ФИНАЛЬНЫЙ ТУР ВСЕРОССИЙСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО ПРИКЛАДНЫМ МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ

(МАТЕМАТИКА)

22 мая 2011 г.

Вариант М

1. Существует ли замкнутое несчётное подмножество $\mathbb{R}$, состоящее только из иррациональных чисел?

   Ответ: существует.

   Решение 1. Рассмотрим числа, заданные в десятичной записи как

   $$0{,}{*}0{*}{*}0{*}{*}{*}0{*}{*}{*}{*}0{*}{*}{*}{*}{*}0{*}\ldots,$$

   и разрешим ставить вместо $*$ произвольно цифры 4 или 5. Очевидно, что полученное множество X имеет мощность континуума и не содержит рациональных чисел. Также ясно, что если последовательность чисел $x_n \in X$ сходится к x_0, то для всякой позиции k цифра дроби x_n в позиции k стабилизируется при $n \to \infty$, а значит x_0 удовлетворяет вышеуказанному шаблону и содержится в X.

   Решение 2. Занумеруем рациональные числа в виде последовательности $\{r_i\}$, и возьмём последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_i\}$, с суммой $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = 1$, тогда объединение

   $$X = \bigcup (r_i - \varepsilon_i, r_i + \varepsilon_i)$$

   является открытым множеством с мерой Лебега не более 2, содержащим все рациональные числа. Значит $Y = \mathbb{R} \setminus X$ является замкнутым множеством, состоящим из иррациональных чисел. Мера Лебега пересечения $Y \cap [-2, 2]$ не менее 2, а значит Y несчётно.

2. Существует ли непрерывная функция $y = f(x)$, принимающая каждое значение $y \in \mathbb{R}$ чётное положительное число раз?

   Ответ: нет.

   Решение. Предположим, что такая функция f существует. Заметим, что каждое значение принимается только конечное число раз. Поэтому при любом c каждый нуль x_0 функции $f(x) - c$ либо является локальным экстремумом, либо точкой смены знака, в зависимости от знака функции $f(x) - c$ на некоторых достаточно малых интервалах $(x_0-\varepsilon, x_0)$ и $(x_0, x_0+\varepsilon)$. Также отсюда следует, что все локальные максимумы и минимумы $f(x)$ строгие.

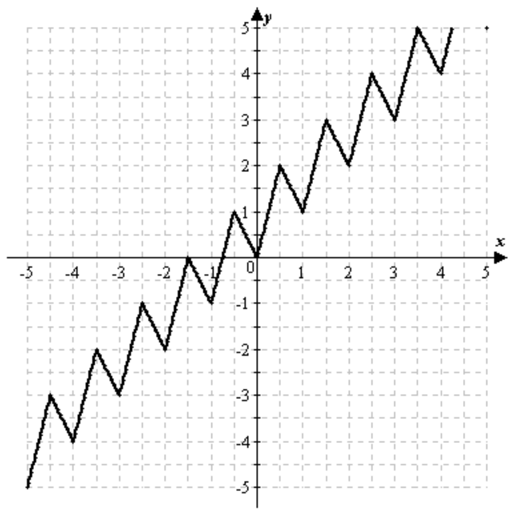
Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и обозначим M_ε^+ множество таких $x_0 \in \mathbb{R}$, что значение $f(x_0)$ строго максимально в ε-окрестности x_0. Аналогично обозначим M_ε^- для минимумов. Очевидно, что расстояние между двумя разными точками M_ε^+ не менее ε, следовательно такие множества не более чем счётны, аналогично для минимумов и множеств M_ε^-. Множество точек

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(M_{1/n}^+ \cup M_{1/n}^-\right)$$

также не более чем счётно и совпадает с множеством точек, в которых f имеет локальный максимум или минимум.

Тогда $f(M)$ не более чем счётно и существует $c \notin f(M)$. Для такого c функция $f(x)-c$ чётное число раз меняет знак в точках $x_1 < \dots < x_{2k}$. Следовательно, на интервалах $(-\infty, x_1)$ и $(x_{2k}, +\infty)$ она принимает значения одного знака. Без ограничения общности пусть это знак $-$. Тогда $f(x) > c$ только на ограниченном отрезке $[x_1, x_{2k}]$. Следовательно функция $f(x)$ ограничена сверху и не принимает некоторых значений — противоречие.

Замечание. Можно придумать функцию (см. график), которая принимает каждое значение ровно три раза.



3. Обозначим

$$E(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2n-1}^2$$

стандартную квадратичную форму на $\mathbb{R}^{2n-1}$. Пусть $Q(\bar{x})$ — другая квадратичная форма на $\mathbb{R}^{2n-1}$. Докажите, что найдётся n-мерное линейное подпространство $L \subseteq \mathbb{R}^{2n-1}$ и число $\alpha \in \mathbb{R}$, такие что для любого $\bar{x} \in L$

$$Q(\bar{x}) = \alpha E(\bar{x}).$$

Решение. Для начала выберем ортонормальный относительно E базис, в котором Q диагональна

$$Q(\bar{x}) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_{2n-1} x_{2n-1}^2.$$

Упорядочим $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{2n-1}$ и обозначим $Q' = Q - a_n E$. Приведём n-мерное линейное подпространство L, на котором Q' равна нулю, что эквивалентно равенству $Q = a_n E$ на L.

Пусть векторы v_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ имеют следующие ненулевые координаты:

- если $a_n \neq a_{n+i}$, то i-я координата равна 1, а $(n+i)$-я координата равна (квадратный корень может быть извлечён с учётом предположения упорядоченности)

$$\sqrt{\frac{a_i - a_n}{a_n - a_{n+i}}};$$

- если $a_n = a_{n+i}$, то i-я координата равна нулю, а $(n+i)$-я равна 1.

Пусть вектор v_n имеет только одну ненулевую координату 1 в позиции n. Обозначив за L линейную оболочку $v_1, v_2, \ldots, v_n$, видим, что Q' обращается в нуль на L.

4. При каких натуральных n все решения дифференциального уравнения $y^{(n)} = \sin y^4$ определены и ограничены на всей вещественной оси?

   Ответ: только при $n = 1$.

   Решение. При $n = 1$ решение всякое решение $y(x)$ либо совпадает с одной из прямых $y^4 = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, либо заключено в полосе между двумя из них. В любом случае оно должно быть ограничено.

   Если же $n \geq 2$, то заметим, что функция $\int_0^y \sin t^4 \, dt = F(y)$ ограничена по модулю некоторой константой $C > 0$. Следовательно, для всякого решения $y(x)$ при условии $y(0) = 0$ выражение $\int_0^x y^{(n)}(t)y'(t)\,dt = F(y(x))$ тоже ограничено. Если $n = 2$, то интегрирование по частям даёт:

$$y'(x)^2 - y'(0)^2 = 2F(y(x)).$$

Значит при выборе начальных условий $y(0) = 0$ и $y'(0) = \sqrt{3C}$ получаем, что $y'(x)$ никогда не обращается в нуль и остаётся не менее $\sqrt{C}$. Следовательно $y(x) \geq \sqrt{C}x$, то есть $y(x)$ не ограничена сверху.

Теперь рассмотрим случай $n \geq 3$. На этот раз интегрирование по частям даёт:

$$y^{(n-1)}(x)y'(x) - y^{(n-1)}(0)y'(0) = \int_0^x y^{(n-1)}(t)y''(t)\,dt + F(y(x)).$$

Зададим теперь начальные условия $y^{(k)}(0)$ ($k = 0, \dots, n-1$) нулевыми, кроме $y'(0) = 1$ и $y^{(n-1)}(0) = 2C$. Посмотрим, как ведёт себя $y(x)$ при $x \geq 0$. Предположим, что в некоторый момент $y^{(n-1)}(x)$ обратилась в нуль первый раз. Тогда до этого момента производная $y^{(n-1)}(x)$ была неотрицательна, а производные меньших порядков монотонно возрастали и тоже были неотрицательными. Следовательно:

$$-2C = \int_0^x y^{(n-1)}(t)y''(t)\,dt + F(y(x)) \geq 0 + F(y(x)) \geq -C,$$

противоречие. То есть $y^{(n-1)}(x)$ всегда будет оставаться неотрицательной, следовательно все более младшие производные тоже будут оставаться неотрицательными, а $y'(x)$ будет оставаться не менее 1. Следовательно $y(x) \geq x$, то есть $y(x)$ не ограничена сверху.

5. Пусть $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ — конечное множество натуральных чисел. Обозначим A_k множество сумм с целыми неотрицательными коэффициентами

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_ma_m, \quad x_1 + \dots + x_m \leq k.$$

Докажите, что найдутся такие целые числа k_0, a, b, что для любого $k \geq k_0$ имеет место равенство для мощности множества: $|A_k| = ak + b$.

Замечание. Теорема Хованского утверждает, что для не обязательно натуральных, но положительных чисел $\{a_1, \dots, a_m\}$ равенство

$|A_k| = P(k)$ выполняется для достаточно больших k, где $P(x)$ — многочлен степени не выше m.

Решение. Будем считать, что $a_1 > a_2 > \cdots > a_m$. Число $y \in A_k$ может быть представлено в виде $x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_ma_m$ с неотрицательными целыми x_i не одним способом. Выберем такое представление, в котором $\sum x_i$ минимальна. Заметим, что при этом

$$x_2 \leq a_1, x_3 \leq a_2, \ldots, x_m \leq a_{m-1},$$

так как иначе a_{k-1} чисел a_k можно «разменять» на a_k чисел a_{k-1}. В таком представлении при росте k растёт только x_1. Теперь для данного k обозначим за X_k множество таких наборов $x_2 \leq a_1, \ldots, x_m \leq a_{m-1}$, для которых возможно «упрощение»

$$(k - \sum_{i=2}^{m} x_i)a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_ma_m = x_1'a_1 + x_2'a_2 + \cdots + x_m'a_m$$

с меньшей суммой $\sum x_i'$. Прибавив к этому тождеству a_1, получим что число

$$(k + 1 - \sum_{i=2}^{m} x_i)a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_ma_m$$

тоже допускает «упрощение». То есть $X_k \subseteq X_{k+1}$. Множества X_k составляют упорядоченную по включению последовательность подмножеств фиксированного конечного множества, следовательно они стабилизируются, то есть при $k \geq k_0$ имеем: $X_k = X_{k_0}$. Множество $A_k \setminus A_{k-1}$ состоит из чисел вида

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_ma_m,$$

у которых $\sum x_i = k$, $x_i \leq a_{i-1}$ при $i \geq 2$, не допускающих «упрощения». Стабилизация X_k означает, что при $k \geq k_0$ множество $A_{k+1} \setminus A_k$ получается из $A_k \setminus A_{k-1}$ сдвигом на a_1. Следовательно, при $k \geq k_0$ числа $|A_k|$ образуют арифметическую прогрессию, что и требовалось доказать.

ФИНАЛЬНЫЙ ТУР
ВСЕРОССИЙСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ
ПО ПРИКЛАДНЫМ МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ
(МАТЕМАТИКА)
22 мая 2011 г.

Вариант A

1. Найти неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{e^x+1} + \ln\dfrac{e^x}{e^x+1} + \text{const}.$

2. При каких значениях действительного параметра a функция

$$f(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$$

имеет локальный максимум в некоторой точке?

Ответ: при $a \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

Решение. Возьмём производную:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 1.$$

Исходная функция имеет локальный максимум тогда и только тогда, когда в некоторой точке производная обращается в нуль и меняет знак с $-$ на $+$. Следовательно, дискриминант $f'(x)$ должен быть > 0, и наоборот, если он больше нуля, то один из двух корней уравнения $f'(x) = 0$ подходит. Выпишем дискриминант:

$$D = 4a^2 - 12 > 0 \Rightarrow a^2 > 3 \Rightarrow |a| > \sqrt{3}.$$

3. Вычислите

$$\int_0^{\pi/2} (\sin^2(\sin x) + \cos^2(\cos x))dx.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\sin^2(\sin x) + \cos^2(\cos x) = \sin^2(\sin x) + 1 - \sin^2(\sin(\pi/2 - x)).$$

Но, сделав замену $t = \pi/2 - x$, получаем

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(\sin(\pi/2 - x))dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2(\sin t)dt.$$

Поэтому

$$\int_0^{\pi/2}(\sin^2(\sin x)+\cos^2(\cos x))dx = \int_0^{\pi/2}(\sin^2(\sin x)+1-\sin^2(\sin(\pi/2-x))dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

4. В квадратной матрице с действительными элементами заданы все элементы, кроме лежащих на диагонали. Доказать, что на пустых местах можно расставить нули и единицы так, чтобы определитель матрицы оказался ненулевым.

   Решение. Доказательство проведём индукцией по n. База индукции очевидна. Проведём переход от k к $k+1$. Поставим в левый верхний угол матрицы матрицы число x. По предположению индукции можно сделать так, чтобы дополнительный минор M этого элемента удовлетворял предположению индукции. Раскладывая определитель матрицы по первой строке, получим, что он равен $x \cdot \det M$ плюс слагаемые, не зависящие от x. Так как $\det M \neq 0$, то либо при $x = 1$, либо при $x = 0$ определитель матрицы не равен нулю.

5. Докажите, что центры всех окружностей, вписанных в заданный круговой сегмент, лежат на одной параболе.

   Решение. Пусть радиус окружности сегмента Ω равен R, а расстояние от центра Ω до хорды ℓ сегмента h (знак h отрицательный если сегмент стягивает дугу больше π). Тогда по определению всякий центр окружности ω, касающейся Ω и ℓ внутри сегмента отстоит на равное расстояние r от ℓ и Ω. Следовательно, расстояние центра ω от центра Ω (пусть это 0) равно $R-r$, и оно же равно расстоянию от центра ω до прямой ℓ', параллельной ℓ и находяшейся на расстоянии

$R+h$ от центра Ω. Следовательно, для всякого центра ω его расстояния до 0 и ℓ' равны, что является геометрическим определением параболы.

Также эта задача допускает прямой подсчёт в координатах.