1. Теоремы Каратеодори, Хелли и их аналоги

1.1 (Теорема Каратеодори). Назовём *выпуклой оболочкой* множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ минимальное выпуклое множество, содержащее X, обозначим $\operatorname{conv} X$. Докажите, что

$$\operatorname{conv} X = \bigcup_{Y \subseteq X \ |Y| \le n+1} \operatorname{conv} Y.$$

1.2 (Теорема Фенхеля). Докажите, что если в предыдущей теореме X связно, то

$$\operatorname{conv} X = \bigcup_{Y \subseteq X \ |Y| \le n} \operatorname{conv} Y.$$

1.3 (Цветная теорема Каратеодори–Бараня). Докажите, что если $X_0, \dots, X_n$ — множества в $\mathbb{R}^n$, каждое из которых содержит 0 в своей выпуклой оболочке, то существует система представителей $x_0 \in X_0, x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$, для которой

$$0 \in \operatorname{conv}\{x_0, x_1, \dots, x_n\}.$$

1.4. Докажите, что если $X_1, \dots, X_n$ — связные множества в $\mathbb{R}^n$, каждое из которых содержит 0 в своей выпуклой оболочке, то существует система представителей $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$, для которой

$$0 \in \operatorname{conv}\{x_1, x_1, \dots, x_n\}.$$

1.5 (Теорема Радона). Докажете, что множество X из $n+2$ точек в $\mathbb{R}^n$ можно разбить на два непустых множества $X = Y \sqcup Z$ так, что

$$\operatorname{conv} Y \cap \operatorname{conv} Z \neq \emptyset.$$

1.6 (Теорема Хелли). Пусть конечное семейство $\mathcal{F}$ выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$ обладает свойством, что любые $n+1$ или менее множеств семейства имеют общую точку. Докажите, что все множества семейства $\mathcal{F}$ имеют общую точку ($\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.). Верно ли утверждение, если семейство бесконечно?

1.7. Пусть X — компактное подмножество $\mathbb{R}^n$. Докажите, что если любое его подмножество из $n+1$ или менее точек можно накрыть единичным шаром, то всё X можно накрыть единичным шаром.

1.8 (Теорема Юнга). Докажите, что множество $X \subset \mathbb{R}^n$ диаметра $\sqrt{2+2/n}$ можно накрыть единичным шаром.

1.9. Пусть X — компактное подмножество $\mathbb{R}^n$. Докажите, что если любое его подмножество из $n+1$ или менее точек можно накрыть единичным шаром, не содержащим начало координат, то всё X можно накрыть единичным шаром, не содержащим начало координат.

1.10 (Цветная теорема Хелли). Пусть $n+1$ непустое конечное семейство выпуклых множеств $\mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_n$ обладает таким свойством: каждая система представителей

$$C_0 \in \mathcal{F}_0, \dots, C_n \in \mathcal{F}_n$$

имеет общую точку. Докажите, что некоторое $\mathcal{F}_i$ имеет общую точку.

1.11 (Теорема Тверберга). Докажите, что множество $X \subset \mathbb{R}^n$ из $(n+1)(r-1)+1$ точки можно разбить на r частей $X = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_r$ так, что

$$\operatorname{conv} X_1 \cap \dots \cap \operatorname{conv} X_r \neq \emptyset.$$

1.12 (Теорема о центральной точке). Пусть μ — конечная борелевская мера на $\mathbb{R}^n$. Докажите, что найдётся точка $c \in \mathbb{R}^n$ со следующим свойством: для любого полупространства $H \ni c$

$$\mu(H) \ge \frac{1}{n+1} \mu(\mathbb{R}^n).$$

1.13 (Теорема Кнастера–Куратовского–Мазуркевича). * Пусть n-мерный симплекс S с гипергранями $F_0, \dots, F_n$ покрыт замкнутыми множествами $X_0, \dots, X_n$ так, что $X_i \cap F_i = \emptyset$ для всех i. Докажите, что множества $X_0, \dots, X_n$ имеют общую точку.

1.14 (Топологическая теорема Хелли, один из вариантов). * Пусть конечное семейство $\mathcal{F}$ множеств в $\mathbb{R}^n$ обладает свойством, что любые $n+1$ или менее множеств семейства имеют общую точку, а также пусть $\bigcap \mathcal{G}$ для любого подсемейства $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ либо пусто, либо стягиваемо. Докажите, что все множества семейства $\mathcal{F}$ имеют общую точку ($\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.).

2. Неравенства для объёмов и интегралов

2.1. Пусть $X, Y \subseteq \mathbb{R}^1$ — конечные подмножества. Докажите для множества

$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$$

неравенство

$$|X + Y| \geq |X| + |Y| - 1.$$

2.2 (Неравенство Брунна–Минковского на прямой). Пусть $X, Y \subseteq \mathbb{R}^1$ — измеримые подмножества, меру Лебега будем обозначать vol. Докажите неравенство

$$\operatorname{vol}(X + Y) \geq \operatorname{vol}(X) + \operatorname{vol}(Y).$$

2.3 (Функциональное неравенство Брунна–Минковского на прямой). Пусть $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ — измеримые функции, а $t \in (0, 1)$. Предположим, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполняется

$$h((1-t)x + ty) \geq f(x)^{1-t} g(x)^t.$$

Докажите, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, dx \geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \right)^{1-t} \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx \right)^t.$$

2.4 (Функциональное неравенство Брунна–Минковского). Докажите, что предыдущее неравенство верно и для функций n переменных и их интегралов по всему пространству, используйте индукцию по n.

2.5 (Неравенство Брунна–Минковского). Докажите, что для двух измеримых множеств $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ и $t \in (0, 1)$ выполняется

$$\operatorname{vol}((1-t)X + tY) \geq \operatorname{vol}(X)^{1-t} \cdot \operatorname{vol}(Y)^t.$$

Используя гомотетию и варьирование параметра t, докажите также

$$\operatorname{vol}(X + Y)^{1/n} \geq \operatorname{vol}(X)^{1/n} + \operatorname{vol}(Y)^{1/n}.$$

2.6. Обозначим t-окрестность множества X через $U_t(X)$. Определим нижнюю площадь поверхности по Минковскому

$$\underline{\operatorname{vol}}_{n-1}^{+} X = \liminf_{t \to +0} \frac{\operatorname{vol} U_t(X) - \operatorname{vol} X}{t}.$$

Докажите, что для множества X с границей класса C^2 это просто риманова $(n-1)$-мерная площадь поверхности.

2.7 (Изопериметрическая задача для площади по Минковскому). Докажите, что при фиксированном $\operatorname{vol} X$ минимальное $\underline{\operatorname{vol}}_{n-1}^{+} X$ достигается для шара. Выпишете соответствующую оценку площади поверхности через объём.

2.8 (Неравенство Прекопы–Ляйндлера). Пусть плотность $f : \mathbb{R}^n \to (0, +\infty)$ k-сильно логарифмически вогнута при некотором $k \geq 0$, то есть

$$d^2(\log f) \leq -2k(dx_1^2 + \cdots + dx_n^2)$$

в смысле обобщённых функций или, эквивалентно,

$$f((1-t)x + ty) \geq f(x)^{1-t} f(y)^t e^{kt(1-t)}$$

для $x, y \in \mathbb{R}^n$ и любого $t \in [0, 1]$. Докажите, что проекция плотности

$$g(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)\, dx_n$$

тоже k-сильно логарифмически вогнута. Докажите то же по индукции для проекции на подпространства меньшей размерности.

2.9. Назовём борелевскую меру μ на $\mathbb{R}^n$ *логарифмически вогнутой*, если

$$\mu((1-t)X + tY) \geq \mu(X)^{1-t} \cdot \mu(Y)^t$$

для любых выпуклых тел X и Y. Докажите, что для меры с плотностью это эквивалентно логарифмической вогнутости плотности (при $k = 0$ в предыдущей задаче).

2.10 (Неравенство Шидака). Пусть γ — радиально-симметричная вероятностная гауссова мера в $\mathbb{R}^n$, K центрально-симметричное выпуклое тело, B — единичный шар, а L — линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что

$$\gamma(K \cap (L + tB)) \geq \gamma(K) \cdot \gamma(L + tB)$$

для любого $t > 0$. Используйте сильную логарифмическую вогнутость проекции $\gamma|_K$ на $L^\perp$.

2.11 (Неравенство Шидака). Пусть γ — радиально-симметричная вероятностная гауссова мера в $\mathbb{R}^n$, B — единичный шар, $L_1, \dots, L_m$ — линейные подпространства в $\mathbb{R}^n$, а $t_1, \dots, t_m$ — положительные числа. Докажите по индукции, используя предыдущую задачу, что

$$\gamma\left(\bigcap_{i=1}^m (L_i + t_i B)\right) \geq \prod_{i=1}^m \gamma(L_i + t_i B).$$

2.12 (Несимметричное неравенство Шидака). Пусть γ — радиально-симметричная вероятностная гауссова мера в $\mathbb{R}^n$, K — не обязательно центрально-симметричное выпуклое тело, B — единичный шар, а L — линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что найдётся такой вектор $v \in \mathbb{R}^n$, что

$$\gamma(K \cap (L + tB + v)) \geq \gamma(K) \cdot \gamma(L + tB)$$

для любого $t > 0$. Используйте сильную логарифмическую вогнутость проекции $\gamma|_K$ на $L^\perp$ и найдите максимум её плотности.

2.13. * Докажите, что конечную логарифмически вогнутую меру μ на $\mathbb{R}^n$ можно сколь угодно близко приблизить проекциями равномерных мер на выпуклых множествах.

2.14. Пусть K и L — центрально симметричные выпуклые тела. Докажите, что максимум объёма $\operatorname{vol} K \cap (L + t)$ по сдвигам $t \in \mathbb{R}^n$ достигается при $t = 0$.

2.15 (Неравенство Роджерса–Шепарда). Докажите неравенство для выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{vol}(K - K) \leq \binom{2n}{n} \operatorname{vol} K.$$

2.16. * Докажите, что всякое выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^n$ можно сдвинуть так, чтобы выполнялось

$$\operatorname{vol}(K \cap (-K)) \geq 2^{-n} \operatorname{vol} K.$$

** Постарайтесь улучшить эту оценку.

2.17 (Теорема Грюнбаума–Хаммера). Докажите, что в выпуклом теле K есть точка $m \in K$ со следующим свойством: любая гиперплоскость, содержащая m, содержит не менее $1/e$ от объёма K.

2.18 (Теорема о центральной точке для логарифически вогнутых мер). Докажите, что для конечной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$ найдётся точка $m \in \mathbb{R}^n$ со следующим свойством: для любой гиперплоскости $H \ni m$

$$\mu(H) \geq \frac{1}{e}\mu(\mathbb{R}^n).$$

2.19. Докажите, что для выпуклых тел K и L выражение

$$\operatorname{vol}(K + tL)$$

является многочленом от $t \geq 0$. Докажите, что коэффициенты этого многочлена являются монотонными по включению функциями от K и L.

2.20 (Концентрация гауссовой меры). * Пусть μ — гауссова мера на $\mathbb{R}^n$, то есть мера с плотностью вида $Ae^{-\alpha|x|^2}$. Рассмотрим некоторое открытое множество U и полупространство H с равными мерами $\mu(H) = \mu(U)$. Тогда для их ε-окрестностей мы получим:

$$\mu(U_\varepsilon) \geq \mu(H_\varepsilon).$$

2.21 (Концентрация на сфере). ** Для меры σ на сфере S^n, симметричной относительно вращений, рассмотрим открытое множество U и полупространство $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$, такие что $\sigma(H \cap S^n) = \sigma(U)$. Тогда для их ε-окрестностей (в геодезической метрике на сфере S^n) верно

$$\sigma(U_\varepsilon) \geq \sigma((H \cap S^n)_\varepsilon).$$

3. Многогранники и выпуклые тела

3.1. Докажите, что ограниченное решение конечной системы линейных неравенств в $\mathbb{R}^n$ является *многогранником*, то есть выпуклой оболочкой конечного множества точек.

3.2. Разбиение $\mathbb{R}^n$ называется регулярным, если оно является проекцией графика выпуклой кусочно-линейной функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (то есть является разбиением на максимальные участки линейности этой функции). Приведите примеры не регулярных разбиений $\mathbb{R}^2$ на выпуклые части.

3.3 (Теорема Эдельсбруннера). Докажите, что всякое регулярное разбиение $\mathbb{R}^n$ упорядочено относительно любого направления $n \in \mathbb{S}^{n-1}$. А именно, части разбиения можно упорядочить так, что при движении в направлении n из любой точки они будут встречаться в данном порядке.

3.4. * Регулярным разбиением множества $X \subset \mathbb{R}^n$ назовём ограничение регулярного разбиения $\mathbb{R}^n$ на X. Докажите, что если $B^n = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_N$ — регулярное разбиение единичного шара некоторой нормы в $\mathbb{R}^n$, то в часть P_i можно вписать шар (той же нормы) радиуса r_i так, что

$$r_1 + r_2 + \dots + r_N \geq 1.$$

3.5. * Докажите, что в размерности 2 в задаче 3.4 условие регулярности разбиения не нужно.

3.6 (Теорема Кадеца, см. также 6.4). ** Докажите, что в любой размерности для евклидова шара в задаче 3.4 условие регулярности разбиения не нужно, а также разбиение можно заменить на покрытие выпуклыми множествами.

3.7 (Нерешённая задача – гипотеза К. Бездека). *** Докажите, что в любой размерности для любой нормы в задаче 3.4 условие регулярности разбиения не нужно.

3.8 (Теорема Минковского — формула). Пусть у многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ полной размерности гиперграни $F_1, \ldots, F_N$ имеют нормали $\nu_1, \ldots, \nu_N$ и площади $A_1, \ldots, A_N$, докажите, что

$$\nu_1 A_1 + \cdots + \nu_N A_N = 0.$$

3.9 (Теорема Минковского — существование и единственность). ** Докажите, что для любого набора площадей и нормалей, удовлетворяющих условию

$$\nu_1 A_1 + \cdots + \nu_N A_N = 0,$$

и дополнительно условию порождения всего $\mathbb{R}^n$ нормалями, существует многогранник с такими площадями и нормалями граней. Докажите, что он определён единственным образом с точностью до параллельных переносов.

3.10. Пусть $\mathbb{R}^n$ разбито на сдвиги одного и того же многогранника P. Докажите, что P центрально симметричен.

3.11. Дано центрально-симметричное выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^n$ и дано число $\varepsilon \in (0, 1)$. Докажите, что найдётся многогранник L с не более чем $3^n \varepsilon^{1-n}$ вершинами, такой что $(1 - \varepsilon)K \subseteq L \subseteq K$.

3.12. Докажите, что если $K \subset \mathbb{R}^n$ в предыдущей задаче является шаром, то оценка на количество вершин улучшается до $c_n \varepsilon^{(1-n)/2}$ с некоторой константой c_n, зависящей только от размерности.

3.13 (Теорема Джона). Предположим, что $K \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое тело, такое что единичный шар B является эллипсоидом максимального объёма в K. Докажите, что найдутся вектора $v_1, \ldots, v_m \in \partial K \cap \partial B$ и положительные коэффициенты $c_1, \ldots, c_m > 0$, такие что

$$\sum_i c_i v_i = 0, \quad \text{и} \quad \sum_i c_i v_i \otimes v_i = I,$$

где I — стандартная квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$.

3.14 (Тоже теорема Джона). Докажите, что в условиях предыдущей задачи $K \subseteq nB$, а если K центрально симметрично, то $K \subseteq \sqrt{n}B$.

3.15 (Лемма Дворецкого–Роджерса). * Докажите, что в условиях предыдущих задач можно перенумеровать n из векторов v_i так, чтобы получилось

$$\operatorname{dist}(v_i, \operatorname{aff}\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}) \geq \sqrt{\frac{n - i + 1}{n}}$$

для $i = 2, \ldots, n$.

3.16. ** Докажите, что существует константа $C > 0$, такая что для всяких двух выпуклых тел $K, L \subset \mathbb{R}^n$ найдётся аффинное преобразование $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, такое что

$$TK \subseteq L \quad \text{и} \quad \operatorname{vol} L \leq C^n n^n \operatorname{vol} TK.$$

Начните со случая центрально-симметричных K и L. *** Постарайтесь уменьшить выражение n^n в правой части.

3.17 (Нерешённая задача — гипотеза Вороного). *** Пусть $\mathbb{R}^n$ разбито на сдвиги одного и того же многогранника P. Докажите, что это разбиение регулярно.

3.18 (Теорема Бараня–Ловаса). ** Многогранник в $\mathbb{R}^n$ полной размерности называется *простым*, если в каждой его вершине сходятся n рёбер. Докажите, что любой центрально-симметричный простой многогранник в $\mathbb{R}^n$ имеет не менее 2^n вершин.

3.19 (Теорема Стэнли). ** Докажите, что центрально-симметричный простой многогранник в $\mathbb{R}^n$ имеет не менее 3^n граней всех размерностей (сам многогранник считается за n-мерную грань).

4. Объединения и пересечения шаров

4.1 (Теорема Эдельсбруннера). * Рассмотрим объединение шаров $B_{c_i}(R_i)$. Для каждого шара выпишем функцию

$$f_i(x) = R_i^2 - |x - c_i|^2,$$

и определим часть

$$P_i = \{x \in \bigcup_i B_{c_i}(R_i) : \forall j\ f_i(x) \geq f_j(x)\}.$$

Докажите, что формула включений-исключений может быть упрощена до

$$\operatorname{vol} \bigcup_i B_{c_i}(R_i) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{P_{i_1} \cap \dots \cap P_{i_k} \neq \emptyset} \operatorname{vol} \left(B_{c_{i_1}}(R_{i_1}) \cap \dots \cap B_{c_{i_k}}(R_{i_k}) \right).$$

4.2 (Теорема Чикоша). * Докажите, что если евклидовы шары в $\mathbb{R}^n$ движутся так, что их радиусы не меняются, а попарные расстояния между центрами не увеличиваются, то объём их объединения не увеличивается, а объём их пересечения не уменьшается. Рассмотрите части P_i из предыдущей задачи и их аналоги для пересечения.

4.3. Докажите, что для $n+1$ точки $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}^n$ и ещё $n+1$ точки $c'_0, c'_1, \dots, c'_n \in \mathbb{R}^n$ при условии

$$\forall i, j\ |c'_i - c'_j| \leq |c_i - c_j|$$

можно найти непрерывное движение $c_0(t), c_1(t), \dots, c_n(t)$ со следующими свойствами: для любого i, $c_i(0) = c_i$, $c_i(1) = c'_i$; для любых i, j расстояния $|c_i(t) - c_j(t)|$ не возрастают по t.

4.4. Пусть у нас есть N точек $c_1, c_2, \dots, c_N \in \mathbb{R}^n$ и ещё N точек $c'_1, c'_2, \dots, c'_N \in \mathbb{R}^n$ с условием

$$\forall i, j\ |c'_i - c'_j| \leq |c_i - c_j|.$$

Докажите, что можно рассмотреть $\mathbb{R}^n$ как подпространство $\mathbb{R}^{2n}$ и найти непрерывное движение $c_0(t), c_1(t), \dots, c_n(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ со следующими свойствами: для любого i, $c_i(0) = c_i$, $c_i(1) = c'_i$; для любых i, j расстояния $|c_i(t) - c_j(t)|$ не возрастают по t.

4.5 (Теорема Киршбрауна). Пусть у нас есть N точек $c_1, c_2, \dots, c_N \in \mathbb{R}^n$ и ещё N точек $c'_1, c'_2, \dots, c'_N \in \mathbb{R}^n$ с условием

$$\forall i, j\ |c'_i - c'_j| \leq |c_i - c_j|,$$

и есть N радиусов $R_1, R_2, \dots, R_N$. Докажите, что если шары $\{B_{c_i}(R_i)\}_{i=1}^N$ имели непустое пересечение, то шары $\{B_{c'_i}(R_i)\}_{i=1}^N$ тоже имеют непустое пересечение.

4.6 (Теорема Киршбрауна). Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ и отображение $f : X \to \mathbb{R}^n$ является 1-*липшицевым*, то есть $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ для всех $x, y \in X$. Докажите, что f можно продолжить до 1-липшицевого отображения $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

4.7 (Теорема Бездека–Коннели). *** Пусть у нас есть N точек $c_1, c_2, \dots, c_N \in \mathbb{R}^2$ и ещё N точек $c'_1, c'_2, \dots, c'_N \in \mathbb{R}^2$ с условием

$$\forall i, j\ |c'_i - c'_j| \le |c_i - c_j|,$$

и есть N радиусов $R_1, R_2, \dots, R_N$. Докажите, что

$$\operatorname{vol} \bigcup_{i=1}^N B_{c_i}(R_i) \ge \operatorname{vol} \bigcup_{i=1}^N B_{c'_i}(R_i).$$

4.8 (Нерешённая задача — гипотеза Кнезера–Поулсена). *** Пусть у нас есть N точек $c_1, c_2, \dots, c_N \in \mathbb{R}^n$ и ещё N точек $c'_1, c'_2, \dots, c'_N \in \mathbb{R}^n$, $n \ge 3$, с условием

$$\forall i, j\ |c'_i - c'_j| \le |c_i - c_j|,$$

и есть N радиусов $R_1, R_2, \dots, R_N$. Докажите, что

$$\operatorname{vol} \bigcup_{i=1}^N B_{c_i}(R_i) \ge \operatorname{vol} \bigcup_{i=1}^N B_{c'_i}(R_i).$$

5. Покрытие одним шаром

5.1 (Теорема Гудмана–Гудмана). Пусть набор шаров в произвольной норме $\mathbb{R}^n$ обладает свойством *неотделимости*: нет гиперплоскостей, не пересекающих ни один из данных шаров и имеющих шары с обоих сторон от себя. Докажите, что неотделимый набор шаров радиусов $R_1, R_2, \dots, R_N$ можно накрыть одним шаром радиуса $R_1 + R_2 + \dots + R_N$.

5.2. Докажите, что связный граф в $\mathbb{R}^n$ (нарисованный отрезками) длины 2 в некоторой норме можно накрыть шаром радиуса 1 в этой норме.

5.3. Докажите, что замкнутую ломаную в $\mathbb{R}^n$ длины 4 в некоторой норме можно накрыть шаром радиуса 1 в этой норме.

5.4. Докажите, что если на границе единичного евклидова шара $B \subseteq \mathbb{R}^n$ находится гладкая кривая длины менее 2π, то её можно накрыть меньшим евклидовым шаром.

6. Покрытие полосками

Полоской в $V = \mathbb{R}^n$ назовём множество, задаваемое неравенствами (относительно q при фиксированном p) $a \le \langle p, q \rangle \le b$. Как нетрудно убедиться, ширина полоски в некоторой норме $\|\cdot\|$ равна $\frac{b-a}{\|p\|_*}$ (здесь двойственная норма).

Начнём со случая евклидовой нормы:

6.1 (Теорема Моэсе). Докажите, в размерности 2 и 3, что евклидов единичный шар нельзя покрыть конечным набором полосок с суммой ширин меньше 2.

6.2. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое тело, для всякого ограниченного $X \subset \mathbb{R}^n$ положим

$$R_K(X) = \inf\{s \in \mathbb{R}^+ : \exists t \in \mathbb{R}^n : X \subseteq sK + t\}.$$

Докажите, что для двух ограниченных множеств $X, Y \subset \mathbb{R}^n$

$$R_K(X + Y) \le R_K(X) + R_K(Y),$$

где сумма множеств понимается по Минковскому.

6.3 (Лемма о множестве Банга). ** Докажите, что если полоскам $P_1, \dots, P_N$ сопоставлены нормальные к ним (в евклидовой норме) вектора $v_1, \dots, v_N$, причём длина каждого v_i больше ширины соответствующей P_i, то сумма Минковского отрезков

$$[0, v_1] + [0, v_2] + \dots + [0, v_N]$$

не может быть покрыта объединением полосок $P_1, \dots, P_N$.

6.4 (Теорема Банга). * Докажите что евклидов единичный шар в размерности $n > 3$ нельзя покрыть конечным набором полосок с суммой ширин меньше 2.

6.5 (Теорема Полянского–Цзяна). ** Пусть евклидов шар произвольной размерности покрыт центрально-симметричными относительно начала координат полосками с ширинами $w_1, \dots, w_N$. Докажите, что

$$\arcsin \frac{w_1}{2} + \dots + \arcsin \frac{w_N}{2} \geq \pi/2.$$

6.6 (Теорема Полянского–Цзяна). * Пусть на единичной сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ дано несколько сферических шапочек (шаров в сферической геометрии) радиусов $r_1, \dots, r_N$ в смысле геодезического расстояния на сфере. Докажите, что если $r_1 + \dots + r_N < \pi/2$, то некоторая гиперплоскость, проходящая через начало сферы, не задевает ни одну из шапочек.

6.7 (Задача Тарского–Моэсе). Пусть единичный квадрат на плоскости разбит на части, которые после движений также дают разбиение тонкого прямоугольника $N \times 1/N$ (это называется равносоставленность). Части не предполагаются выпуклыми, или даже измеримыми. Докажите, что количество частей должно быть не менее N.

6.8 (Теорема Банга). * Докажите, что если тело $K \subset \mathbb{R}^n$ имеет ширину 1, то сумма ширин конечного набора покрывающих его полосок не менее 1.

6.9 (Теорема К. Болла). *** Докажите, что если K – единичный шар нормы $\|\cdot\|$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, то для всякого конечного набора полосок $\{P_i\}$, покрывающего K, получается

$$\sum_i w_{\|\cdot\|}(P_i) \geq 2.$$

6.10. Докажите предыдущее утверждение для случая, когда $K = [-1, 1]^2$.

6.11 (Нерешённая задача — гипотеза Банга). *** Докажите, что если K – выпуклое тело на плоскости $\mathbb{R}^2$, а норма $\|\cdot\|$ имеет единичный шар $K - K$, то для всякого конечного набора полосок $\{P_i\}$, покрывающего K, получается

$$\sum_i w_{\|\cdot\|}(P_i) \geq 1.$$

6.12 (Теорема Ф. Петрова). ** Решите предыдущую задачу для случая, когда полоски идут только в двух направлениях.

7. Упаковки шаров и транслятов выпуклого тела

7.1. Докажите, что в $\mathbb{R}^n$ нельзя расположить больше $n + 1$ единичного вектора с тупыми углами между любой парой векторов.

7.2. Докажите, что в $\mathbb{R}^n$ нельзя расположить больше $2n$ единичных векторов с неострыми углами между любой парой векторов.

7.3. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — центрально симметричное выпуклое тело. Докажите, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ можно разместить неперекрывающиеся параллельные переносы K так, что плотность покрытия будет не менее 2^{-n+1}. Последнее означает, что для всякого шара $B_0(R)$ доля объёма шара, покрытого этими параллельными переносами K, будет не менее $2^{-n+1} + o(1)$ при $R \to +\infty$.

7.4. Докажите, что на плоскости нельзя разместить параллельные переносы одного и того же треугольника так, чтобы плотность покрытия (см. определение выше) была больше 2/3.

7.5. Докажите, что в пространстве $\mathbb{R}^n$, при достаточно большом n, нельзя разместить попарно неперекрывающиеся шары единичного радиуса с плотностью (см. определение выше) более, чем 0.71^{-n}.

7.6. Предположим, удалось найти функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такую, что $f(x) \leq 0$ при $|x| \geq 2$ и преобразование Фурье f везде неотрицательно. Докажите, что тогда нельзя упаковать одинаковые шары в $\mathbb{R}^n$ с плотностью более, чем

$$\frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} \cdot \frac{f(0)}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx_1 \dots dx_n}.$$

8. Объёмы и полярность

8.1. Пусть V — конечномерное вещественное линейное пространство, $K \subset V$ — *выпуклое тело* (то есть выпуклый компакт с непустой внутренностью), содержащее начало координат. Пусть

$$K^\circ = \{y \in V^* : \forall x \in K\ \langle y, x\rangle \leq 1\}.$$

Докажите, что

$$(K^\circ)^\circ = K.$$

8.2. Для нормы $\|\cdot\|$ на V двойственная норма $\|\cdot\|_*$ на V^* определяется как

$$\|p\|_* = \sup_{q : \|q\| \leq 1} \langle p, q\rangle.$$

Докажите, что единичные шары этих норм, $\{\|q\| \leq 1\}$ и $\{\|p\|_* \leq 1\}$, полярны друг к другу.

8.3. Докажите, что если центр тяжести симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$ находится в начале координат, то центр тяжести полярного симплекса S° тоже находится в начале координат.

8.4. Докажите формулу для объёма единичного шара евклидовой нормы в $\mathbb{R}^n$

$$v_n = \operatorname{vol} B^n = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}.$$

Что такое факториал полуцелого числа?

8.5 (Неравенство Бляшке–Сантало). ** Докажите неравенство для объёмов центрально-симметричных выпуклых тел и их полярных:

$$\operatorname{vol} K \cdot \operatorname{vol} K^\circ \leq v_n^2.$$

Начните с плоского случая $n = 2$.

8.6. Как правильно сформулировать неравенство Бляшке–Сантало для тел, не являющихся центрально симметричными?

8.7. Проверьте формулу

$$\operatorname{vol} K \cdot \operatorname{vol} K^\circ = \frac{4^n}{n!}$$

для случая, когда $K = [-1, 1]^n$ – стандартный куб в $\mathbb{R}^n$.

8.8. Придумайте центрально симметричные выпуклые многогранники, отличные от куба и его полярного тела (кросполитопа), и отличные от их аффинных образов, для которых выполняется равенство из предыдущего упражнения.

8.9 (Неравенство Малера на плоскости). ** Докажите для всякого двумерного центрально-симметричного выпуклого тела K неравенство

$$\operatorname{vol} K \cdot \operatorname{vol} K^\circ \geq 8.$$

8.10 (Теорема Бургена–Мильмана). ** Докажите для какой-нибудь положительной константы γ и всякого n-мерного центрально-симметричного выпуклого тела K неравенство

$$\operatorname{vol} K \cdot \operatorname{vol} K^\circ \geq \frac{\gamma^n}{n!}.$$

8.11 (Нерешённая задача — гипотеза Малера). *** Докажите для всякого центрально-симметричного выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ неравенство

$$\operatorname{vol} K \cdot \operatorname{vol} K^\circ \geq \frac{4^n}{n!}.$$

9. Целые точки в выпуклых телах

9.1 (Теорема Минковского). Пусть K – центрально симметричное выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$ объёма не менее 2^n. Докажите, что K содержит точку с целыми координатами, отличную от начала координат.

9.2. ** Пусть K – выпуклое тело на плоскости, содержащее начало координат и для полярного тела пусть $\operatorname{vol} K^\circ \leq 3/2$. Докажите, что K содержит точку с целыми координатами, отличную от начала координат.

9.3. *** (Нерешённая задача) Пусть K – выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, содержащее начало координат и для полярного тела пусть $\operatorname{vol} K^\circ \leq \frac{n+1}{n!}$. Докажите, что K содержит точку с целыми координатами, отличную от начала координат.

10. Бильярды в выпуклых телах

В следующих упражнениях рассматриваются бильярды в выпуклом теле, заданные с помощью евклидовой нормы. Правило отражения в этом случае говорит, что единичный вектор скорости меняется при ударе на вектор, кратный нормали в точке удара.

10.1. Докажите правило отражения с помощью метода множителей Лагранжа. Если это надо доказать, то что надо считать определением бильярдной траектории?

10.2 (Теорема Биркгофа). Докажите, что в гладком выпуклом теле $K \subset \mathbb{R}^2$ найдётся не менее $\varphi(n)$ разных замкнутых бильярдных траекторий с n ударениями на период. Здесь $\varphi(n)$ – функция Эйлера.

10.3 (Теорема Люстерника–Шнирельмана). ** Докажите, что в гладком выпуклом теле $K \subset \mathbb{R}^n$ найдётся не менее n разных замкнутых бильярдных траекторий с двумя ударениями на период. Такие траектории называются *двойными нормалями* тела K.

Шириной тела K называется минимум выражения

$$\max_{q \in K} \langle p, q \rangle - \min_{q \in K} \langle p, q \rangle$$

по всем линейным формам p с $\|p\|_* = 1$. Мы пока продолжаем работать с евклидовой нормой (тогда обозначаем ширину $w_B(K)$), но определение приведено для произвольного случая.

Пусть $\xi_B(K)$ (для гладкого тела K с евклидовой нормой) – минимальная длина замкнутой бильярдной траектории в теле K.

10.4. Докажите, что для гладкого тела K на плоскости

$$\xi_B(K) \geq \sqrt{3} w_B(K).$$

Далее мы рассматриваем пару выпуклых тел $K \subset V$ и $T \subset V^*$, содержащих начало координат, обозначаем при этом $n = \dim V = \dim V^*$. На пространстве V мы будем пользоваться нормой с двойственным единичным шаром T и обозначать её $\|\cdot\|_T$ [1], а на пространстве V^* будем пользоваться нормой с двойственным единичным шаром K.

Если оба тела K и T – гладкие, то минимальную длину замкнутой бильярдной траектории в K (при измерении длин нормой $\|\cdot\|_T$) мы обозначим $\xi_T(K)$.

10.5. В данном случае бильярдную траекторию можно определить как критическую точку функционала $\|\cdot\|_T$-длины ломаной с концами на границе K. Получите правило отражения для таких бильярдных траекторий в помощью метода множителей Лагранжа.

10.6. Как инвариантно определена симплектическая структура на $V \times V^*$? Напишите формулу.

10.7 (Теорема Бездека–Бездека). Докажите характеризацию величины $\xi_T(K)$:

$$\xi_T(K) = \min_{2\leq m\leq n+1} \min_{P\in\mathcal{P}_m(K)} \ell_T(P),$$

где

$$\mathcal{P}_m(K) = \{(q_1, \dots, q_m) : \{q_1, \dots, q_m\} \text{ не помещается в } \alpha K + t \text{ при } \alpha \in (0,1),\ t \in V\}.$$

10.8. * Докажите свойства величины $\xi_T(K)$:
(монотонность) если $K' \subseteq K''$, то $\xi_T(K') \leq \xi_T(K'')$;
(симметричность) $\xi_T(K) = \xi_K(T)$;
(неравенство типа Брунна–Минковского) $\xi_T(K' + K'') \geq \xi_T(K') + \xi_T(K'')$.

10.9 (Теорема Артштейн-Авидан–Карасёва–Островера). Докажите для центрально симметричного выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$

$$\xi_{K^\circ}(K) \geq 4.$$

10.10 (Теорема Акопяна–Балицкого–Карасёва–Шариповой). ** Докажите для не обязательно центрально симметричного выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$

$$\xi_{K^\circ}(K) \geq 2 + 2/n.$$

10.11 (Теорема Акопяна–Карасёва–Петрова). * Докажите для не обязательно центрально симметричного выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$

$$\xi_{(K-K)^\circ}(K) \geq 1 + 1/n,$$

здесь $K - K = \{q' - q'' : q', q'' \in K\}$ – разностное тело тела K.

10.12. ***(Нерешённая задача) Какое неулучшаемое неравенство в зависимости от n можно написать для $\xi_{K^\circ - K^\circ}(K)$?

[1] Внимание, это не вполне стандартное обозначение!