ФИНАЛЬНЫЙ ТУР
ВСЕРОССИЙСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ
ПО ПРИКЛАДНЫМ МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ
(МАТЕМАТИКА)
22 мая 2011 г.

Вариант М

1. Существует ли замкнутое несчётное подмножество $\mathbb{R}$, состоящее только из иррациональных чисел?

2. Существует ли непрерывная функция $y = f(x)$, принимающая каждое значение $y \in \mathbb{R}$ чётное положительное число раз?

3. Обозначим
$$E(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2n-1}^2$$
стандартную квадратичную форму на $\mathbb{R}^{2n-1}$. Пусть $Q(\bar{x})$ — другая квадратичная форма на $\mathbb{R}^{2n-1}$. Докажите, что найдётся n-мерное линейное подпространство $L \subseteq \mathbb{R}^{2n-1}$ и число $\alpha \in \mathbb{R}$, такие что для любого $\bar{x} \in L$
$$Q(\bar{x}) = \alpha E(\bar{x}).$$

4. При каких натуральных n все решения дифференциального уравнения $y^{(n)} = \sin y^4$ определены и ограничены на всей вещественной оси?

5. Пусть $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ — конечное множество натуральных чисел. Обозначим A_k множество сумм с целыми неотрицательными коэффициентами
$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_ma_m, \quad x_1 + \cdots + x_m \leq k.$$
Докажите, что найдутся такие целые числа k_0, a, b, что для любого $k \geq k_0$ имеет место равенство для мощности множества: $|A_k| = ak + b$.

ФИНАЛЬНЫЙ ТУР
ВСЕРОССИЙСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ
ПО ПРИКЛАДНЫМ МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ
(МАТЕМАТИКА)
22 мая 2011 г.

Вариант A

1. Найти неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}.$$

2. При каких значениях действительного параметра a функция

$$f(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$$

имеет локальный максимум в некоторой точке?

3. Вычислите

$$\int_0^{\pi/2} (\sin^2(\sin x) + \cos^2(\cos x))dx.$$

4. В квадратной матрице с действительными элементами заданы все элементы, кроме лежащих на диагонали. Доказать, что на пустых местах можно расставить нули и единицы так, чтобы определитель матрицы оказался ненулевым.

5. Докажите, что центры всех окружностей, вписанных в заданный круговой сегмент, лежат на одной параболе.