Задачи группы А с решениями

(1) (6 очков) Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемая функция, и существует такое число $\varepsilon > 0$, что функция $f(x) - \varepsilon\|x\|^2$ выпуклая на $\mathbb{R}^n$. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — точка глобального минимума f. Доказать, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) - f(x_0) \geq \varepsilon\|x - x_0\|^2.$$

Решение. Из условия следует, что функция $g(x) = f(x) - \varepsilon\|x - x_0\|^2$ выпуклая на $\mathbb{R}^n$. Для функции g в силу выпуклости

$$g(x) \geq g(x_0) + (g'(x_0), x - x_0),$$

но $g'(x_0) = f'(x_0) - k(x - x_0)|_{x=x_0} = 0$. Отсюда выполняется условие глобального минимума $g(x) \geq g(x_0)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, или, что то же,

$$f(x) - \varepsilon\|x - x_0\|^2 \geq f(x_0).$$

(2) (6 очков) Докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

имеет первообразную.

Решение. Рассмотрим функцию

$$G(x) = \begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

её производная равна

$$G'(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} + 2x\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Функция

$$h(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

непрерывна, следовательно имеет первообразную $H(x)$, и тогда $G(x) - H(x)$ будет первообразной для $f(x)$.

(3) ($4 + 6 = 10$ очков) Дана матрица A размера 2010×2010, каждый элемент которой — либо 1, либо -1, причём в каждой строке единиц чётное число.

а) Докажите, что $\det A$ делится на 2^{2009}.

б) Докажите, что $\det A$ делится на 2^{2010}.

Решение.

а) Прибавим первую строку ко 2-й, 3-й, …, 2010-й. Определитель при этом не изменится, а в каждой строке, кроме первой, будут стоять только чётные числа. Вынесем двойку из всех строк кроме первой, получим целочисленную матрицу B, такую что $\det A = 2^{2009}\det B$.

б) Перед тем, что было сделано в пункте (а), домножим столбцы на ± 1 так, чтобы в первой строке стояли только единицы. Определитель при этом умножится на ± 1, что несущественно. Каждое умножение столбца на -1 меняет чётность количества единиц в строках, а так как этих умножений было чётное число (равное количеству -1 в первой строке), то в каждой строке после этого останется чётное число единиц (и минус единиц).

После прибавления ко всем строкам первой и выноса 2^{2009} из определителя, оставшаяся матрица B будет иметь первую строку из одних единиц, а остальные строки из нулей и единиц, причём количество единиц в каждой строке (включая первую) будет чётным. Рассмотрим теперь B как матрицу из чисел по модулю 2, тогда все её строки удовлетворяют линейному соотношению $\sum_j b_{ij} = 0$, то есть ранг матрицы не более 2009, а детерминант равен нулю. Возвращаясь к целым числам от остатков по модулю два, получаем что $\det B$ делится на 2, а $\det A$ делится на 2^{2010}.

(4) (10 очков) Пусть $V = \mathbb{R}^n$, точки

$$p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_k \in V$$

таковы, что $\|p_i - p_j\| > \|q_i - q_j\|$ при всех $i \neq j$. Докажите, что в $2n$-мерном пространстве существуют такие непрерывно параметризованные кривые $f_i : [0, 1] \to V \times V$, что $f_i(0) = (p_i, 0)$, $f_i(1) = (q_i, 0)$, и функции $g_{ij}(t) = \|f_i(t) - f_j(t)\|$ строго убывают при всех $i \neq j$.

Решение. Зададим кривые явно

$$f_i(t)=\left(\frac{p_i+q_i}{2}+\cos(\pi t)\frac{p_i-q_i}{2},\sin(\pi t)\frac{p_i-q_i}{2}\right),$$

и покажем, что они удовлетворяют требуемым условиям. Очевидно, что $f_i(0)=p_i$, $f_i(1)=q_i$. Далее,

$$\begin{aligned}4\|f_i(t)-f_j(t)\|^2 &=\\ &=\|(p_i+q_i)+\cos(\pi t)(p_i-q_i)-(p_j+q_j)-\cos(\pi t)(p_j-q_j)\|^2+\\ &+\|\sin(\pi t)(p_i-q_i)-\sin(\pi t)(p_j-q_j)\|^2=\\ &=\|((p_i-p_j)+(q_i-q_j))+\cos(\pi t)((p_i-p_j)-(q_i-q_j))\|^2+\\ &+\|\sin(\pi t)((p_i-p_j)-(q_i-q_j))\|^2=\\ &=\big\|((p_i-p_j)+(q_i-q_j))\|^2+\cos 2(\pi t)\|((p_i-p_j)-(q_i-q_j))\big\|^2+\\ &+2\cos(\pi t)\left\langle(p_i-p_j)+(q_i-q_j),(p_i-p_j)-(q_i-q_j)\right\rangle+\\ &+\sin 2(\pi t)\,\|((p_i-p_j)-(q_i-q_j))\|^2=\\ &=\big\|((p_i-p_j)+(q_i-q_j))\|^2+\|((p_i-p_j)-(q_i-q_j))\big\|^2+\\ &\qquad+2\cos(\pi t)\left(\|p_i-p_j\|^2-\|q_i-q_j\|^2\right),\end{aligned}$$

что убывает, ибо $\|p_i-p_j\|>\|q_i-q_j\|$.

(5) (10 очков) Точка x имеет равномерное распределение на единичной сфере из $\mathbb{R}^n$. Точка y, $\|y\|=1$, зафиксирована. Пусть l_n — среднее расстояние между точками x и y. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} l_n$.

Решение. Пусть $S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\|x\|=1\}$, $\sigma_{n-1}=\mu_{n-1}S^{n-1}$, где $\mu_{n-1}G$ — площадь множества $G\subset S^{n-1}$ ($(n-1)$-мерная мера Жордана). Будем считать $y=e_1=(1,0,\dots,0)$. Тогда

$$l_n=M\|e_1-x\|=\frac{1}{\sigma_{n-1}}\int\limits_{S^{n-1}}\|e_1-x\|\,d\mu_{n-1}=$$
$$=\sqrt{2}\,\frac{1}{\sigma_{n-1}}\int\limits_{S^{n-1}}\sqrt{1-(e_1,x)}\,d\mu_{n-1}.$$

В силу неравенства Коши-Буняковского

$$\frac{1}{\sigma_{n-1}}\int\limits_{S^{n-1}}\sqrt{1-(e_1,x)}\,d\mu_{n-1}\le \tag{1}$$
$$\le\frac{1}{\sigma_{n-1}}\sqrt{\int\limits_{S^{n-1}}(1-(e_1,x))\,d\mu_{n-1}}\sqrt{\int\limits_{S^{n-1}}d\mu_{n-1}}=1.$$

Определим для всякого $\varepsilon\in(0,1)$ множество $S^{n-1}_\varepsilon=\{x\in S^{n-1}\mid|(e_1,x)|>\varepsilon\}$. В силу неравенства Чебышева получаем

$$\mu_{n-1}S^{n-1}_\varepsilon\le\tfrac{1}{\varepsilon}\int\limits_{S^{n-1}}|(e_1,x)|\,d\mu_{n-1}\le$$
$$\le\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\int\limits_{S^{n-1}}(e_1,x)^2\,d\mu_{n-1}}\sqrt{\int\limits_{S^{n-1}}d\mu_{n-1}}=$$
$$=\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\int\limits_{S^{n-1}}\frac{1}{n}\|x\|^2\,d\mu_{n-1}}\sqrt{\int\limits_{S^{n-1}}d\mu_{n-1}}=\frac{\sigma_{n-1}}{\varepsilon\sqrt{n}}.$$

Итак,

$$\frac{\mu_{n-1}S^{n-1}_\varepsilon}{\sigma_{n-1}}\le\frac{1}{\varepsilon\sqrt{n}}.$$

Отсюда для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon^4}\right] + 1$ такое, что для всех $n > n_\varepsilon$ имеем оценку

$$\frac{1}{\sigma_{n-1}} \int\limits_{S^{n-1}} \sqrt{1-(e_1,x)}\, d\mu_{n-1} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int\limits_{S^{n-1}\setminus S^{n-1}_\varepsilon} \sqrt{1-\varepsilon}\, d\mu_{n-1} =$$

$$= \frac{\sigma_{n-1} - \mu_{n-1} S^{n-1}_\varepsilon}{\sigma_{n-1}} \sqrt{1-\varepsilon} \geq$$

$$\geq \sqrt{1-\varepsilon}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon\sqrt{n}}\right) \geq \sqrt{1-\varepsilon}\,(1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)^{3/2}.$$

Вместе с формулой 1 это значит, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_{n-1}} \int\limits_{S^{n-1}} \sqrt{1-(e_1,x)}\, d\mu_{n-1} = 1,$$

а следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = \sqrt{2}$.

Задачи группы Б с решениями

(1) (2 очка) Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right).$$

Ответ: 1.

(2) (2 очка) Линейный оператор $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан по формуле

$$A(\bar{x}) = [\bar{c}, \bar{x}],$$

где $\bar{c}$ — постоянный вектор, $[\cdot,\cdot]$ – векторное произведение. Найти собственные значения A.

Ответ: $0, i|\bar{c}|, -i|\bar{c}|$.

(3) (2 очка) Исследовать на сходимость при всех значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^\alpha}\, dx\,.$$

Ответ: сходится абсолютно при $x \in (3,4)$.

(4) (2 очка) Решить задачу Коши

$$y'' = e^y, \quad y(0) = 0, y'(0) = -\sqrt{2}.$$

Ответ: $y = 2\ln\left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

(5) (2 очка) Найти интеграл

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z dz}{\cos\frac{1}{z}}.$$

Ответ: πi.

(6) (6 очков) Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемая функция, и существует такое число $\varepsilon > 0$, что функция $f(x) - \varepsilon\|x\|^2$ выпуклая на $\mathbb{R}^n$. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — точка глобального минимума f. Доказать, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) - f(x_0) \geq \varepsilon\|x - x_0\|^2.$$

Решение. См. решение задачи А.1.