется неравенство

$$\max\{|T'(x)| \mid x \in \mathbb{R}\} \leqslant n \max\{|T(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Следующие задачи используют сведения о взаимном расположении корней многочлена и его производной, которые даёт теорема Ролля (здесь приводится без доказательства).

Теорема 3.67 (Теорема Ролля). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, имеет производную на интервале (a, b) и $f(a) = f(b)$, то найдётся точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$.*

▷ 3.68. Докажите, что если многочлен $P(x)$ имеет k различных действительных корней, то $P'(x)$ имеет как минимум $k-1$ различный действительный корень. Это утверждение верно, если корни считать с кратностями, и если корни считать без кратностей.

▷ 3.69. Докажите, что многочлен

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!}$$

имеет не более одного действительного корня.

▷ 3.70. Докажите, что при $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ уравнение

$$\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \cdots + \frac{1}{x - x_n} = a$$

имеет не менее $n-1$ корня при $a = 0$ и не менее n корней при $a \neq 0$.

▷ 3.71. Докажите, что для всякого многочлена $P(x)$ многочлен $aP(x) + bP'(x)$ имеет не больше мнимых корней (посчитанных с кратностями), чем $P(x)$.

▷ 3.72. Пусть многочлен $P(x)$ степени n не имеет действительных корней. Докажите, что тогда для любого $a \in \mathbb{R}$ многочлен

$$Q(x) = P(x) + aP'(x) + a^2P''(x) + \ldots + a^nP^{(n)}(x)$$

тоже не имеет действительных корней.

▷ 3.73. Докажите, что если многочлен $Q(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ имеет только действительные корни и $P(x)$ — некоторый многочлен, то многочлен

$$R(x) = a_0P(x) + a_1P'(x) + a_2P''(x) + \ldots + a_nP^{(n)}(x)$$

имеет не больше мнимых корней (посчитанных с кратностями), чем $P(x)$.

▷ 3.74. Докажите, что если многочлен $Q(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ имеет только действительные корни, то многочлен

$$a_0 + \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!}x^n$$

тоже имеет только действительные корни.

Далее мы докажем, что вопрос о количестве корней многочлена с действительными коэффициентами на данном отрезке может быть решён в явном виде. Дадим следующее определение:

Определение 3.75. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — последовательность действительных чисел, не равных нулю. Тогда *количеством перемен знака* в ней будем называть количество пар (a_i, a_{i+1}) таких, что $a_ia_{i+1} < 0$.

Определение 3.76. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — последовательность действительных чисел, некоторые из которых равны нулю. Тогда *количеством перемен знака* в ней будем называть количество перемен знака в последовательности, получающейся из $(a_i)_{i=1}^n$ выкидыванием всех нулей.

▷ 3.77. Докажите, что количество положительных корней многочлена не превосходит количества перемен знака в последовательности его коэффициентов.

Чтобы алгоритмически решить вопрос о количестве корней многочлена $P(x)$ на интервале (a, b), дадим несколько определений. Будем считать, что многочлен $P(x)$ не имеет кратных корней или, равносильно, взаимно прост со своей производной.

Определение 3.78. *Последовательностью Штурма* многочлена $P(x)$ называется последовательность многочленов $f_k(x)$ ($k = 1, \ldots, m$), однозначно определяемых условиями:

$$f_1(x) = P(x), \quad f_2(x) = P'(x)$$
$$f_{k-2} = g_{k-1}(x)f_{k-1}(x) - f_k(x), \quad \deg f_k < \deg f_{k-1} \quad \deg f_m = 0.$$

Последовательность Штурма строится до тех пор, пока в качестве последнего многочлена $f_m(x)$ не будет получена константа. Легко проверить, что если многочлен не имел кратных корней, то в последовательности Штурма каждые два последовательных члена взаимно просты, это гарантирует, что последний многочлен будет ненулевой константой.

Определение 3.79. Для многочлена $P(x)$ определим функцию $S(x)$ как количество перемен знака в последовательности Штурма $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$.

Теорема 3.80 (Теорема Штурма)**.** *Пусть a и b не являются корнями $P(x)$. Тогда количество корней $P(x)$ на интервале (a, b) равно $S(a) - S(b)$.*

▷ 3.81. Докажите теорему Штурма, проследив изменение $S(x)$ при прохождении x через корень какого-то из многочленов $f_i(x)$.

3.5. **Дискретное дифференцирование.** Рассмотрим теперь некоторую операцию, напоминающую взятие производной многочлена. Эта операция помогает в работе с многочленами, принимающими в целых точках целые значения, кроме того она имеет приложения в перечислительной комбинаторике и в других разделах математики.

Определение 3.82. Операция Δ определяется следующей формулой:

$$\Delta P(x) = P(x+1) - P(x).$$

▷ 3.83. Докажите, что если $P(x)$ — многочлен степени n со старшим коэффициентом a, то $\Delta P(x)$ — многочлен степени $n-1$ со старшим коэффициентом na.

▷ 3.84. Докажите, что для любого многочлена $Q(x)$ найдётся многочлен $P(x)$ такой, что $Q(x) = \Delta P(x)$.

▷ 3.85. Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}.$$

▷ 3.86. Докажите, что

$$\Delta^n P(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k P(x+k).$$

▷ 3.87. Докажите, что при $d < n$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k k^d = 0$$

и

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k k^n = (-1)^n n!.$$

Определение 3.88. Обозначим

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}, \quad k > 0$$

$$\binom{x}{0} = 1.$$

▷ 3.89. Докажите, что $\binom{x}{k}$ — многочлен степени k, который принимает целые значения при целых x, при этом

$$\Delta\binom{x}{k} = \binom{x}{k-1}.$$

▷ 3.90. Докажите, что многочлен $P(x)$ степени n принимает целые значения при целых x тогда и только тогда, когда

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \binom{x}{k}, \quad a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}.$$

Для решения следующей задачи полезно заметить, что если функция $f(x)$ принимает целые значения в целых точках, то $\Delta f(x)$ тоже принимает целые значения в целых точках. Также полезно заметить, что если $\Delta^{n+1} f(x) \equiv 0$, то $f(x)$ — многочлен степени не более n.

† 3.91. Докажите, что если все значения многочлена $P(x)$ в целых точках являются k-й степенью целого числа, то $P(x)$ является k-й степенью другого многочлена.

Вот ещё несколько задач в духе дифференцирования и понижения степени:

▷ 3.92. Докажите, что существует выпуклый 30-угольник с равными углами и длинами сторон $1^2, 2^2, \ldots, 30^2$ в некотором порядке.

▷ 3.93. Как обобщить предыдущую задачу для n-угольника со сторонами $1^k, 2^k, \ldots, n^k$? Какие ограничения надо наложить на число n в зависимости от k?

▷ 3.94. Докажите, что множество чисел $1, 2, 3, \ldots, 2^{n+1}$ можно разбить на два множества A и B с равным числом элементов так, что суммы n-х степеней чисел множеств A и B равны.

▷ 3.95. Докажите, что для любого n отрезок $[0, 1]$ можно представить в виде объединения двух множеств A и B, не пересекающихся по внутренним точкам и являющихся объединениями конечного числа отрезков так, что для любого многочлена $f(x)$ степени n выполняется:

$$\int_A f(x)dx = \int_B f(x)dx.$$

4. Неравенства

В этом разделе приведены задачи, сгруппированные по основным методам решения неравенств.

4.1. **Использование производных.** Использование производных в неравенствах основано на следующем упражнении (следствие теоремы Лагранжа), которое позволяет свести доказательство неравенства между функциями к доказательству неравенства между их производными.

Упражнение 4.1. Докажите, что если для двух непрерывных на $[a, b]$ и дифференцируемых на (a, b) функций выполняется условие

$$f(a) = g(a), \quad \forall x \in (a, b)\ f'(x) \leqslant g'(x),$$

то

$$\forall x \in (a, b]\ f(x) \leqslant g(x),$$

и если первое неравенство строгое, то и второе строгое.

▷ 4.2. Докажите, что

$$\ln(1 + x) \leqslant x.$$

▷ 4.3. Что больше, e^π или π^e?

▷ 4.4. Докажите, что при $x \neq y > 0$

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x - y}{\ln x - \ln y} \leqslant \frac{x + y}{2}.$$

Число посередине называется средним логарифмическим чисел x и y.

▷ 4.5. Докажите неравенство Бернулли

$$(1 + x)^\alpha > 1 + \alpha x,$$

где $x \geqslant -1,\ x \neq 0$ и $\alpha > 1$.

4.2. **Неравенства Гёльдера и Минковского.** Далее все числа считаются неотрицательными, если не сказано иначе.

▷ 4.6. Докажите неравенство

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geqslant xy,$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Когда достигается равенство?

Подсказка: в предыдущей задаче можно считать y параметром и исследовать выражение на минимум с помощью производной.

▷ 4.7 (Неравенство Гёльдера). Используя предыдущую задачу, докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

При $p = q = 2$ это неравенство называется неравенством Коши-Буняковского.

Подсказка: неравенство Гёльдера однородное, в том смысле, что при умножении всех x_i на одно и то же положительное число оно переходит в равносильное, то же при умножении y_i.

▷ 4.8 (Неравенство Минковского). Докажите неравенство (через неравенство Гёльдера)

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Подсказка: обратите внимание, что для всякого набора неотрицательных $z_1, \dots, z_n$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)z_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} z_i^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} z_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

и подберите z_i так, чтобы оно превратилось в требуемое неравенство.

Определение 4.9. *Средним степенным* чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ степени s называется выражение

$$M_s(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^s\right)^{\frac{1}{s}}.$$

▷ 4.10. Докажите, что при $0 < s \leqslant t$

$$M_s(x_1, \dots, x_n) \leqslant M_t(x_1, \dots, x_n).$$

Подсказка: примените неравенство Гёльдера, для начала удобно рассмотреть случай $s = 1 < t$.

4.3. **Линейность и выпуклость.** Следующее утверждение про линейные функции тривиально, но позволяет решать другие нетривиальные задачи.

Теорема 4.11. *Линейная функция достигает на отрезке $[a, b]$ максимума и минимума на концах $[a, b]$.*

▷ 4.12. Пусть $a_1, \dots, a_n$ — фиксированные действительные числа. Как найти минимальное значение выражения

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

по всевозможным наборам $1 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant 0$?

▷ 4.13. Докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right),$$

где $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$.

Кроме линейных функций интересны также выпуклые функции:

Определение 4.14. Функция $f(x)$ называется *выпуклой* на отрезке $[a, b]$, если

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

при любых $x, y \in [a, b]$ и $0 < \alpha < 1$. Если неравенство строгое, то она называется *строго* выпуклой. Если всегда выполняется обратное неравенство, то $f(x)$ называется *вогнутой* (соответственно, *строго вогнутой*).

▷ 4.15 (Неравенство Йенсена). Докажите, что если $f(x)$ выпукла на отрезке $[a, b]$, то при любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$

$$f\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{1}^{n} x_i\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{1}^{n} f(x_i)\right).$$

Для строго выпуклой $f(x)$ равенство достигается лишь при равенстве всех x_i.

▷ 4.16. Докажите, что если для функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ при любых $x, y \in [a, b]$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right),$$

то при любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$

$$f\left(\frac{1}{n}\left(\sum_1^n x_i\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_1^n f(x_i)\right).$$

Если, кроме того, $f(x)$ непрерывна, то она выпукла.

† 4.17. Приведите пример функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которой верно неравенство Йенсена, но которая не является выпуклой.

▷ 4.18. Докажите, что если у $f(x)$, непрерывной на $[a, b]$, есть вторая производная на (a, b) и

$$f''(x) \geqslant 0, \quad x \in (a, b),$$

то $f(x)$ выпукла на $[a, b]$. Если

$$f''(x) > 0, \quad x \in (a, b),$$

то $f(x)$ строго выпукла на $[a, b]$.

Предыдущие задачи являются основными утверждениями, которые позволяют доказывать неравенства с помощью выпуклости.

▷ 4.19. С помощью выпуклости некоторой функции докажите неравенство между средним гармоническим и арифметическим:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

▷ 4.20. С помощью вогнутости функции $\ln x$ докажите неравенство между средним геометрическим и арифметическим

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

▷ 4.21. Решите задачу 4.10 с помощью выпуклости.

▷ 4.22. Докажите неравенство для $x_1, x_2, \dots, x_n \geqslant 1$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + x_i} \geqslant \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}$$

▷ 4.23. Положительная на отрезке функция называется *логарифмически выпуклой*, если её логарифм является выпуклой функцией, то есть

$$f(\alpha x + (1 - \alpha) y) \leqslant f(x)^\alpha \cdot f(y)^{1-\alpha}$$

при любых x, y на отрезке и $0 < \alpha < 1$. Докажите, что сумма логарифмически выпуклых функций является логарифмически выпуклой.

Заметим теперь ещё одно свойство выпуклых функций, аналогичное свойству линейной функции:

Теорема 4.24. *Выпуклая на отрезке $[a, b]$ функция достигает максимума на одном из его концов, а вогнутая достигает минимума на одном из концов отрезка.*

▷ 4.25. Докажите это утверждение.

▷ 4.26. Докажите, что для $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ $(a, b > 0)$ выполнено неравенство

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right) \leqslant \frac{(a+b)^2}{4ab} n^2.$$

4.4. **Мажорирование и соответствующие неравенства.**

Определение 4.27. Пусть есть две невозрастающие последовательности действительных чисел: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, у которых

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n.$$

Будем говорить, что $\mathbf{y}$ мажорирует $\mathbf{x}$ и писать $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{y}$, если для всех $k = 1, \ldots, n-1$ имеем:

$$\sum_{i=1}^{k} x_k \leqslant \sum_{i=1}^{k} y_i.$$

Замечание 4.28. Отношение $\preccurlyeq$ является отношением частичного порядка, то есть оно удовлетворяет следующим условиям:

(1) если $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \preccurlyeq \mathbf{x}$, то $\mathbf{x} = \mathbf{y}$;
(2) если $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \preccurlyeq \mathbf{z}$, то $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{z}$.

Вообще говоря, не каждые две последовательности сравнимы таким образом.

Определение 4.29. Симметрическая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (значение которой не меняется при перестановке x_i) называется *S-выпуклой* или *выпуклой по Шуру*, если

$$\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{y} \Longrightarrow f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{y}).$$

Аналогично можно ввести понятие строго S-выпуклой функции.

Доказательство S-выпуклости некоторой функции сводится к проверке некоторого свойства ее производных.

Определение 4.30. Для невозрастающей последовательности $\mathbf{x}$ определим операцию $t_{ij}^a(\mathbf{x})$ $(i < j,\ a > 0)$ следующим образом:

$$\mathbf{x}' = t_{ij}^a(\mathbf{x})$$

если

$$x_i' = x_i - a, \quad x_j' = x_j + a, \quad x_k' = x_k \quad \text{при} \quad k \neq i, j$$

и последовательность $\mathbf{x}'$ не возрастает. Если эта последовательность не является невозрастающей, то операция не определена.

▷ 4.31. Докажите, что

$$t_{ij}^a(\mathbf{x}) \preccurlyeq \mathbf{x}.$$

▷ 4.32. Докажите, что если $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{y}$, то $\mathbf{x}$ может быть получена из $\mathbf{y}$ с помощью последовательного применения операций t_{ij}^a при разных i, j и a.

Теорема 4.33. *Если симметрическая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условию*

$$(x_i - x_j)\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f - \frac{\partial}{\partial x_j} f\right) \geqslant 0, \quad \forall i, j,$$

то она S-выпукла. Если она удовлетворяет тому же условию со строгим неравенством при $x_i \neq x_j$, то она строго S-выпукла.

† 4.34. Докажите эту теорему.

▷ 4.35 (Неравенство Мюрхеда). Докажите, что при любых положительных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ функция

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)}^{x_1} a_{\sigma(2)}^{x_2} \ldots a_{\sigma(n)}^{x_n}$$

S-выпукла. При этом, если не все a_i равны между собой, то она строго S-выпукла.

▷ 4.36. Докажите, что элементарные симметрические функции $\sigma_1 = \sum_i x_i$, $\sigma_2 = \sum_{i<j} x_i x_j$, $\dots$, $\sigma_n = x_1 x_2 \dots x_n$ являются S-вогнутыми.

▷ 4.37. Докажите, что если $f(x)$ — выпуклая функция одной переменной, то функция n переменных $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$ S-выпукла.

▷ 4.38. Докажите неравенство для сторон треугольника a, b, c

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

▷ 4.39. Докажите, что если $abc = 1$, то

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$

▷ 4.40. Пусть $f(x)$ — выпуклая функция и $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_{2n-1} \geqslant 0$. Докажите, что

$$f(a_1) - f(a_2) + f(a_3) - \dots + f(a_{2n-1}) \geqslant f(a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_{2n-1}).$$

▷ 4.41. Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_n \geqslant 0$. Докажите, что

$$\frac{a_1+a_2}{2} \cdot \frac{a_2+a_3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n+a_1}{2} \leqslant \frac{a_1+a_2+a_3}{3} \cdot \frac{a_2+a_3+a_4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n+a_1+a_2}{3}.$$

▷ 4.42. Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_n \geqslant 0$. Докажите, что

$$\sqrt{\frac{a_1+a_2}{2}}+\sqrt{\frac{a_2+a_3}{2}}+\dots+\sqrt{\frac{a_n+a_1}{2}} \leqslant \sqrt{\frac{a_1+a_2+a_3}{3}}+\sqrt{\frac{a_2+a_3+a_4}{3}}+\dots+\sqrt{\frac{a_n+a_1+a_2}{3}}.$$

4.5. **Оценки сумм.** Перейдём к неравенствам, в которых фигурируют суммы вида $\sum_1^n f(k)$, где $f(x)$ — некоторая функция.

Теорема 4.43. *Если функция $f(x)$ убывает при действительных $x \in [1; n]$, то имеют место неравенства*

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geqslant \int_1^n f(x)dx$$
$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant \int_1^n f(x)dx.$$

▷ 4.44. Докажите эту теорему.

▷ 4.45. С помощью теоремы 4.43 оцените сверху и снизу сумму

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

▷ 4.46. С помощью теоремы 4.43 оцените сверху и снизу сумму

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

▷ 4.47. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

4.6. **Разные задачи.**

▷ 4.48. Докажите неравенство
$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\geqslant\frac{3}{2}.$$

▷ 4.49. Докажите неравенство для $x_1,\dots,x_n\in[0;1]$
$$(1+x_1+\ldots+x_n)^2\geqslant 4(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2).$$

▷ 4.50. Докажите неравенство
$$a^3+b^3+c^3+3abc\geqslant ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c).$$

▷ 4.51. Докажите неравенство
$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant\frac{1}{3}(a+b+c).$$

▷ 4.52. Докажите неравенство для $a,b,c\in[0;1]$
$$\frac{a}{1+b+c}+\frac{b}{1+a+c}+\frac{c}{1+a+b}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1.$$

▷ 4.53. Докажите неравенство для $x_1,x_2,\dots,x_n\in[0;2]$
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|x_i-x_j|\leqslant n^2.$$

▷ 4.54. Докажите неравенство
$$\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}\leqslant\sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}.$$

▷ 4.55. Сформулируйте аналог предыдущего неравенства для произвольной пары элементарных симметрических функций $\sigma_k(x_1,\dots,x_n)$ и $\sigma_l(x_1,\dots,x_n)$ и докажите его. Воспользуйтесь теоремой Виета и взятием производной многочлена.

▷ 4.56. Пусть все корни многочлена $c_nx^n+\dots+c_1x+c_0$ вещественны, обозначим $b_k=c_k/\binom{n}{k}$ для $k=0,\dots,n$. Докажите, что
$$b_k^2\geqslant b_{k-1}b_{k+1}.$$
Как свести это утверждение к случаю квадратного трёхчлена?

† 4.57. Докажите неравенство
$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{a_1\ldots a_k}\leqslant e\sum_{k=1}^{n}a_k,$$
где e — основание натуральных логарифмов.

5. Графы и конечные множества

5.1. **Определения и простейшие свойства.**

Определение 5.1. *Графом* называется набор вершин V, набор рёбер E и соответствие, которое каждому ребру ставит в соответствие две вершины, которые мы будем называть *концами* ребра. Вершины, соединённые ребром, называются *смежными*. Граф называется простым, если нет рёбер с двумя концами в одной и той же вершине и каждые две вершины соединены не более чем одним ребром.

В дальнейшем, если не оговорено противное, графы будут считаться простыми.

Определение 5.2. *Ориентированным графом* называется набор вершин V, набор рёбер E и соответствие, которое каждому ребру ставит в соответствие две вершины, которые мы будем называть *начало* и *конец* ребра.

Определение 5.3. Граф $G_1 = (V_1, E_1)$ называется *подграфом* графа $G_2 = (V_2, E_2)$, если множество вершин V_1 является подмножеством V_2, множество рёбер E_1 является подмножеством E_2 и соответствия между рёбрами и вершинами согласованы.

Определение 5.4. Для графа $G = (V, E)$ и непустого подмножества $W \subseteq V$ можно рассмотреть граф $G[W]$ на вершинах W, рёбрами которого являются те ребра G, начало и конец которых лежат в W. Такой граф называется *индуцированным подграфом* на множестве W.

Определение 5.5. *Путём* в (ориентированном) графе называется последовательность вершин, соседние элементы которой соединены рёбрами (в случае ориентированного графа — рёбрами соответствующего направления). *Циклом* называется путь, в котором конец соединён с началом. Цикл или путь называются *простыми*, если они не содержат повторяющихся вершин.

Определение 5.6. Будем говорить, что из вершины a можно пройти в вершину b, если существует путь с началом в a и концом в b.

Определение 5.7. Граф (ориентированный граф) называется *связным*, если из каждой вершины можно пройти в любую другую.

Очевидно, что отношение «из a можно пройти в b» транзитивно, то есть если из a можно пройти в b и из b можно пройти в c, то из a можно пройти в c.

Упражнение 5.8. Докажите, что множество вершин графа V можно разбить на множества $V_1, V_2, \dots, V_k$ так, что из одной вершины можно пройти в другую тогда и только тогда, когда они принадлежат одному и тому же V_i. В этом случае графы $G[V_i]$ являются связными и называются *компонентами связности* графа G.

Определение 5.9. Граф на n вершинах, у которого все пары вершин соединены ребром, называется *полным* и обозначается K_n.

Определение 5.10. Граф $G = (V, E)$ называется *двудольным*, если множество вершин V распадается на два множества (доли) A и B так, что все рёбра соединяют вершины из двух разных долей. Двудольный граф, в котором все вершины A соединены со всеми вершинами B называется *полным двудольным графом*, если $|A| = m$ и $|B| = l$, то такой граф обозначается $K_{m,l}$.

Далее двудольный граф $G = (V, E)$ с долями $V = A \cup B$ будем обозначать $G = (A \cup B, E)$.

5.2. **Деревья.**

Определение 5.11. Связный граф без циклов называется *деревом.*

▷ 5.12. Докажите, что у всякого связного графа существует подграф, являющийся деревом на тех же вершинах. Такое дерево называется *остовным деревом.*

▷ 5.13. Докажите, что у каждого дерева с более чем одной вершиной есть вершина, соединённая только с одной вершиной. Такая вершина называется *висячей.* Докажите, что на самом деле висячих вершин у дерева с более чем одной вершиной не менее двух.

▷ 5.14. Докажите, что в связном графе $G = (V, E)$ найдётся вершина v такая, что граф $G[V \setminus \{v\}]$ связен.

▷ 5.15. Докажите, что если в связном графе $G = (V, E)$ нет висячих вершин, то найдётся пара смежных вершин a и b такие, что граф $G[V \setminus \{a, b\}]$ связен.

5.3. **Степени вершин и счёт в графах.**

Определение 5.16. Количество элементов в конечном множестве X обозначим $|X|$.

▷ 5.17. Докажите, что в любом дереве $|E| = |V| - 1$, а в любом связном графе $|E| \geqslant |V| - 1$.

Определение 5.18. Степенью вершины v графа называется количество рёбер, выходящих из этой вершины. Будем обозначать степень $\deg v$.

▷ 5.19. Докажите формулу для графа $G = (V, E)$

$$2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} \deg v.$$

▷ 5.20. Докажите, что количество вершин нечётной степени в любом графе (и даже в любой компоненте связности) чётно.

▷ 5.21. Докажите, что количество треугольников (то есть троек вершин, попарно соединённых рёбрами) в графе не более $1/3 \sum_{v \in V} C^2_{\deg v}$.

▷ 5.22. Пусть $k > 0$ — действительное число. Докажите, что если в двудольном графе $G = (A \cup B, E)$ для любой вершины $b \in B$ $\deg b > 0$ и для любых двух соединённых вершин $a \in A, b \in B$ $\deg b \geqslant k \deg a$, то $|A| \geqslant k|B|$.

5.4. **Обходы графов по вершинам и рёбрам.**

Определение 5.23. *Обход графа по вершинам* — это путь, содержащий все вершины по одному разу, *обход графа по рёбрам* — это путь, содержащий все рёбра по одному разу. Замкнутый обход по вершинам называется *гамильтоновым циклом.*

▷ 5.24. Докажите, что обход связного графа по рёбрам существует тогда и только тогда, когда в графе либо ни одной, либо две вершины имеют нечётную степень.

▷ 5.25. Докажите, что связный ориентированный граф допускает замкнутый обход по рёбрам тогда и только тогда, когда в каждой вершине количество входящих и выходящих рёбер равны.

▷ 5.26. Докажите, что из букв алфавита $a_1, a_2, \ldots, a_k$ можно составить строку длины $k^n + n - 1$ так, что в этой строке встретится (как отрезок) любое слово длины n из данного алфавита.

▷ 5.27. Докажите, что если в графе на $n \geqslant 3$ вершинах степень каждой вершины не менее $n/2$, то в нем существует гамильтонов цикл.

▷ 5.28. Докажите, что если в графе на $n \geqslant 3$ вершинах сумма степеней любой пары несмежных вершин не менее n, то в нём существует гамильтонов цикл.

▷ 5.29. Докажите, что если в связном ориентированном графе каждые две вершины соединены ребром в некотором направлении, то в этом графе существует гамильтонов цикл.

5.5. **Раскраски графов.**

Определение 5.30. Сопоставление каждой вершине графа некоторого цвета называется *вершинной раскраской* графа. Сопоставление каждому ребру графа цвета называется *рёберной раскраской* графа. Вершинная раскраска называется *правильной*, если концы каждого ребра окрашены в разные цвета, рёберная раскраска называется *правильной*, если из каждой вершины выходят ребра попарно различных цветов.

Заметим, что граф двудольный тогда и только тогда, когда он допускает правильную раскраску в два цвета.

▷ 5.31. Докажите, что всякое дерево является двудольным графом.

▷ 5.32. Докажите, граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его циклы имеют чётную длину.

Определение 5.33. Хроматическим числом графа G (обозначается $\chi(G)$) называется минимальное количество цветов, необходимых для правильной вершинной раскраски графа.

Упражнение 5.34. Докажите, что если в графе G есть цикл нечётной длины, то $\chi(G) \geqslant 3$.

▷ 5.35. Докажите, что если в графе G любые два цикла нечётной длины имеют общую вершину, то $\chi(G) \leqslant 5$.

▷ 5.36. Докажите, что если в графе G любые два цикла нечётной длины имеют общую вершину и нет циклов длины 3, то $\chi(G) \leqslant 4$.

▷ 5.37. Докажите, что если степень каждой вершины графа G не более d, то $\chi(G) \leqslant d+1$.

▷ 5.38. Докажите, что если в графе G менее $\dfrac{d(d+1)}{2}$ рёбер, то $\chi(G) \leqslant d$.

▷ 5.39. Докажите, что если в ориентированном графе G из каждой вершины выходит не более k рёбер, то $\chi(G) \leqslant 2k+1$.

▷ 5.40. Докажите, что если в ориентированном графе из каждой вершины выходит не более двух рёбер, то его вершины можно раскрасить в 1014 цветов так, что для любых двух цветов A и B в графе не найдётся одновременно рёбер с цветами AB и BA.

† 5.41. Докажите, что если степень каждой вершины графа G не более d, и граф не содержит подграфов K_{d+1}, то $\chi(G) \leqslant d$.

▷ 5.42. Приведите пример плоского графа, для которого $\chi(G) = 4$.

▷ 5.43. Докажите, что для плоского (который можно нарисовать на плоскости без пересечений рёбер) графа G $\chi(G) \leqslant 6$. Используйте формулу Эйлера 6.8.

▷ 5.44. Докажите, что для плоского графа G $\chi(G) \leqslant 5$.

Определение 5.45. Подмножество W множества вершин графа $G = (V, E)$ называется *доминирующим*, если всякая вершина из $V \setminus W$ соединена с некоторой вершиной W.

▷ 5.46. Пусть в графе $G = (V, E)$ степень каждой вершины не менее 1 и нет вершин степени $|V| - 1$. Докажите, что если в любом доминирующем множестве G не менее n вершин, то $\chi(G) \leqslant |V| - n$.

▷ 5.47. Рёбра графа G раскрашены в k цветов так, что любые два ребра одного цвета имеют общую вершину. Докажите, что $\chi(G) \leqslant k+2$.

5.6. **Теоремы типа Рамсея.**

$\triangleright$ 5.48. Докажите, что если рёбра K_6 покрашены в два цвета, то в нём найдётся одноцветный треугольник.

$\triangleright$ 5.49. Докажите, что если рёбра K_6 покрашены в два цвета, то в нём найдутся два одноцветных треугольника.

$\triangleright$ 5.50. Докажите, что если рёбра K_n раскрашены в два цвета, то в нём найдётся не менее t_n одноцветных треугольников, где

$$t_{2k} = \frac{k(k-1)(k-2)}{3}, \quad t_{2k+1} = \frac{k(2k+1)(k-2)}{6}.$$

$\triangleright$ 5.51. Определите, при каких n в неравенствах из предыдущей задачи может выполняться равенство.

$\triangleright$ 5.52. Докажите, что если рёбра K_9 покрашены в синий и красный цвета, то либо в нём найдётся синий треугольник, либо красный подграф вида K_4.

$\triangleright$ 5.53. Докажите, что для всякого натурального n найдётся натуральное $N = N(n)$ такое, что для всякой рёберной раскраски K_N в два цвета найдётся одноцветный подграф вида K_n. Напишите функцию $N(n)$ в явном виде, так чтобы получилось $N(n) \leqslant 4^n$.

$\triangleright$ 5.54. Докажите, что для всякого натурального n и натурального k найдётся натуральное $N = N(n, k)$ такое, что для всякой рёберной раскраски K_N в k цветов найдётся одноцветный подграф вида K_n.

$\triangleright$ 5.55. Докажите, в последовательности из $n^2 + 1$ различных чисел найдётся монотонная подпоследовательность из $n + 1$-го элемента.

$\triangleright$ 5.56. Докажите, что в ориентированном графе без циклов на n^2+1 вершинах либо найдутся $n + 1$ вершин, таких что ни из какой из них нельзя пройти в другую, либо найдутся $n + 1$ вершин, таких что существует путь, проходящий через все эти вершины.

$\triangleright$ 5.57. Пусть $k \geqslant \ell > 0$ и рёбра графа $K_{2k+\ell-1}$ раскрашены в красный и синий цвет. Докажите, что в нём либо найдутся k попарно непересекающихся красных рёбер, либо ℓ попарно непересекающихся синих. Докажите, что число $2k + \ell - 1$ в этой задаче нельзя уменьшить.

$\triangleright$ 5.58. Докажите, что для всякого $\alpha > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ найдётся такое $N = N(k, \alpha)$, что во всяком графе с N вершинами и не менее αC_N^2 рёбрами найдётся подграф вида $K_{k,k}$.

† 5.59 (Теорема Ван-дер-Вардена). Докажите, для любых натуральных k и n найдётся такое $N = N(k, n)$, что при любой раскраске натуральных чисел от 1 до N в k цветов среди них найдётся одноцветная арифметическая прогрессия длины n.

5.7. **Системы конечных множеств.**

$\triangleright$ 5.60 (Теорема Хелли для конечных множеств). Пусть дано семейство конечных множеств, в каждом из которых не более d элементов. Докажите, что эти множества имеют общий элемент, если каждые $d + 1$ или менее из них имеют общий элемент.

$\triangleright$ 5.61 (Сильная теорема Хелли для конечных множеств). Пусть дано семейство конечных множеств $\mathcal{F}$, в каждом из которых не более d элементов. Докажите, что найдётся подсемейство $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ из не более $d + 1$ множества, такое что $\bigcap G = \bigcap F$ (то есть пересечения семейств совпадают). Докажите, что если пересечение $\bigcap F$ не пусто, то можно обойтись $\mathcal{G}$ из не более d элементов.

$\triangleright$ 5.62. Дано семейство конечных множеств $\mathcal{F}$, причём каждое множество семейства состоит из $2n$ элементов. Известно, что для всякого подсемейства $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ если $|\bigcup \mathcal{G}| \leqslant (n+1)^2$ (имеется в виду размер объединения семейства), то $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$. Докажите, что $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

$\triangleright$ 5.63 (Цветная теорема Хелли для конечных множеств). Пусть $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_{d+1}$ — семейства конечных множеств и для любого $X \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \dots \cup \mathcal{F}_{d+1}$ $|X| \leqslant d$. Пусть также для всякого набора $X_1 \in \mathcal{F}_1$, $X_2 \in \mathcal{F}_2$,..., $X_{d+1} \in \mathcal{F}_{d+1}$ пересечение $X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_{d+1}$ не пусто. Докажите, что для некоторого i пересечение всех множеств семейства $\mathcal{F}_i$ непусто.

$\triangleright$ 5.64. В множестве из n элементов рассматривается семейство различных непустых подмножеств $\mathcal{F}$ такое, что для любых двух $U, V \in \mathcal{F}$ либо $U \cap V = \emptyset$, либо $U \supseteq V$, либо $U \subseteq V$. Докажите, что $|\mathcal{F}| \leqslant 2n - 1$.

$\triangleright$ 5.65 (Теорема Шпернера). В множестве из n элементов рассматривается семейство подмножеств $\mathcal{F}$ такое, что для любых двух $U, V \in \mathcal{F}$ выполняется $U \not\subseteq V$ и $V \not\subseteq U$. Докажите, что $|\mathcal{F}| \leqslant C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

$\triangleright$ 5.66 (Обобщённая теорема Шпернера). В условиях предыдущей задачи пусть x_k — количество множеств в $\mathcal{F}$, размер которых равен k. Докажите, что

$$\frac{x_0}{C_n^0} + \frac{x_1}{C_n^1} + \dots + \frac{x_k}{C_n^k} + \dots + \frac{x_n}{C_n^n} \leqslant 1.$$

$\triangleright$ 5.67. Дано семейство конечных множеств $\mathcal{F}$, $|\mathcal{F}| = m$, для любого $U \in \mathcal{F}$ $|U| = k$ и для любых двух различных $U, V \in \mathcal{F}$ $|U \cap V| = 1$. Докажите, что если $m > k^2 - k + 1$, то все множества $\mathcal{F}$ имеют общий элемент. Докажите, что если $k-1$ простое, то найдётся семейство из $k^2 - k + 1$ множеств, удовлетворяющих условию задачи и не имеющих общего элемента.

5.8. **Лемма Холла.**

$\triangleright$ 5.68 (Лемма Холла). Пусть в двудольном графе на вершинах $A \cup B$ для каждого подмножества $A' \subseteq A$ множество вершин в B, соединённых хотя бы с одной вершиной из A', состоит из не менее $|A'|$ элементов. Тогда всем вершинам из A можно сопоставить различные вершины из B так, что каждая сопоставленная пара соединена ребром.

$\triangleright$ 5.69. Пусть в двудольном графе на вершинах $A \cup B$ степень всех вершин равна k. Докажите, что существует правильная раскраска рёбер графа в k цветов.

$\triangleright$ 5.70. Пусть дано конечное семейство конечных множеств $\mathcal{F}$ и каждому множеству $X \in \mathcal{F}$ сопоставлено натуральное число $a(X)$ со следующим свойством: для всякого непустого подсемейства $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$

$$\left|\bigcup_{X \in \mathcal{G}} X\right| \geqslant \sum_{X \in \mathcal{G}} a(X).$$

Докажите, что можно одновременно для каждого множества $X \in \mathcal{F}$ выбрать подмножество $Y_X \subseteq X$, для которого $|Y_X| = a(X)$ так, что все множества $\{Y_X : X \in \mathcal{F}\}$ попарно не пересекаются.

$\triangleright$ 5.71. Пусть в таблице $n \times n$ записаны неотрицательные числа и суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце равны 1. Докажите, что можно выбрать n клеток таблицы, из которых никакие две не стоят в одном и том же столбце и в одной и той же строке, и при этом в каждой выбранной клетке число будет положительным.

$\triangleright$ 5.72. Докажите, что в условиях предыдущей задачи можно выбрать n клеток таблицы, из которых никакие две не стоят в одном и том же столбце и в одной и той же строке, так что в каждой выбранной клетке будет число не менее α_n. Значения α_n определяются формулой

$$\alpha_{2k} = \frac{1}{k^2 + k},\ \alpha_{2k-1} = \frac{1}{k^2}.$$

Докажите, что числа α_n в формулировке этой задачи нельзя увеличить.

$\triangleright$ 5.73. Пусть дано натуральное число $\ell \geqslant 2$ и натуральные числа $k < n$. Пусть в графе G степень каждой вершины находится в интервале $[n, \ell n]$. Докажите, что у G найдётся подграф H на тех же вершинах такой, что его степени вершин лежат в интервале $[k, \ell k]$.

$\triangleright$ 5.74. Пусть даны натуральные числа $a < b$, $k < n$ и выполняется $k \geqslant a/(b-a)$. Пусть в графе G степень каждой вершины находится в интервале $[an, bn]$. Докажите, что у G найдётся подграф H на тех же вершинах такой, что его степени вершин лежат в интервале $[ak, bk]$.

$\triangleright$ 5.75. Пусть в двудольном графе $G = (A \cup B, E)$ $|A| = |B| = n$, причём для любой $a \in A \cup B$ $\deg a > n/2$. Докажите, что в G существует гамильтонов цикл.

$\triangleright$ 5.76. Дано натуральное число n. Найдите минимальное k, для которого найдётся k перестановок множества из n элементов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ таких, что для любой перестановки множества из n элементов σ найдутся $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ такие, что

$$\sigma(i) = \sigma_j(i).$$

5.9. **Разные задачи.**

$\triangleright$ 5.77. Пусть в связном графе $G = (V, E)$ даны две вершины a и b и для любой $v \in V \setminus \{a, b\}$ можно пройти из a в b, не проходя через v. Докажите, что найдутся два пути из a в b, не имеющие общих вершин, кроме a и b.

$\triangleright$ 5.78. Докажите, что если в графе степень каждой вершины не менее 3, то в этом графе существует цикл, длина которого не делится на 3.

6. Комбинаторная геометрия

Задачи этого раздела решаются разнообразными методами. Далее идут разделы, посвящённые конкретным идеям, а в конце идут несортированные задачи.

6.1. **Многоугольники, счёт углов и формула Эйлера.**

Центральное утверждение, которое нам понадобится (для случая ломаных) — это лемма Жордана:

Теорема 6.1 (Лемма Жордана). *Непрерывная замкнутая кривая на плоскости, не имеющая самопересечений, разбивает плоскость на две части.*

Здесь «разбивает плоскость» означает, что те точки плоскости, которые не принадлежат кривой, распадаются на два множества: I и E так, что всякие две точки в I можно соединить ломаной, не пересекающей исходную кривую, и всякие две точки в E можно соединить ломаной, не пересекающей исходную кривую. При этом нельзя соединить точку из I и точку из E ломаной, не пересекающей исходную кривую.

▷ 6.2. Докажите, что если на плоскости нарисованы две ломаные так, что вершины одной не лежат на отрезках другой, то они пересекаются чётное число раз (если правильно считать).

▷ 6.3. Докажите лемму Жордана для случая, когда кривая является ломаной.

† 6.4. Докажите лемму Жордана в общем случае.

Теперь перейдём к простым утверждениям. Хотя они и простые, их строгое обоснование требует использования леммы Жордана (для ломаных).

Упражнение 6.5. Докажите, что от любого многоугольника (возможно, невыпуклого) с более чем тремя вершинами можно отрезать треугольник по отрезку, соединяющему две его вершины. Для начала можно доказать, что от многоугольник можно разрезать на два многоугольника таким разрезом.

При решении этого упражнения полезно также поразмышлять над тем, что такое *многоугольник на плоскости* по определению.

Упражнение 6.6. Докажите, что сумма внутренних углов n-угольника равна

$$\pi(n-2).$$

Эти факты позволяют с помощью счета углов решить следующую задачу:

▷ 6.7. Внутри квадрата даны N точек. После чего пары точек (включая вершины квадрата) соединяются отрезками, не пересекающимися друг с другом, до тех пор, пока это возможно. Найти количество полученных отрезков и доказать, что оно не зависит от того, какие отрезки проведены.

Сформулируем основное утверждение про плоские графы:

Теорема 6.8 (Формула Эйлера). *Для связного графа, нарисованного ломаными на плоскости так, что его рёбра не имеют самопересечений и не пересекаются нигде, кроме как по вершинам, выполняется формула:*

$$B - P + \Gamma = 2,$$

где В — число вершин графа, Р — число рёбер и Г — число областей, на которые граф разбивает плоскость линиями своих рёбер.

▷ 6.9. Докажите формулу Эйлера для связного плоского графа, ребра которого являются ломаными, с помощью счета углов.

▷ 6.10. Докажите формулу Эйлера индукцией по числу рёбер, применяя лемму Жордана.

В следующих задачах нужно применить формулу Эйлера или счёт углов.

$\triangleright$ 6.11. Докажите, что для всякого плоского графа есть вершина степени не более 5. Может ли такая вершина быть только одна?

$\triangleright$ 6.12. Сколько вершин степени 5 у плоского графа, у которого степени вершин равны либо 5, либо 6?

$\triangleright$ 6.13. Докажите, что полный граф на пяти вершинах K_5 не является плоским.

$\triangleright$ 6.14. Докажите, что полный двудольный граф на шести вершинах $K_{3,3}$ не является плоским.

$\triangleright$ 6.15. Пусть даны некоторые числа $D, A > 0$. Докажите, что плоскость нельзя разрезать на выпуклые семиугольники, диаметр каждого из которых не превосходит D, а площадь каждого не меньше A.

$\triangleright$ 6.16. Пусть даны некоторые числа $D, A > 0$. Докажите, что плоскость нельзя разрезать на выпуклые семиугольники, диаметр каждого из которых не превосходит D, а площадь каждого не меньше A.

$\triangleright$ 6.17. Докажите, что если снять одно из ограничений на диаметр или на площадь, то разрезать можно.

$\triangleright$ 6.18. Докажите, что если квадрат разрезан на треугольники, то какие-то два из них имеют целую общую сторону.

$\triangleright$ 6.19. Докажите, что выпуклый n-угольник нельзя разрезать менее чем на $n-2$ треугольника.

$\triangleright$ 6.20. Докажите, что выпуклый многогранник с n вершинами нельзя разрезать менее чем на $n-3$ тетраэдра.

6.2. **Множества точек и прямых на плоскости.**

Определение 6.21. Множество точек на плоскости находится в общем положении, если никакие три из них не лежат на одной прямой. Множество прямых на плоскости находится в общем положении, если никакие три из них не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны.

Довольно полезным является следующее простое утверждение:

Упражнение 6.22. Любые n прямых общего положения пересекаются в $\frac{n(n-1)}{2}$ точках и делят плоскость на $\frac{n(n+1)}{2}+1$ частей.

$\triangleright$ 6.23. Можно ли расположить на плоскости 8 точек так, что для любой нумерации этих точек найдётся некоторая точка X на плоскости такая, что из неё эти 8 точек видны именно в порядке данной нумерации, если смотреть из точки X на первую по нумерации точку и далее поворачиваться по часовой стрелке?

$\triangleright$ 6.24. На плоскости расположены n прямых общего положения. Мы хотим выбрать ориентацию на каждой прямой с выполнением следующего условия: если занумеровать на каждой прямой её точки пересечения с другими прямыми вдоль её ориентации, то ни в какой точке пересечения пары прямых не окажутся два одинаковых числа. При каких n это можно сделать?

$\triangleright$ 6.25. n прямых общего положения делят плоскость на части. Докажите, что можно расставить в этих частях целые ненулевые числа, по модулю не превосходящие n так, что с каждой стороны от каждой исходной прямой сумма чисел равна нулю.

Следующая задача называется задачей Сильвестра:

▷ 6.26. Докажите, что если конечное множество точек на плоскости не лежит на одной прямой, то существует прямая, проходящая ровно через две из точек этого множества.

Следующие задачи используют задачу Сильвестра или рассуждения, содержащиеся в ее доказательстве. Также бывает полезна следующая теорема:

Теорема 6.27. *Возьмём на плоскости некоторую окружность и сопоставим каждой точке ее полярную прямую, а каждой прямой ее полярную точку. Таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками и прямыми проективной плоскости. При этом отношение «точка лежит на прямой» переходит в отношение «прямая содержит точку».*

▷ 6.28. На плоскости дано конечное множество прямых. Докажите, что либо они все проходят через одну точку, либо все они параллельны, либо есть точка, через которую проходят только две из них.

Предыдущую задачу полезно решить как с помощью полярного преобразования, так и непосредственными рассуждениями с прямыми.

▷ 6.29. На плоскости расположено конечное число красных и синих прямых, среди которых нет параллельных, так, что через любую точку пересечения прямых одного цвета проходит прямая другого цвета. Докажите, что все прямые проходят через одну точку.

▷ 6.30. На плоскости даны n точек, не лежащих на одной прямой, и проведены всевозможные прямые через все пары данных точек. Докажите, что получилось не менее n прямых.

▷ 6.31. На плоскости взяты некоторые 7 точек (не обязательно общего положения). Через все пары этих точек проводятся прямые. Какое количество различных прямых могло получиться?

Далее идут разные задачи про расположения точек на плоскости.

▷ 6.32. Конечное множество точек общего положения на плоскости обладает следующим свойством: вместе с любыми тремя точками оно содержит ортоцентр образованного ими треугольника. Какое максимальное количество точек может быть в таком множестве?

▷ 6.33. Три треугольника имеют общую точку O. Докажите, что можно выбрать по одной точке из вершин каждого треугольника так, что полученный треугольник (возможно, вырожденный) будет содержать точку O.

▷ 6.34. В пространстве даны три тетраэдра, каждый из которых содержит точку O, и ещё дана точка X. Докажите, что можно выбрать по одной вершине у каждого из тетраэдров так, что вместе с точкой X эти четыре точки дадут тетраэдр (возможно, вырожденный), содержащий точку O.

▷ 6.35. На плоскости дано n красных и n синих точек в общем положении. Докажите, что все точки можно разбить на разноцветные пары так, что отрезки, соответствующие парам, попарно не пересекаются.

▷ 6.36. На прямой дано n красных и n синих точек. Докажите, что все точки можно разбить на разноцветные пары так, что все отрезки, соответствующие парам, имеют общую точку.

▷ 6.37. На плоскости дано 3 красных, 3 синих и 3 зелёных точки. Докажите, что все точки можно разбить на трёхцветные тройки так, что все треугольники, соответствующие тройкам, имеют общую точку.

† 6.38. На плоскости дано n красных, n синих и n зелёных точек. Докажите, что все точки можно разбить на трёхцветные тройки так, что все треугольники, соответствующие тройкам, имеют общую точку.

6.3. **Выпуклые многоугольники.**

▷ 6.39. Докажите, что выпуклый многоугольник можно разрезать на параллелограммы тогда и только тогда, когда он является центрально симметричным.

▷ 6.40. Докажите, что если выпуклый многоугольник разрезан на параллелограммы, то один из этих параллелограммов имеет как минимум две стороны, лежащие на границе многоугольника.

▷ 6.41. Пусть $A_1A_2\dots A_n$ — выпуклый n-угольник, никакие две стороны которого не параллельны. Для каждой стороны A_iA_{i+1} (считаем $A_{n+1}=A_1$) найдём максимально удалённую от прямой A_iA_{i+1} вершину A_k и обозначим треугольник, образованный этими стороной и вершиной T_i. Докажите, что треугольники T_i $(i=1,\dots,n)$ покрывают весь исходный многоугольник.

▷ 6.42. Пусть $A_1A_2\dots A_n$ — выпуклый n-угольник, никакие две стороны которого не параллельны. Для каждой стороны A_iA_{i+1} (считаем $A_{n+1}=A_1$) найдём максимально удалённую от прямой A_iA_{i+1} вершину A_k и рассмотрим сумму всех возможных таких углов $\angle A_iA_kA_{i+1}$. Докажите, что эта сумма равна π.

В предыдущих двух задачах полезно использовать следующее понятие:

Определение 6.43. *Аффинным диаметром* выпуклого многоугольника M называется такой отрезок, содержащийся в M, что в M не существует параллельного ему отрезка большей длины.

▷ 6.44. Докажите, что отрезок AB является аффинным диаметром M тогда и только тогда, когда его концы лежат на границе M и M можно заключить в полосу, содержащую точки A и B на своих противоположных краях.

▷ 6.45. Докажите, что задачи 6.41 и 6.42 следуют из таких утверждений: для каждого многоугольника M существует аффинный диаметр, параллельный всякой наперёд заданной прямой; для каждого многоугольника M существует аффинный диаметр, проходящий через заданную точку в M. Докажите эти утверждения.

▷ 6.46. Докажите, что для каждого многоугольника M существует аффинный диаметр, проходящий через заданную точку вне M.

Для решения некоторых задач про выпуклые многоугольники бывает полезно векторы, равные векторам сторон многоугольника, отложить от начала координат.

▷ 6.47. Пусть $A_1A_2\dots A_n$ — выпуклый n-угольник, все стороны которого равны между собой. Докажите, что найдутся как минимум два таких $k=1,\dots,n$, что

$$\angle A_{k-1}A_kA_{k+1}\geqslant\angle A_{k-2}A_{k-1}A_k\quad \angle A_{k-1}A_kA_{k+1}\geqslant\angle A_kA_{k+1}A_{k+2},$$

где $A_{-1}=A_{n-1}$, $A_0=A_n$, $A_{n+1}=A_1$ и $A_{n+2}=A_2$.

▷ 6.48. Пусть $A_1A_2\dots A_n$ — выпуклый n-угольник, все углы которого равны между собой. Докажите, что найдутся как минимум два таких $k=1,\dots,n$, что

$$|A_kA_{k+1}|\geqslant|A_{k-1}A_k|\quad |A_kA_{k+1}|\geqslant|A_{k+1}A_{k+2}|,$$

где $A_{-1}=A_{n-1}$, $A_0=A_n$, $A_{n+1}=A_1$ и $A_{n+2}=A_2$.

Введём определение:

Определение 6.49. Суммой Минковского множеств A и B на плоскости называется множество

$$A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}.$$

Определение 6.50. Положим для множества A на плоскости
$$-A = \{-a : a \in A\}.$$

Упражнение 6.51. Докажите, что сумма Минковского многоугольников — тоже многоугольник.

▷ 6.52. Если на сторонах многоугольников A и B расставили векторы против часовой стрелки и получились попарно несонаправленные векторы, и то же самое проделали с $A + B$, то множество векторов сторон $A + B$ есть объединение множеств векторов A и B. Если среди векторов сторон A и B были сонаправленные, то аналогичное утверждение будет верно, если добавить к вершинам $A + B$ несколько фиктивных вершин с углом π.

Будет обозначать $p(M), s(M), d(M)$ периметр, площадь и диаметр многоугольника M соответственно.

▷ 6.53. Докажите, что $d(A + B) \leqslant d(A) + d(B)$.

▷ 6.54. Докажите, что $d(A + (-A)) = 2d(A)$.

▷ 6.55. Докажите, что $p(A + B) = p(A) + p(B)$.

▷ 6.56 (Неравенство Брунна–Минковского). Докажите, что $\sqrt{s(A + B)} \geqslant \sqrt{s(A)} + \sqrt{s(B)}$.

При решении предыдущей задачи помогает утверждение:

Теорема 6.57. *Если для двух фигур на плоскости F_1 и F_2 задана прямая ℓ так, что для любой прямой $\ell' \parallel \ell$ суммарная длина множества $\ell' \cap F_1$ не менее суммарной длины множества $\ell' \cap F_2$, то $s(F_1) \geqslant s(F_2)$.*

Рассмотрение вместо многоугольника M симметричного многоугольника $M + (-M)$ полезно в следующих двух задачах:

▷ 6.58. Докажите, что $\pi d(M) \geqslant p(M)$.

▷ 6.59 (Изодиаметрическое неравенство). Докажите, что $4s(M) \leqslant \pi d(M)^2$.

▷ 6.60. Пусть B_t — круг с центром в начале координат и радиусом t. Докажите, что для всякого многоугольника M площадь
$$s(M + B_t)$$
является квадратным трёхчленом от t. Чему равны коэффициенты этого трёхчлена?

▷ 6.61 (Изопериметрическое неравенство). С помощью предыдущей задачи и задачи 6.56 докажите, что $4\pi s(M) \leqslant p(M)^2$.

6.4. **Конфигурации из целочисленных точек.**

▷ 6.62. Докажите, что у выпуклого 1000000-угольника с вершинами в целых точках какая-то сторона имеет длину более 550.

▷ 6.63. Докажите, что если у выпуклого многоугольника с вершинами в целых точках все стороны равны, то количество его вершин чётно.

▷ 6.64. Докажите, что не существует правильных n-угольников с вершинами в точках с целыми координатами при $n = 3, 5, 6$.

▷ 6.65. Докажите, что не существует правильных n-угольников с вершинами в точках с целыми координатами при $n \geqslant 7$.

▷ 6.66. На плоскости отмечено несколько точек. Для любых трёх из них существует декартова система координат, в которой эти точки имеют целые координаты. Докажите, что существует декартова система координат, в которой все отмеченные точки имеют целые координаты.

▷ 6.67. Докажите, что если вершины выпуклого пятиугольника M имеют целые координаты, то маленький пятиугольник M', стороны которого образованы диагоналями M, содержит точку с целыми координатами внутри или на границе.

6.5. **Задачи типа Рамсея.** Следующие задачи говорят о том, что если множество точек на плоскости достаточно велико, то в нем найдётся заданная конфигурация точек:

▷ 6.68. Докажите, что в множестве из $C_{2k-4}^{k-2}+1$ точек в общем положении на плоскости всегда найдутся k точек, образующие выпуклый k-угольник.

▷ 6.69. В множестве из 2^n точек на плоскости в общем положении найдутся три точки, образующие треугольник, один из углов которого не менее $(1-\frac{1}{n})\pi$.

Бывают и утверждения в обратную сторону:

† 6.70. Докажите, что на плоскости можно выбрать множество из сколь угодно большого числа точек общего положения, в котором нет семи точек, образующих выпуклый семиугольник без других точек этого множества внутри семиугольника.

6.6. **Выпуклые фигуры.**

Определение 6.71. Множество X на плоскости называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками A и B оно содержит отрезок AB.

Теорема 6.72 (Теорема Хана-Банаха на плоскости). *Если точка p не лежит в замкнутом выпуклом множестве C, то существует прямая ℓ такая, что p и C лежат по разные стороны от ℓ.*

▷ 6.73. Докажите эту теорему.

Определение 6.74. Выпуклой оболочкой множества X называется пересечение всевозможных выпуклых множеств, содержащих X.

Из определения выпуклой оболочки следует, что она является выпуклым множеством.

Теорема 6.75 (Теорема Каратеодори). *Точка p лежит в выпуклой оболочке конечного множества X тогда и только тогда, когда она совпадает с одной из точек X или лежит на отрезке с концами в X или лежит в треугольнике с вершинами в X.*

▷ 6.76. Докажите теорему Каратеодори и докажите, что выпуклая оболочка конечного множества — выпуклый многоугольник.

▷ 6.77. На плоскости даны конечные множества X и Y, причём X содержится в выпуклой оболочке Y. Пусть в X $n \geqslant 2$ точек. Докажите, что найдётся подмножество $Y' \subseteq Y$ из не более $2n$ точек, выпуклая оболочка которого содержит X.

Рассмотрим также понятие триангуляции:

Определение 6.78. Фигура F на плоскости триангулирована, если она представлена в виде объединения треугольников, каждая пара которых либо не пересекается, либо пересекается по вершинам, либо пересекается по полным сторонам.

Далее мы будем триангулировать выпуклые оболочки конечных множеств X, которые не лежат на одной прямой.

▷ 6.79. Докажите, что выпуклую оболочку конечного множества X можно триангулировать так, что вершины треугольников триангуляции лежат в X.

Далее будем рассматривать триангуляции выпуклой оболочки конечного множества X, в которых вершинами треугольников являются только точки из X. Дадим определение некоторого класса таких триангуляций.

Определение 6.80. *Триангуляцией Делоне* называется такая триангуляция выпуклой оболочки конечного множества X с вершинами в X, что описанная окружность каждого треугольника триангуляции не содержит внутри себя никаких точек X.

▷ 6.81. Докажите, что для всякого X существует триангуляция Делоне выпуклой оболочки X.

▷ 6.82. Докажите, что если множество X общего положения и никакие 4 его точки не лежат на одной окружности, то две точки A и B соединены ребром в триангуляции Делоне тогда и только тогда, когда существует круг K такой, что $K \cap X = \{A, B\}$. В этом случае триангуляция Делоне единственна.

▷ 6.83. Докажите, что любые n различных точек плоскости можно раскрасить в некоторое количество цветов, не превосходящее $10 \ln n$, так, чтобы в каждом круге, содержащем по крайней мере одну из этих точек, была ровно одна точка некоторого цвета.

Определение 6.84. *Разбиением Вороного* для конечного множества X называется разбиение плоскости на семейство множеств $\{V_x\}_{x\in X}$

$$V_x = \{p : \forall x' \in X\ |p - x| \leqslant |p - x'|\}.$$

▷ 6.85. Как связаны триангуляция Делоне выпуклой оболочки X и соответствующее разбиение Вороного для множеств X общего положения, в которых никакие 4 точки не лежат на одной окружности?

▷ 6.86. На плоскости дано конечное множество непересекающихся кругов $K_1, K_2, \dots, K_n$. Докажите, что плоскость можно разбить на выпуклые фигуры $C_1, C_2, \dots, C_n$, пересекающиеся только по границам так, что для любого $i = 1, 2, \dots, n$ $K_i \subseteq C_i$.

6.7. Теорема Хелли.

Упражнение 6.87. Докажите теорему Хелли на прямой: если в некотором множестве отрезков на прямой любые два отрезка пересекаются, то все отрезки имеют общую точку.

Теорема 6.88 (Теорема Хелли на плоскости)**.** *Если в семействе, состоящем из n выпуклых множеств $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ ($n \geqslant 3$) на плоскости любые три множества X_i, X_j и X_k имеют общую точку, то все множества имеют общую точку.*

▷ 6.89. Докажите теорему Хелли.

Из этой теоремы можно вывести много разнообразных следствий:

▷ 6.90. На плоскости дано $n \geqslant 3$ прямых $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$. Докажите, что если для любых трёх из них найдётся круг радиуса 1, который пересекает эти три прямые, то найдётся круг радиуса 1, который пересекает все n прямых.

▷ 6.91. Докажите, что если из $n \geqslant 3$ точек на плоскости любые три можно накрыть кругом радиуса 1, то все можно накрыть кругом радиуса 1.

▷ 6.92. Докажите, что если n полуплоскостей h_1, h_2, $\dots$, h_n покрывают всю плоскость, то какие-то три из них тоже покрывают всю плоскость.

$\triangleright$ 6.93. На плоскости отмечено множество из n точек. Докажите, что на плоскости найдётся точка O такая, что любая полуплоскость, содержащая O, содержит не менее $n/3$ отмеченных точек.

Следующая серия задач даёт доказательство теоремы Хелли и некоторых ее обобщений:

$\triangleright$ 6.94. Докажите, что теорему Хелли достаточно доказать для конечного набора выпуклых многоугольников. Также можно считать, что ни у каких трёх выпуклых многоугольников их границы не имеют ни одной общей точки.

$\triangleright$ 6.95. Рассмотрим набор выпуклых многоугольников, удовлетворяющих условию теоремы Хелли и условиям предыдущей задачи. Повернём плоскость так, чтобы стороны всех этих многоугольников не были вертикальными. Рассмотрим все возможные пересечения троек многоугольников $I_{123} = M_1 \cap M_2 \cap M_3$ — это тоже выпуклые многоугольники. В каждом таком пересечении рассмотрим самую правую (с наибольшей координатой x) точку — она единственна для каждого пересечения. Возьмём из этих точек самую левую точку O. Докажите, что O содержится во всех многоугольниках нашего набора.

$\triangleright$ 6.96. Докажите, что если в семействе отрезков на прямой не менее αC_n^2 пар пересекаются, то существует точка, принадлежащая не менее $(1-\sqrt{1-\alpha})n$ отрезкам.

$\triangleright$ 6.97. Докажите, что для всякого $\alpha \in (0,1)$ найдётся $\beta(\alpha) \in (0,1)$, удовлетворяющее следующему условию. Если в семействе n выпуклых множеств на плоскости не менее αC_n^3 троек имеют общую точку, то найдётся точка, принадлежащая не менее $\beta(\alpha)n$ множествам из данного набора. Докажите, что можно выбрать $\beta(\alpha)$ так, чтобы $\lim_{\alpha\to 1-0}\beta(\alpha) = 1$.

$\triangleright$ 6.98. Пусть на плоскости дано три непустых семейства выпуклых множеств — красные, синие и зелёные. Известно, что любые три множества разных цветов имеют общую точку. Докажите, что все множества одного из цветов имеют общую точку.

Можно также доказать обобщение теоремы Хелли для некоторого класса целочисленных множеств на плоскости.

Определение 6.99. Множество на плоскости называется *целочисленным выпуклым*, если оно состоит из точек с целыми координатами и всякая целочисленная точка в выпуклой оболочке множества принадлежит этому множеству.

$\triangleright$ 6.100. Докажите, что если в семействе, состоящем из n целочисленных выпуклых множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ ($n \geqslant 4$) на плоскости любые четыре множества имеют общую точку, то все множества имеют общую точку.

6.8. **Графики многочленов и алгебраические кривые.**

$\triangleright$ 6.101. На плоскости нарисованы графики нескольких многочленов степени не выше d. Докажите, что если любые $d+2$ или менее графика имеют общую точку, то все графики имеют общую точку.

$\triangleright$ 6.102. Докажите, что если в некотором множестве окружностей на плоскости любые 4 или менее окружностей имеют общую точку, то все окружности имеют общую точку.

$\triangleright$ 6.103. Докажите, что если в некотором множестве окружностей на плоскости любые 3 или менее окружностей имеют общую точку и количество окружностей не менее 5, то все окружности имеют общую точку.

$\triangleright$ 6.104. На плоскости отмечено конечное множество из более чем $d+1$ точек с попарно различными абсциссами. Известно, что график многочлена степени не выше d, проведённый через любые $d+1$ из них, содержит ещё одну отмеченную точку. Докажите, что все точки лежат на графике многочлена степени не выше d.

▷ 6.105. На плоскости отмечено конечное множество точек. Известно, что любые 6 или менее отмеченных точек лежат на паре прямых. Докажите, что все точки лежат на паре прямых.

▷ 6.106. Докажите, что для любого натурального k в пространстве можно отметить $2k+3$ точек так, что с каждой стороны от любой плоскости, проходящей через начало координат, лежит не менее k отмеченных точек.

▷ 6.107. На плоскости отмечено n красных и m синих прямых. Отмечены также nm точек пересечения пары прямых разных цветов. Докажите, что если набор зелёных прямых покрывает все отмеченные точки, кроме одной, то зелёных прямых не менее $n+m-2$.

Упражнение 6.108. Даны два конечных множества действительных чисел A и B, обозначим
$$A+B=\{a+b : a\in A,\ b\in B\}.$$
Докажите, что для количеств элементов множества имеет место неравенство
$$|A+B|\geqslant |A|+|B|-1.$$

▷ 6.109. Даны два конечных множества остатков по модулю простого числа A и B, обозначим множество остатков
$$A+B=\{a+b : a\in A,\ b\in B\}.$$
Докажите, что для количеств элементов множества имеет место неравенство
$$|A+B|\geqslant \min\{|A|+|B|-1, p\}.$$

6.9. **Раскраски на плоскости.** Рассмотрим для примера одну из самых простых задач про раскраски:

▷ 6.110. Докажите, что если плоскость раскрашена в два цвета (то есть каждой точке плоскости присвоен один из двух цветов), то найдётся равносторонний треугольник, у которого все вершины одного цвета.

Вот ещё несколько задач про раскраску плоскости:

▷ 6.111. Докажите, что если плоскость окрашена в три цвета, то найдутся две точки на расстоянии 1 друг от друга, окрашенные в один и тот же цвет.

▷ 6.112. Докажите, что плоскость можно окрасить в семь цветов так, что не найдётся пары точек одного цвета на расстоянии 1 друг от друга.

▷ 6.113. Докажите, что если плоскость окрашена в три цвета, то один из этих цветов реализует все расстояния, то есть для каждого d найдутся две точки этого цвета на расстоянии d.

6.10. **Наборы векторов.**

▷ 6.114. На плоскости дано n векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_n$. Известно, что их длины не превосходят 1. Докажите, что можно так расставить знаки $+$ и $-$ вместо $*$ в выражении
$$\overline{a}_1 * \overline{a}_2 * \dots * \overline{a}_n,$$
что модуль итогового вектора будет не более $\sqrt{2}$.

▷ 6.115. На плоскости даны точки A_1, A_2, …, A_n и точки B_1, B_2, …, B_n. Докажите, что точки B_i можно перенумеровать так, что для всех $i\neq j$ будет выполняться (имеется в виду скалярное произведение векторов):
$$\overline{A_iA_j}\cdot\overline{B_iB_j}\geqslant 0.$$

6.11. **Лемма Минковского.**

$\triangleright$ 6.116 (Лемма Минковского). Докажите, что симметричное относительно начала координат выпуклое множество на координатной плоскости, площадь которого больше 4, содержит хотя бы одну точку с целыми координатами, кроме начала координат.

На самом деле лемма Минковского позволяет заменить теорему 2.59 при доказательстве многих фактов из теории чисел. В качестве упражнения можно попытаться провести доказательства тех фактов, где применялась теорема 2.59 с помощью леммы Минковского.

$\triangleright$ 6.117. На плоскости нарисованы круги радиуса r с центрами во всех целочисленных точках, кроме начала координат. Докажите, что если отрезок, один из концов которого находится в начале координат, имеет длину, большую $1/r$, то он пересекает один из кругов.

6.12. **Покрытия и упаковки.**

$\triangleright$ 6.118. Докажите, что многоугольник периметра 1 можно накрыть кругом диаметра $\frac{1}{2}$.

$\triangleright$ 6.119. Круг радиуса 1 покрыт семью одинаковыми кругами. Докажите, что их радиусы не менее $1/2$.

$\triangleright$ 6.120. Докажите, что если в единичный круг влезают без наложений 6 кругов радиуса r, то в него влезает и 7 таких кругов.

Введём определения:

Определение 6.121. *Диаметром* множества X на плоскости называется максимальное расстояния между парой его точек. Можно доказать, что если множество ограничено и замкнуто, то у него есть диаметр.

Определение 6.122. *Шириной в направлении прямой* ℓ замкнутого выпуклого множества X на плоскости называется длина проекции этого множества на прямую ℓ. Просто *шириной* множества X называется минимальная по всем направлением ширина.

Упражнение 6.123. Докажите, что для замкнутых выпуклых множеств X и Y утверждения равносильны:
1) Ширина X в любом направлении не превосходит ширины Y;
2) $X + (-X) \subseteq Y + (-Y)$ (имеется в виду сумма Минковского).

$\triangleright$ 6.124. Докажите, что конечное множество диаметра 1 на плоскости можно покрыть кругом радиуса $1/\sqrt{3}$.

$\triangleright$ 6.125. Докажите, что во всяком выпуклом многоугольнике M найдётся точка O такая, что всякая хорда $AB \ni O$ (то есть отрезок с концами на границе M) делится точкой O в отношении $1:2 \leqslant \alpha \leqslant 2:1$.

$\triangleright$ 6.126. На плоскости дано конечное множество точек X и правильный треугольник T. Известно, что любые две точки из X можно покрыть параллельным переносом T. Докажите, что все множество X можно покрыть тремя параллельными переносами T.

$\triangleright$ 6.127. На плоскости дано конечное множество точек X и правильный треугольник T. Известно, что любые $k \leqslant 9$ точек из X можно покрыть двумя параллельными переносами T. Докажите, что все множество X можно покрыть двумя параллельными переносами T.

$\triangleright$ 6.128. На плоскости расположено конечное множество точек, раскрашенных в три цвета так, что каждый цвет использован. Расстояние между любыми двумя точками разных цветов не более 1. Докажите, что точки одного из цветов можно покрыть кругом радиуса $1/\sqrt{3}$.

▷ 6.129. Докажите, что в любой выпуклый многогранник в пространстве можно поместить многогранник, гомотетичный исходному с коэффициентом $-1/3$.

▷ 6.130. Тетраэдр содержится в сфере диаметра 1. Докажите, что его можно поместить между двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми равно $1/\sqrt{3}$.

▷ 6.131. Докажите, что круг диаметра 1 нельзя покрыть полосками, суммарная ширина которых меньше 1.

▷ 6.132. На плоскости дано n кругов радиусов $R_1, R_2, \dots, R_n$. При этом не существует прямой, которая не пересекала бы ни один из этих кругов и делила бы множество кругов на два непустых множества. Докажите, что эти круги можно покрыть одним кругом радиуса $R_1 + R_2 + \dots + R_n$.

6.13. **Разные задачи.**

▷ 6.133. В пространстве даны 6 точек общего положения. Докажите, что их можно разбить на две тройки так, что треугольники, составленные из этих троек зацеплены.

▷ 6.134. В пространстве дан выпуклый многогранник и точка внутри него. Докажите, что через эту точку проходит прямая, не пересекающая внутренних частей граней многогранника.

▷ 6.135. Докажите, что если прямоугольный параллелепипед Π_1 содержит прямоугольный параллелепипед Π_2, то сумма длин сторон Π_1 не менее суммы длин сторон Π_2. Верно ли это утверждение, если параллелепипеды непрямоугольные?

▷ 6.136. Дан некоторый многогранник. По границе каждой грани многогранника ползёт муха, так что если смотреть на эту грань снаружи, то она движется по часовой стрелке. Скорости всех мух непостоянны, но не менее 1 мм/с. Докажите, что когда-нибудь какие-то две мухи встретятся.

▷ 6.137. На плоскости даны n точек. Докажите, что можно нарисовать n углов угловой меры по $\frac{2\pi}{n}$ каждый, вершины которых находятся в данных точках (в каждой по одной вершине) и которые покрывают всю плоскость.

▷ 6.138. На плоскости даны n точек. Докажите, что можно нарисовать n углов угловой меры по $\frac{2\pi}{n}$ каждый, вершины которых находятся в данных точках (в каждой по одной вершине) и которые попарно не пересекаются по внутренним точкам.

7. Производящие функции

7.1. **Степенные ряды.** Начнем с определения простейших производящих функций, возникающих при перечислении каких-либо комбинаторных объектов.

Определение 7.1. Пусть A — некоторое множество, элементы которого называются *конфигурациями*, и $w : A \to \mathbb{Z}$ — некоторая функция, которая называется *весовой функцией* (или просто *весом*). Тогда производящей функцией, соответствующей A и w, называется следующее выражение:

$$f_{A,w}(x) = \sum_{a \in A} x^{w(a)}.$$

Замечание 7.2. Обычно бывает удобно, чтобы этот ряд сходился при всех x или хотя бы при $|x| < R$ $(R > 0)$. Тогда это выражение действительно является некоторой функцией.

Дадим определения:

Определение 7.3. Множество конфигураций C с весом w_3 называется произведением множеств A и B с весами w_1 и w_2 соответственно, если C — это множество пар (a, b), где $a \in A$ и $b \in B$ (то есть $C = A \times B$) и при этом $w_3(a, b) = w_1(a) + w_2(b)$.

Определение 7.4. Множество конфигураций C с весом w_3 называется суммой множеств A и B с весами w_1 и w_2 соответственно, если C является объединением множеств A и B и при этом $w_3(c)$ равно $w_1(c)$ или $w_2(c)$, в зависимости от того, в каком из множеств A или B лежит c.

Сформулируем основные теоремы:

Теорема 7.5. *Если множество C — произведение множеств A и B, то*

$$f_C(x) = f_A(x) f_B(x).$$

Теорема 7.6. *Если множество C — сумма множеств A и B, то*

$$f_C(x) = f_A(x) + f_B(x).$$

Упражнение 7.7. Доказать эти теоремы.

С помощью этих теорем можно написать производящую функцию для множества всех подмножеств некоторого n-элементного множества, весовой функцией при этом является количество элементов в подмножестве:

$$f(x) = (1 + x)^n.$$

Упражнение 7.8. Докажите эту формулу, используя тот факт, что если $A \cap B = \emptyset$, то множество подмножеств $A \cup B$ является произведением множества подмножеств A и множества подмножеств B.

Если обозначить через C_n^k количество k-элементных подмножеств множества из n элементов, то мы получаем формулу

$$(1 + x)^n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} C_n^k x^k,$$

которая называется биномом Ньютона. Для удобства мы всегда считаем $C_n^k = 0$, если $k < 0$, $k > n$ или $n < 0$.

С помощью бинома Ньютона легко решаются следующие задачи:

$\triangleright$ 7.9. Найдите значения выражения

$$\sum_{k=1}^{n} k C_n^k.$$

▷ 7.10. Найдите значения выражения

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k.$$

▷ 7.11. Найдите значения выражения

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}.$$

Замечание 7.12. Формулу бинома Ньютона можно дифференцировать и интегрировать.

▷ 7.13. Докажите формулу

$$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

Рассмотрим следующую простую задачу:

Упражнение 7.14. Доказать формулу

$$\sum_{k\equiv 0 \mod 2} C_n^k = 2^{n-1}.$$

Попробуйте аналогичным методом решить следующую задачу:

▷ 7.15. Найдите значение выражения

$$\sum_{k\equiv 0 \mod 3} C_n^k.$$

Замечание 7.16. Найти значение означает получить сравнительно удобную формулу без знака суммы.

Введем следующее определение:

Определение 7.17. Числом Фибоначчи f_k ($k \geqslant 0$) называется количество последовательностей из нулей и единиц длины k, в которых никакая пара единиц не стоит рядом и единицы не стоят ни в начале, ни в конце последовательности.

Замечание 7.18. Условие, что единицы не стоят в начале и конце не существенно, но оно введено для того, чтобы нумерация чисел Фибоначчи совпала с общепринятой. Также в этом определении считается, что пустая последовательность ему не удовлетворяет.

Найдем соответствующую производящую функцию $F(x)$.

Упражнение 7.19. Рассмотрите последние элементы в некоторой последовательности из нулей и единиц и докажите соотношение

$$f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$$

для $k \geqslant 2$.

Из предыдущего упражнения следует, что

$$f_k x^k = f_{k-1}x^k + f_{k-2}x^k$$

при $k \geqslant 2$. Суммируя по k получаем

$$\sum_{k\geqslant 2} f_k x^k = \sum_{k\geqslant 2} f_{k-1}x^k + \sum_{k\geqslant 2} f_{k-2}x^k.$$

Иначе

$$F(x) - x = xF(x) + x^2F(x),$$

откуда сразу выводим
$$F(x)=\frac{x}{1-x-x^2}.$$

▷ 7.20. Используя сказанное выше, докажите формулу
$$f_k=\frac{\phi_1^k-\phi_2^k}{\phi_1-\phi_2},$$
где $\phi_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Замечание 7.21. Для этого нужно решить уравнение
$$1-x-x^2=0.$$

Последовательность Фибоначчи допускает разные обобщения.

▷ 7.22. Докажите, что если для последовательности a_n $(n\geqslant 0)$ и некоторых чисел $c_1,c_2,\ldots,c_\ell$ выполняется формула
$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\ldots+c_\ell a_{n-\ell},\quad n\geqslant\ell,$$
то имеет место соотношение
$$\sum_{k\geqslant 0}a_nx^n=\frac{P(x)}{1-c_1x-\ldots-c_\ell x^\ell},$$
где $P(x)$ — многочлен степени меньшей, чем ℓ.

▷ 7.23. Найдите количество последовательностей из нулей и единиц длины k, у которых никакие три единицы не идут подряд.

В предыдущей задаче ответ можно представить в виде производящей функции.

† 7.24. Как посчитать на компьютере число a_k из предыдущей задачи за порядка $\ln k$ операций.

Вернемся к биномиальным коэффициентам. Можно ввести определение производящей функции от двух переменных, если на множестве конфигураций введены два веса. В качестве примера рассмотрим множество последовательностей из нулей и единиц, в которых один вес — ее длина, а другой — количество единиц в последовательности.

▷ 7.25. Докажите, что соответствующая производящая функция имеет вид
$$F(x,y)=\sum_{n\geqslant 0,k}C_n^kx^ky^n=\frac{1}{1-y(1+x)}.$$

С помощью этого можно решить следующую задачу:

▷ 7.26. Докажите, что для чисел Фибоначчи f_i выполняется тождество
$$f_{n+1}=\sum_k C_{n-k}^k.$$

Вот еще одна задача на эту тему:

▷ 7.27. Найти сумму $(n\geqslant 0)$
$$\sum_{k\geqslant 0}C_{n+k}^nx^k.$$

Замечание 7.28. Разложите формулу задачи 7.25 по степеням x.

▷ 7.29. Найти сумму
$$\sum_{k\geqslant 0} C_{2k}^k x^k.$$

Перейдем теперь к некоторым другим производящим функциям.

▷ 7.30. Пусть S_n — множество перестановок чисел от 1 до n, а $\iota(\sigma)$ — количество беспорядков при перестановке σ. (Беспорядок — это пара чисел $x < y$ таких, что $\sigma(x) > \sigma(y)$) Докажите, что производящая функция имеет вид:
$$\sum_{\sigma\in S_n} q^{\iota(\sigma)} = (1+q)(1+q+q^2)\dots(1+q+\dots+q^{n-1}).$$

Замечание 7.31. Здесь использована переменная q, так как обычно это выражение называется q-факториалом и обозначается $n!_q$. При $q = 1$ это выражение дает обыкновенный факториал.

Определение 7.32. Определим q-биномиальные коэффициенты $C_n^k(q)$ следующим образом:
$$(1+x)(1+qx)\dots(1+q^{n-1}x) = \sum_k C_n^k(q) q^{\frac{k^2-k}{2}} x^k.$$

▷ 7.33. Докажите следующие свойства этих коэффициентов:
$$C_n^k(q) = q^{n-k} C_{n-1}^{k-1}(q) + C_{n-1}^k(q),$$
$$C_n^k(q) = \frac{n!_q}{k!_q (n-k)!_q},$$
$$C_n^k(q) = C_n^{n-k}(q).$$

▷ 7.34. Докажите формулу ($|q| < 1$)
$$\prod_{k\geqslant 1}(1+q^k) = 1 + \sum_{k\geqslant 1} \frac{q^{\frac{k^2+k}{2}}}{(1-q)\dots(1-q^k)}.$$

Замечание 7.35. Эта формула допускает как алгебраическое, так и комбинаторное доказательство.

Введём в рассмотрение следующие числа:

Определение 7.36. Пусть $p(n)$ — количество различных (с точностью до перестановки) представлений числа n в виде суммы натуральных чисел, а $d(n)$ — количество различных (с точностью до перестановки) представлений числа n в виде суммы различных натуральных чисел. Положим также $p(0) = d(0) = 1$.

▷ 7.37. Доказать формулы:
$$\sum_{k\geqslant 0} d(k)x^k = \prod_{k\geqslant 1}(1+x^k),$$
$$\sum_{k\geqslant 0} p(k)x^k = \prod_{k\geqslant 1}\frac{1}{1-x^k}.$$

▷ 7.38. Докажите формулу
$$\prod_{k\geqslant 1}(1+x^k) = \prod_{k\geqslant 1}\frac{1}{1-x^{2k-1}}.$$

Какому утверждению о разбиениях соотвествует эта формула? Какому утверждению соответствует равносильная ей формула
$$\prod_{k\geqslant 1}\frac{1}{1+x^k} = \prod_{k\geqslant 1}(1-x^{2k-1})?$$

Для чисел $p(n)$ существует замечательная формула, позволяющая эффективно их вычислять:

† 7.39. Докажите тождество Эйлера:

$$\prod_{k\geqslant 1}(1-q^k) = 1+\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k\bigl(q^{\frac{3k^2-k}{2}}+q^{\frac{3k^2+k}{2}}\bigr).$$

Замечание 7.40. Его можно доказать, если доказать более общее тождество

$$\prod_{l\geqslant 1}(1-q^{3l-2}x)(1-q^{3l-1}x^{-1})(1-q^{3l}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(-x)^k q^{\frac{3k^2-k}{2}}.$$

и положить $x=1$. Этот вариант связан с довольно нудными вычислениями.

Существует и комбинаторное доказательство тождества Эйлера, основанное на интерпретации левой его части как разности между количеством разбиений n на четное число различных слагаемых и количеством разбиений n на нечетное число различных слагаемых.

Упражнение 7.41. С помощью тождества Эйлера докажите, что при $n>0$

$$p(n) = \sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k+1}\bigl(p(n-\tfrac{3k^2-k}{2})+p(n-\tfrac{3k^2+k}{2})\bigr),$$

считая, что $p(m)=0$, если $m<0$.

7.2. **Ряды Дирихле.** Теперь перейдем к другому типу производящих функций, который встречается в теории чисел.

Определение 7.42. Рядом Дирихле функции a натурального аргумента называется выражение

$$D_a(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{a(n)}{n^s},$$

при этом если $|a(n)|<Cn^t$ для некоторых $C>0$ и t, то этот ряд является реальной функцией переменной $s>t+1$.

Замечание 7.43. На самом деле при $\operatorname{Re} s>t+1$ эта функция является аналитической функцией комплексной переменной s.

Введем еще одно определение:

Определение 7.44. Функция f натурального яргумента называется мультипликативной, если для всех взаимно простых m и n выполняется:

$$f(nm)=f(n)f(m).$$

Упражнение 7.45. Докажите, что если f мультипликативна, то

$$D_f(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p\in\mathbb{P}}(1+f(p)p^{-s}+f(p^2)p^{-2s}+\ldots).$$

Здесь $\mathbb{P}$ — множество простых чисел.

Определение 7.46. Дзета-функцией $\zeta(s)$ называется ряд Дирихле $f(n)\equiv 1$:

$$\zeta(s) = \sum_n\frac{1}{n^s} = \prod_p\frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Рассмотрим также функцию

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } \exists p: p^2 \mid n,\\ (-1)^k, & \text{если } n=p_1p_2\ldots p_k.\end{cases}$$

Здесь $p^2 \mid n$ означает: p^2 делит n. Она мультипликативна и ее ряд Дирихле

$$\mu(s) = \sum_n \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_p (1 - p^{-s}).$$

▷ 7.47. Докажите, что ряд

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$$

расходится.

▷ 7.48. Докажите, что для мультипликативных f, g и h

$$D_f(s) D_g(s) = D_h(s)$$

равносильно тому, что

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d) g(n/d).$$

▷ 7.49. Докажите, что если f и g мультипликативны и

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d),$$

то

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \mu(n/d).$$

▷ 7.50. Докажите, что $\mu(n)$ — это сумма *примитивных* корней n-й степени из единицы. Примитивные корни из единицы — это корни многочлена деления круга $\Phi_n(x)$.

▷ 7.51. Докажите, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0.$$

† 7.52. Докажите, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

сходится при $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$.

Определение 7.53. Пусть $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел меньших n и взаимно простых с n, $\varphi(1) = 1$. Эта функция называется *функцией Эйлера.*

▷ 7.54. Докажите, что функция Эйлера мультипликативна.

▷ 7.55. Докажите, что $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

▷ 7.56. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{2^k - 1} = 2.$$

8. Проективная геометрия

8.1. **Проективные преобразования прямой.**

Определение 8.1. Пусть на числовой прямой задана функция вида $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Если $ad - bc \neq 0$, то задаваемое этой функцией отображение $x \mapsto f(x)$ назовём *бирациональным отображением* прямой.

Если к прямой добавить бесконечно удалённую точку и считать $\frac{1}{0} = \infty$ и $\frac{1}{\infty} = 0$, то бирациональные преобразования становятся взаимно однозначными преобразованиями *проективной прямой*, получающейся из обычной прямой формальным добавлением бесконечно удалённой точки.

Упражнение 8.2. Центральная проекция одной прямой на плоскости на другую является бирациональным преобразованием.

На самом деле верен более общий факт:

Теорема 8.3. *Если рациональное отображение прямой (задаваемое рациональной функцией) имеет обратное рациональное, то это бирациональное преобразование.*

Эта теорема позволяет во многих случаях, когда удаётся геометрически построить почти всюду (кроме конечного числа точек) взаимно однозначное отображение между прямыми, считать это отображение бирациональным преобразованием.

В следующих задачах рассматриваются основные свойства бирациональных преобразований:

$\triangleright$ 8.4. Докажите, что бирациональное преобразование прямой однозначно определяется образами трёх точек.

Определение 8.5. Для четырёх различных точек A, B, C, D на прямой двойным отношением назовём выражение

$$d(A, B, C, D) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{DA}},$$

где отношения длин векторов берутся со знаком минус, если они противонаправлены. Если одна из точек лежит в бесконечности, считаем $\frac{\infty}{\infty} = 1$.

Упражнение 8.6. Докажите, что двойное отношение является бирациональной функцией каждого аргумента при фиксированных остальных.

Упражнение 8.7. Выведите формулы, по которым преобразуется двойное отношение при перестановках четырёх точек. В частности, нас интересует преобразования циклического сдвига и перестановки пары точек.

$\triangleright$ 8.8. Докажите, что бирациональное преобразование прямой сохраняет двойное отношение и четвёрку точек (A, B, C, D) можно перевести бирациональным преобразованием в четвёрку (A', B', C', D') тогда и только тогда, когда

$$d(A, B, C, D) = d(A', B', C', D').$$

$\triangleright$ 8.9. Пусть точки A, B, C, D лежат на одной прямой, а точки A, B', C', D' тоже лежат на одной прямой. Докажите, что прямые BB', CC', DD' пересекаются в одной точке или все параллельны тогда и только тогда, когда

$$d(A, B, C, D) = d(A, B', C', D').$$

Из предыдущей задачи можно вывести известные теоремы Менелая и Чевы.

Покажем теперь, что окружности на плоскости и в более общем случае кривые второго порядка на плоскости можно в определённом смысле считать проективными прямыми.

Возьмём на окружности S точку p и прямую ℓ на плоскости, не проходящую через эту точку. Для любой точки p' на окружности рассмотрим прямую $m = pp'$, если точки p и p' совпадают, то пусть m — касательная к S в точке p. Пусть x — точка пересечения m и ℓ, параллельные прямые пересекаются в бесконечно удалённой точке. Назовём отображение, переводящее p' в x по вышеуказанному правилу центральной проекцией S на ℓ с центром p.

Упражнение 8.10. Докажите, что проекция окружности на прямую и обратное к ней отображение в координатах задаются рациональными функциями.

Определение 8.11. Для четырёх различных точек A, B, C, D на окружности двойным отношением назовём выражение

$$d(A,B,C,D) = \pm\frac{AB}{BC}\frac{CD}{DA},$$

где знак определяется из сравнения с конфигурацией на прямой, где точки идут в том же порядке..

$\triangleright$ 8.12. Докажите, что центральная проекция переводит двойное отношение на окружности в двойное отношение на прямой.

Это утверждение позволяет доказывать разнообразные факты об отношениях отрезков, связанных с окружностью.

$\triangleright$ 8.13. Используя предыдущую задачу, докажите теорему Птолемея: для вписанного четырёхугольника $ABCD$

$$AB\cdot CD + BC\cdot DA = AC\cdot BD.$$

$\triangleright$ 8.14. Пусть точка A лежит вне окружности S, касательные из A касаются S в точках K и L. Пусть прямая ℓ проходит через A, пересекает S в точках B и C и пересекает KL в точке D. Тогда

$$d(A,B,D,C) = -1.$$

$\triangleright$ 8.15. Пусть точка A лежит вне окружности S, касательные из A касаются S в K и L. Пусть прямые ℓ и m проходят через A и пересекают S одна в точках B, C, вторая — в точках D, E. Докажите, что прямые BD, CE, KL пересекаются в одной точке или параллельны.

Теперь изучим следующий класс бирациональных преобразований:

Определение 8.16. Преобразование σ назовем *бирациональной симметрией*, если σ не тождественно, а $\sigma\circ\sigma$ равно тождественному преобразованию.

Упражнение 8.17. Бирациональная симметрия σ однозначно определяется образами двух точек x и y, где $x \neq \sigma(y)$.

Оказывается, симметрии достаточно просто описать по их действию на окружности:

Определение 8.18. Пусть точка p лежит вне окружности S. Отображение, ставящее каждой точке p' на S в соответствие p'' — вторую точку пересечение прямой pp' с S (в случае касания $p'' = p'$), назовём *симметрией окружности S с центром p*. Если p лежит внутри S, будем говорить, что симметрия положительная, иначе — отрицательная.

Упражнение 8.19. Докажите, что если позволить центру симметрии быть бесконечно удалённой точкой, то таким образом можно получить любую бирациональную симметрию окружности.

Упражнение 8.20. В каких случаях для симметрий σ_x и σ_y с центрами x и y имеет место соотношение $\sigma_x \circ \sigma_y = \sigma_y \circ \sigma_x$?

Упражнение 8.21. В каком случае композиция центральных симметрий окружности тоже будет центральной симметрией? Что тогда можно сказать о центрах этих симметрий?

Определение 8.22. Пусть на плоскости дана прямая ℓ и точка p вне её. Отображение, ставящее в соответствие точке x на прямой ℓ точку x' на прямой ℓ такую, что угол $\angle xpx'$ прямой, назовём *поворотом* прямой ℓ вокруг точки p на прямой угол.

Упражнение 8.23. Докажите, что любая положительная бирациональная симметрия может быть представлена поворотом прямой на прямой угол.

$\triangleright$ 8.24. В окружность вписан шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что его диагонали пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда
$$\frac{AB\cdot CD\cdot EF}{BC\cdot DE\cdot FA}=1.$$

$\triangleright$ 8.25. На прямой лежат шесть точек A, B, C, D, E, F в указанном порядке. Докажите, что окружности, построенные на отрезках AD, BE, CF как на диаметрах, пересекаются все вместе тогда и только тогда, когда
$$\frac{AB\cdot CD\cdot EF}{BC\cdot DE\cdot FA}=1.$$

$\triangleright$ 8.26. Докажите, что если точки x, y, z лежат не на окружности S и коллинеарны, то композиция симметрий с центрами x, y, z — это симметрия с некоторым центром t, лежащим на прямой xyz.

$\triangleright$ 8.27. Выведите из предыдущей задачи теорему Паскаля: если точки A, B, C, D, E, F лежат на окружности, и $X = AB\cap DE, Y = BC\cap EF, Z = CD\cap FA$, то точки X, Y, Z коллинеарны.

$\triangleright$ 8.28. Пусть точки A, B, C, D, E, F лежат на горизонтальной прямой ℓ. Полуокружность с диаметром KL в верхней полуплоскости обозначим $H(K, L)$. Пусть существуют точки $X = H(A, B)\cap H(D, E)$, $Y = H(B, C)\cap H(E, F)$, $Z = H(C, D)\cap H(F, A)$. Докажите, что X, Y, Z лежат на одной окружности или прямой, перпендикулярной ℓ.

$\triangleright$ 8.29. Докажите, что любое бирациональное преобразование является композицией бирациональных симметрий. Докажите также, что будет достаточно не более трёх симметрий в композиции.

Аналогично бирациональным преобразованиям вещественной проективной прямой можно определить бирациональные преобразования комплексной проективной прямой (которую можно считать плоскостью с добавленной бесконечно удалённой точкой) как отображения $z\mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d\in\mathbb{C}$, $ad-bc\neq 0$.

Из того, что эти преобразования сохраняют двойное отношение четырёх точек
$$d(a,b,c,d)=\frac{(b-a)(d-c)}{(c-b)(a-d)}\in\mathbb{C}$$
можно вывести утверждение:

Упражнение 8.30. Бирациональные преобразования комплексной проективной прямой сохраняют отношение
$$\frac{AB\cdot CD}{BC\cdot DA}$$
и сумму ориентированных углов
$$\angle(AB, BC)+\angle(CD, DA).$$

В частности, такие преобразования переводят окружность или прямую в окружность или прямую.

$\triangleright$ 8.31. Докажите неравенство Птолемея для четырёх точек на плоскости

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geqslant AC \cdot BD$$

$\triangleright$ 8.32. Докажите, что если к бирациональным преобразованиям комплексной проективной прямой добавить сопряжение $z \mapsto \overline{z}$, то получится множество всех преобразований, представимых как композиции инверсий. Докажите, что любое преобразование комплексной проективной прямой, переводящее окружность или прямую в окружность или прямую, задаётся в таком виде.

$\triangleright$ 8.33. В треугольнике ABC дана точка D такая, что $\angle BDC = \angle BAC + 90°$. Оказалось, что $AB \cdot DC = AC \cdot DB$. Найдите $\dfrac{AD \cdot BC}{AB \cdot DC}$.

8.2. **Проективные преобразования, оставляющие на месте окружность.**

Определение 8.34. *Проективной плоскостью* называется множество прямых, проходящих через начало координат трёхмерного пространства. Прямые этого множества называются *точками проективной плоскости*, плоскости, проходящие через начало координат, называются *прямыми проективной плоскости*.

Определение 8.35. На любой плоскости, расположенной в трёхмерном пространстве и не содержащей начало координат, проективные точки и прямые высекают настоящие точки и прямые. Такая плоскость называется *аффинной картой*. Она содержит все точки проективной плоскости кроме одной прямой, которая называется *бесконечно удалённой прямой* в данной карте.

Определение 8.36. *Проективными преобразованиями* называются преобразования проективной плоскости, возникающие из любых линейных преобразований трёхмерного пространства.

Для школьного курса можно считать, что линейные преобразования — это преобразования, заданные формулами

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned}$$

с ненулевым детерминантом матрицы (a_{ij}). Для каждого преобразования есть обратное и из любых двух преобразований можно сделать композицию — то есть они образуют *группу*.

Координаты (x, y, z) в трехмерном пространстве будем называть *однородными координатами*, а само это пространство — *однородным пространством*. Для точек проективной плоскости однородные координаты определены с точностью до умножения на любое ненулевое число. Также мы часто будем использовать аффинную карту, задаваемую условием $z = 1$, для неё связь между однородными координатами и координатами (u, v) в аффинной плоскости задаётся так:

$$(u, v) \to (u, v, 1)$$
$$(x, y, z) \to (\frac{x}{z}, \frac{y}{z}).$$

Пусть на плоскости дана окружность S. Выберем систему координат, в которой её уравнение имеет вид

$$u^2 + v^2 = 1.$$

Преобразуем к однородному виду, тогда получим уравнение в однородных координатах

$$Q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Проективные преобразования оставляют на месте окружность тогда и только тогда, когда при подстановке преобразованных координат (x', y', z') в Q получим $Q(x', y', z') = \lambda Q(x, y, z)$, где λ — некоторое число.

Заметим, что в данном случае $\lambda > 0$. Это можно доказать, если заметить, что существует плоскость в однородном пространстве, на которой $Q > 0$ для любого ненулевого вектора и не существует плоскости, на которой $Q < 0$ для любого ненулевого вектора. Для преобразованного выражения $Q(x', y', z')$ это свойство тоже должно выполняться, а значит $\lambda > 0$.

Умножение линейного преобразования однородного пространства на некоторое число не влияет на получающееся преобразование проективной плоскости, поэтому можно считать, что $\lambda = 1$.

Итак, мы будем изучать линейные преобразования, оставляющие инвариантным выражение Q. Множество таких преобразований обозначим L и будем называть трёхмерной группой Лоренца, по аналогии с четырёхмерной группой Лоренца (из физики) — группой преобразований между инерциальными системами отсчёта, которая имеет инвариант $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$.

Заметим, что если бы мы имели дело с квадратичной формой $Q' = x^2 + y^2 + z^2$ (это скалярный квадрат вектора), то тогда у нас получилась бы не группа Лоренца, а *ортогональная группа* — группа движений трёхмерного пространства, оставляющих на месте начало координат.

Квадратичная форма Q' позволяет определить *евклидово скалярное произведение*

$$\begin{aligned}((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2))' &= \\ &= \frac{1}{2}(Q'(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) - Q'(x_1, y_1, z_1) - Q'(x_2, y_2, z_2)) = \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,\end{aligned}$$

которое даёт понятие перпендикулярности векторов в евклидовом пространстве. По аналогии можно определить

$$\begin{aligned}((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) &= \\ &= \frac{1}{2}(Q(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) - Q(x_1, y_1, z_1) - Q(x_2, y_2, z_2)) = \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2,\end{aligned}$$

оно называется *скалярным произведением в пространстве Минковского.* Это скалярное произведение будет основным инструментом в последующих рассуждениях.

Если для двух векторов однородного пространства имеет место $(\overline{a}, \overline{b}) = 0$ будем говорить, что векторы перпендикулярны. Это определение не зависит от домножения каждого из векторов на ненулевые числа, а значит у нас появляется следующее понятие:

Определение 8.37. Пара точек a и b проективной плоскости называются *полярными* относительно окружности S, если соответствующие им векторы однородного пространства $\overline{a}$ и $\overline{b}$ перпендикулярны в скалярном произведении Минковского, соответствующем окружности S.

Заметим, что уравнение окружности S в однородных координатах можно записать как $(\overline{s}, \overline{s}) = 0$. Как и в случае евклидова скалярного произведения, множество векторов, перпердикулярных данному, образует плоскость. Соответственно, множество точек, полярных данной точке образует прямую, она называется *полярой* точки. Докажем лемму:

Лемма 8.38. *Пусть ℓ — касательная к окружности S в точке p. Тогда прямая ℓ — поляра точки p.*

Доказательство. Пусть точке p соответствует вектор $\overline{p}$ в однородном пространстве. Пусть q — любая другая точка ℓ с соответствующим вектором $\overline{q}$. Предположим противное, то есть

$$(\overline{p}, \overline{q}) = m \neq 0.$$

Вспомним, что $(\overline{p}, \overline{p}) = 0$, тогда положим $n = \frac{(\overline{q}, \overline{q})}{2m}$

$$(\overline{q} - n\overline{p}, \overline{q} - n\overline{q}) = (\overline{q}, \overline{q}) - 2n(\overline{p}, \overline{q}) = (\overline{q}, \overline{q}) - 2nm = 0.$$

Итак, мы имеем вектор $\overline{q}' = \overline{q} - n\overline{p}$, неколлинеарный p. Соответствующая ему точка $q' \neq p$ лежит на ℓ и на S — противоречие. □

Из этой леммы можно вывести и следующую лемму, позволяющую явно строить поляру точки:

Лемма 8.39. *Если точка p лежит вне окружности S, ℓ_1 и ℓ_2 — касательные к S, касающиеся её в точках q_1 и q_2 и проходящие через p. Тогда поляра точки p — это прямая, проходящая через q_1 и q_2.*

Упражнение 8.40. Докажите эту лемму.

Известно, что существует много евклидовых движений, оставляющих на месте начало координат, поэтому можно ожидать, что в группе Лоренца будет много преобразований. Начнём строить такие преобразования явно, используя аналогию с евклидовыми движениями. Рассмотрим одно из самых простых движений — симметрию относительно плоскости.

Пусть в пространстве дана плоскость α, перпендикулярная некоторому вектору $\overline{v}$. Тогда симметрия относительно плоскости α задаётся формулой (проверьте!)

$$\overline{x}' = \overline{x} - 2\frac{(\overline{x}, \overline{v})'}{(\overline{v}, \overline{v})'}\overline{v}.$$

Заменив в этой формуле евклидово скалярное произведение на скалярное произведение Минковского, мы получим преобразование, определённое для любого $\overline{v}$ с $(\overline{v}, \overline{v}) \neq 0$

$$\sigma_{\overline{v}} : \overline{x} \to \overline{x} - 2\frac{(\overline{x}, \overline{v})}{(\overline{v}, \overline{v})}\overline{v}.$$

со следующими свойствами:

(1) $\sigma_{\overline{v}}(\overline{x}) = \overline{x}$ тогда и только тогда, когда $(\overline{x}, \overline{v}) = 0$;
(2) $\sigma_{\overline{v}}(\overline{x}) = -\overline{x}$ тогда и только тогда, когда $\overline{x} = \lambda\overline{v}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$;
(3) скалярное произведение Минковского сохраняется при этом преобразовании.

Упражнение 8.41. Докажите эти свойства.

Соответствующее проективное преобразование можно охарактеризовать так:

(1) $\sigma_v(x) = x$ тогда и только тогда, когда либо x и v полярны относительно S, либо $x = v$;
(2) окружность S при этом преобразовании переходит в себя и отношение полярности точек относительно окружности при этом не меняется.

Рассмотрим вопрос о том как найти образ заданной точки x при этом преобразовании

Упражнение 8.42. Докажите, что на окружности эта симметрия даёт симметрию, определённую в предыдущем разделе.

Упражнение 8.43. Выведите из предыдущего упражнения метод нахождения $\sigma_v(x)$ для любой x.

Для проверки понимания определения симметрии полезно решить следующую задачу:

▷ 8.44. Какие условия надо наложить на точки x и y, чтобы преобразования симметрии коммутировали, то есть выполнялось равенство $\sigma_x \circ \sigma_y = \sigma_y \circ \sigma_x$.

Сформулируем следующую лемму, которая бывает весьма полезна при решении задач, в формулировке которых присутствуют одна окружность и некоторое количество прямых:

Лемма 8.45. *Любую точку внутри окружности S можно перевести некоторым преобразованием σ_v в центр окружности S. Любую прямую, не пересекающую окружность S, можно перевести в бесконечно удалённую прямую.*

▷ 8.46. Докажите эту лемму.

Изложенные выше сведения о симметриях относительно плоскости из группы Лоренца позволяют практически мгновенно решить следующую стандартную задачу:

▷ 8.47. Пусть на окружности S даны 4 различных точки a, b, c и d. Определим точки пересечения прямых $x = ac \cap bd$, $y = ab \cap cd$, $z = ad \cap bc$. Тогда все три точки x, y, z полярны друг другу относительно окружности.

Вот ещё одна простая задача:

▷ 8.48. Пусть точки a, b, c попарно полярны относительно окружности S и не лежат на ней. Тогда имеет место тождество $\sigma_x \circ \sigma_y = \sigma_z$.

Для доказательства этого тождества достаточно рассмотреть действие указанных преобразований на векторах однородного пространства, соответствующих точкам a, b, c. Из этой задачи легко следует «теорема о бабочке»:

▷ 8.49. Точка o делит пополам хорду ab окружности S. Через o проведены также хорды cd и ef окружности S. Определим точки $x = ab \cap ce$ и $y = ab \cap df$, предположим что они не бесконечно удалённые. Докажите, что отрезки ox и oy имеют равные длины.

Лемма 8.50. *Если три вектора $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ компланарны, то композиция преобразований $\sigma_{\overline{z}} \circ \sigma_{\overline{y}} \circ \sigma_{\overline{x}}$ — это преобразование $\sigma_{\overline{t}}$ для некоторого вектора $\overline{t}$, компланарного $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$.*

▷ 8.51. Докажите эту лемму, используя тот факт, что все три преобразования сохраняют прямую xyz.

Так как для любой симметрии $\sigma_{\overline{t}} \circ \sigma_{\overline{t}}$ является тождественным преобразованием, то как следствие из этой леммы мы получаем, что $\sigma_{\overline{z}} \circ \sigma_{\overline{y}} \circ \sigma_{\overline{x}} \circ \sigma_{\overline{z}} \circ \sigma_{\overline{y}} \circ \sigma_{\overline{x}}$ — тождественное преобразование. Это помогает доказать такое утверждение:

▷ 8.52. Пусть точки x, y, z лежат на одной прямой и не лежат на окружности S. Пусть разные точки a, b, c, d, e, f лежат на окружности S и при этом следующие тройки точек коллинеарны: (x, a, b), (y, b, c), (z, c, d), (x, d, e) и (y, e, f). Докажите, что точки z, f, a тоже коллинеарны.

▷ 8.53. Выведите из предыдущей задачи теорему Паскаля.

▷ 8.54 (Обобщённая теорема о бабочке). Пусть o — середина хорды ab окружности S. В окружности S проведены также хорды cd и ef, причём расстояния от точек $ab \cap cd$ и $ab \cap ef$ до o равны. Докажите, что расстояния от o до $ab \cap cf$ и $ab \cap de$ также равны.

Вот ещё несколько задач для самостоятельного решения:

▷ 8.55. Дана окружность S и точки a и b вне её. Возьмём на окружности точку x, пусть прямые ax и bx пересекают окружность также в точках a_x и b_x, не считая точки x. Построить циркулем и линейкой точку x так, чтобы прямая $a_x b_x$ была параллельна ab.

▷ 8.56. Дана окружность S, точки a и b вне её и прямая ℓ. Возьмём на окружности точку x, пусть прямые ax и bx пересекают окружность также в точках a_x и b_x, не считая точки x. Постройте циркулем и линейкой точку x так, чтобы прямая $a_x b_x$ была параллельна ℓ.

▷ 8.57. Докажите, что любое проективное преобразование, оставляющее на месте окружность, является композицией симметрий.

▷ 8.58. Докажите, что любая композиция симметрий может быть представлена в виде композиции не более трёх симметрий.

▷ 8.59. Пусть вне окружности S даны разные точки x, y, z, x', y', z', при этом точка x полярна y' и z', y полярна x' и z', z полярна y' и x' относительно окружности S. Докажите, что прямые $x'x$, $y'y$, $z'z$ пересекаются в одной точке.