Гипотезы в комбинаторной и выпуклой геометрии

В этой заметке перечислены задачи и гипотезы, сформулированные в разных моих статьях.

(1) *Пусть плоскость $\mathbb{R}^2$ разбита на выпуклые замкнутые множества $V_1, \dots, V_m$. Тогда для любого набора векторов $v_1, \dots, v_m$, найдётся такая перестановка $\sigma \in \mathfrak{S}_m$, что множества*

$$V'_i = V_i + v_{\sigma(i)}$$

покрывают $\mathbb{R}^2$. Также найдётся такая перестановка $\tau \in \mathfrak{S}_m$, что множества

$$V'_i = V_i + v_{\tau(i)}$$

попарно не перекрываются (не пересекаются по внутренним точкам).

Эта гипотеза сформулирована в работе [4], где доказаны её частные случаи для разбиений специального вида (*иерархически аффинных*).

(2) (Обобщение гипотезы Грюнбаума) *Пусть в пространстве $\mathbb{R}^d$ дано семейство транслятов $\mathcal{F}$ некоторого выпуклого компакта K. Предположим, что любые d или менее множеств из семейства $\mathcal{F}$ имеют общую точку. Тогда найдётся множество T из $d + 1$ точек, которое пересекается со всяким множеством из $\mathcal{F}$.*

Это утверждение доказано в [3] для $d = 2$, гипотеза сформулирована в [5].

(3) (Двойственная теорема Тверберга) *Пусть в пространстве $\mathbb{R}^d$ дано семейство из $(d+1)n$ гиперплоскостей общего положения. Тогда их можно разбить на n наборов по $d+1$ штуке так, что все симплексы, образованные наборами, имеют общую точку.*

Эта гипотеза доказана в [6] для случая, когда n — степень простого, даже доказано более сильное утверждение: что симплексы имеют общую *внутреннюю* точку. Также она доказана для $d = 2$ и любого n, как следствие из теоремы о центральной точки.

(4) (Двойственная цветная теорема Тверберга) Следующая задача ставит вопрос о естественном аналоге цветной теоремы Тверберга [1, 7, 2].

Найти минимально возможное $t = t(d, r)$, для которого верно следующее утверждение. Пусть $(d + 1)t$ гиперплоскости общего положения в $\mathbb{R}^d$ раскрашены в $d+1$ цвет так, что каждый цвет используется t раз. Тогда можно выбрать r попарно непересекающихся разноцветных *наборов по $(d + 1)$ гиперплоскости так, что r симплексов, образованных соответствующими наборами по $(d + 1)$, имеют общую точку.*

В работе [6] была высказана гипотеза, что $t(2, r) = r$, но к этой гипотезе был построен контрпример (это сделала Ли Пин, студентка Имре Барань) в случае $r = 2$. Результаты работ [7] и [2] показывают, что для r, являющихся степенью простого, есть оценка $t(d, r - d) \leq 2r$, а для простых r — оценка $t(d, r - d - 1) \leq r$.

Таким образом, даже плоский случай ($d = 2$) этой задачи вполне интересен

Список литературы

[1] I. Bárány, D.G. Larman, "A colored version of Tverberg's theorem", *J. London Math. Soc.*, **45**:2 (1992), 314–320.

[2] P.V.M. Blagojević, B. Matschke, G.M. Ziegler, *Optimal bounds for the colored Tverberg problem*, arXiv: 0910.4987, 2009.

[3] R.N. Karasev, "Transversals for the families of translates of a two-dimensional convex compact set", *Discrete and Computational Geometry*, **24**:2/3 (2000), 345–353.

[4] R.N. Karasev, "Partitions of a polytope and mappings of a point set to facets", *Discrete and Computational Geometry*, **34**:1 (2005), 25–45.

[5] R.N. Karasev, "Piercing families of convex sets with d-intersection property in $\mathbb{R}^d$", *Discrete and Computational Geometry*, **39**:4 (2008), 766–777.

[6] Р.Н. Карасёв, "Двойственные теоремы о центральной точке и их обобщения", *Мат. сборник*, **199**:10 (2008), 41–62.

[7] R.T. Živaljević, S.T. Vrećica, "The colored Tverberg's problem and complexes of injective functions", *Journal of Comb. Theory, Ser. A*, **61**:2 (1992), 309–318.