1. Свойства действительных чисел

1.1. **Множества и отображения.**

Задача 1.1. Подумайте на тем, что означает в предыдущей фразе слово «совпадают».

[[Попробуйте определить $x = y$ через условия $x \in \dots$ и $y \in \dots$.]]

Задача 1.2. Зададим отображение $\pi_1 : X \times Y \to X$ как $\pi_1(x, y) = x$ и отображение $\pi_2 : X \times Y \to Y$ как $\pi_2(x, y) = y$. Докажите, что отображения $f : Z \to X \times Y$ однозначно определяются парами своих «координат» $(\pi_1 \circ f : Z \to X, \pi_2 \circ f : Z \to Y)$.

Задача 1.3. Как связаны графики взаимно обратных отображений f и g как подмножества $X \times Y$ и $Y \times X$?

Задача 1.4. Выясните, что означает существование у отображения $f : X \to Y$ *правого обратного* g, для которого $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Аналогично для *левого обратного*, для которого $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

1.2. **Отношения эквивалентности и порядка.**

Задача 1.5. Пусть на множестве X задано отношение эквивалентности $\sim$ и рассматривается проекция на фактормножество $P : X \to X/{\sim}$. Докажите, что отображение $f : X \to Y$ представляется в виде $f = g \circ P$, для некоторого $g : X/{\sim} \to Y$ тогда и только тогда, когда для любых $x' \sim x''$ оказывается $f(x') = f(x'')$.

Задача 1.6. Проверьте, что множество остатков $\mathbb{Z}/(m)$ корректно наследует от $\mathbb{Z}$ операции сложения, вычитания и умножения.

Задача 1.7. Определите на множестве дробей $\frac{p}{q}$ операции сложения, вычитания, умножения и деления. Проверьте, что при замене аргумента такой операции на эквивалентный ему результат операции тоже заменяется на эквивалентный.

Задача 1.8. Проверьте, что отношение на парах целых чисел

$$(n, m) \preccurlyeq (n', m') \Leftrightarrow n \leqslant n' \text{ и } m \leqslant m'$$

является отношением порядка, но не является линейный порядком.

Задача 1.9. Проверьте, что на множестве подмножеств некоторого множества Z отношение $X \subseteq Y$ является отношением порядка. В каких случаях это будет отношение линейного порядка?

Задача 1.10. Докажите, что в линейно упорядоченном множестве минимальный элемент либо отсутствует, либо единственный.

Задача 1.11. Приведите пример, когда в частично упорядоченном множестве минимальный элемент не единственный.

Задача 1.12. Выведите из аксиомы математической индукции свойство «полной индукции»: Если подмножество $X \subseteq \mathbb{N}$ обладает свойством

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\forall m < n, m \in X) \Rightarrow n \in X,$$

то $X = \mathbb{N}$.

[[Рассмотрите множество $Y = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m < n, m \in X\}$.]]

Задача 1.13. Докажите, что если множество $X \subseteq \mathbb{N}$ конечно, то его дополнение

$$\mathbb{N} \setminus X = \{y \in \mathbb{N} \mid y \notin X\}$$

бесконечно.

[[Постройте противоречие, предположив конечность $\mathbb{N} \setminus X$.]]

Задача 1.14. Докажите, что в любом непустом множестве натуральных чисел существует минимальный элемент.

[[Предположив противное, докажите по (полной) индукции, что ни одно натуральное число в данном множестве не содержится.]]

Задача 1.15. Докажите, что в любом конечном частично упорядоченном множестве есть минимальный относительно его частичного порядка элемент.

[[Считайте данное множество подмножеством натуральных чисел. Используйте индукцию по его максимальному в смысле порядка натуральных чисел элементу, не забывая, что его частичный порядок может быть другим.]]

Задача 1.16. Докажите, что любой частичный порядок на конечном множестве можно расширить до линейного порядка.

[[Считайте данное множество подмножеством натуральных чисел и используйте индукцию по его максимальному в смысле порядка натуральных чисел элементу.]]

1.3. **Пределы и фундаментальные последовательности, определение действительных чисел.**

Задача 1.17. Произнесите логическую формулу в определении фундаментальной последовательности.

Задача 1.18. Проверьте фундаментальность построенной последовательности десятичных приближений $\sqrt{2}$.

1.4. **Арифметические операции и сравнение действительных чисел.**

Задача 1.19. Для прояснения написанной формулы докажите по индукции, что в конечной последовательности $b_1, \dots, b_n$ рациональных чисел есть максимальный элемент.

Задача 1.20. Докажите, что обратного по умножению действительного числа к числу 0 не существует.

1.5. **Полнота множества действительных чисел.**

Задача 1.21. Докажите, что между любыми двумя разными действительными числами есть иррациональное.

[[Используйте, например, иррациональность $\sqrt{2}$.]]

Задача 1.22. Докажите, что последовательность действительных чисел, имеющая предел в расширенной числовой прямой, ограничена либо снизу, либо сверху.

[[Рассмотрите отдельно случаи конечного предела и предела $\pm\infty$.]]

Задача 1.23. Докажите, что последовательность (a_n) не является монотонной тогда и только тогда, когда найдутся номера $n < m < k$ такие, что $(a_n - a_m)(a_m - a_k) < 0$.

Задача 1.24. Докажите, что последовательность (a_n) не является строго монотонной тогда и только тогда, когда найдётся номер n такой, что $(a_n - a_{n+1})(a_{n+1} - a_{n+2}) \leqslant 0$.

1.6. **Переход к пределу в неравенствах, единственность предела, вложенные отрезки.**

Задача 1.25. Верно ли, что если $a_n < b_n$ для всех n и последовательности (a_n) и (b_n) имеют пределы, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n?$$

Задача 1.26. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} 1/2^n = 0$.

[[Используйте неравенство $0 < 1/2^n < 1/n$, следствие **??** и теорему о двух милиционерах.]]

Задача 1.27. Приведите пример, когда последовательность вложенных интервалов (a_n, b_n) не имеет общей точки. Сформулируйте достаточные условия того, чтобы последовательность вложенных интервалов всё же имела общую точку.

[[Следите за концами интервалов.]]

Задача 1.28. Для положительных a_1, b_1 определим две последовательности (a_n) и (b_n) формулами

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Докажите, что обе последовательности стремятся к одному и тому же числу.

[[Проверьте, что последовательность отрезков $[a_n, b_n]$ есть последовательность вложенных отрезков и стягивается.]]

1.7. **Точные грани числовых множеств.**

Задача 1.29. Докажите, что множество $X \subseteq \mathbb{R}$ ограничено сверху и снизу тогда и только тогда, когда множество $X' = \{|x| \mid x \in X\}$ ограничено сверху.

Задача 1.30. Запишите в кванторах как можно короче утверждение про два непустых множества $X, Y \subseteq \mathbb{R}$: $\sup X < \inf Y$.

Задача 1.31. Докажите, что при работе только с рациональными числами мы не всегда сможем найти верхнюю грань ограниченного множества рациональных чисел среди рациональных чисел.

[[Можно рассмотреть стандартный пример $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ и доказать, что $\sup X$ в квадрате даёт 2.]]

1.8. **Другие определения действительных чисел.**

Задача 1.32. Докажите, что между двумя различными действительными числами $x < y$ найдётся конечная десятичная дробь, $x < d < y$.

[[Умножьте x и y на число вида 10^n так, чтобы их разность стала достаточно большой.]]

Задача 1.33. * Докажите, что все способы построения действительных чисел приводят к одному и тому же результату. Точнее, что любое упорядоченное поле $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$ (то есть поле, в котором арифметические операции связаны с неравенствами стандартным образом и содержащее в себе $\mathbb{Q}$ как упорядоченое подполе), обладающее «свойством Архимеда»

$$\mathbb{K} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n],$$

однозначно вкладывается в $\mathbb{R}$, если потребовать сохранение порядка при вложении и тождественность вложения на $\mathbb{Q}$, рассматриваемом как подполе $\mathbb{R}$.

[[Для элемента $x \in \mathbb{K}$ постройте стягивающуюся последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, таких что $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ и $a_n \leqslant x \leqslant b_n$. В качестве образа x в $\mathbb{R}$ возьмите пересечение соответствующей стягивающейся последовательности вложенных отрезков в $\mathbb{R}$. Проверьте совместимость такого вложения с арифметическими операциями.]]

1.9. **Арифметические операции с пределами.**

Задача 1.34. Проверьте, что для бесконечных пределов выполняются символические тождества:
$$(+\infty)+(+\infty)=+\infty, (-\infty)+(-\infty)=-\infty, \infty\cdot\infty=\infty.$$

Задача 1.35. Приведите примеры, показывающие, что для $(+\infty)+(-\infty)$ и $\infty\cdot 0$ может получиться что угодно на расширенной числовой прямой.

1.10. **Неравенство Бернулли, экспонента и логарифм.**

Задача 1.36. Проверьте тождество $a^{xy}=(a^x)^y$.

1.11. **Тригонометрические функции.**

Задача 1.37. Проверьте, что для точек на плоскости выполняется неравенство треугольника в виде $|AC|\leqslant|AB|+|BC|$.

Задача 1.38. Проверьте, что указанное вращение R действительно не меняет расстояния между любыми двумя парами точек.

[[Выпишите квадрат расстояния между двумя точками (x',y') и (z',t'), полученными из точек (x,y) и (z,t) соответственно.]]

Задача 1.39. Обоснуйте, почему прямая пересекает окружность не более чем в двух точках.

Задача 1.40. Докажите подразумеваемое в предыдущей лемме утверждение, что через каждую точку окружности проходит ровно одна касательная, то есть прямая, пересекающая окружность в одной точке.

Задача 1.41. Докажите равенства $R_t\circ R_{-t}=\mathrm{id}$, $R_{t+s}=R_t\circ R_s$, аккуратно рассмотрев все случаи.

Задача 1.42. Записывая линейные отображения плоскости в себя в виде матриц 2×2, докажите, что для матрицы поворота на угол t верна формула
$$R_t=\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}1 & -t/n\\ t/n & 1\end{pmatrix}^n.$$

[[Заметьте, что под знаком предела находится матрица поворотной гомотетии. С помощью леммы ?? установите, что при $n\to\infty$ коэффициент гомотетии стремится к единице, то есть в пределе получается матрица вращения. С помощью замечательных пределов установите, на какой угол будет вращение в пределе.]]

1.12. **Частичные пределы.**

Задача 1.43. Для числовой последовательности (a_n) обозначим
$$b_k=\sup\{a_n\mid n\geqslant k\}.$$
Докажите, что
$$\inf\{b_k\mid k\in\mathbb{N}\}=\lim_{k\to\infty}b_k=\varlimsup_{n\to\infty}a_n.$$

Задача 1.44. Проверьте, что равенство $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}b_n$ может быть неверно даже для ограниченных последовательностей. Какой верный знак неравенства можно поставить здесь на место равенства?

[[Может помочь результат предыдущей задачи.]]

Задача 1.45. Пусть α — иррациональное число. Докажите, что последовательности $(\cos \pi\alpha n)$ и $(\sin \pi\alpha n)$ имеют множеством частичных пределов весь отрезок $[-1, 1]$.

[[Рассмотрите точки $P_n = (\cos \pi\alpha n, \sin \pi\alpha n)$. Докажите, что какие-то две из них P_n и P_m могут оказаться на окружности сколь угодно близко друг от друга. Далее воспользуйтесь тем, что дуга $\overset{\frown}{P_n P_m}$ отличается от дуги $\overset{\frown}{P_{n-k} P_{m-k}}$ только вращением.]]

Задача 1.46. Докажите, что у любой последовательности есть монотонная подпоследовательность.

[[Можно рассуждать чисто комбинаторно, используя лишь порядок действительных чисел, а можно задействовать понятие частичного предела.]]

Задача 1.47. Постройте какую-нибудь последовательность, частичными пределами которой являются все действительные числа и значки $+\infty$, $-\infty$.

1.13. **Топология на множестве действительных чисел.**

Задача 1.48. Проверьте по определению, что любой интервал (a, b) является открытым множеством. Является ли открытым множеством отрезок $[a, b]$?

Задача 1.49. Проверьте свойства топологии для топологии Зарисского на $\mathbb{R}$.

Задача 1.50. Проверьте, что $X \subseteq \mathbb{R}$ открыто тогда и только тогда, когда $\operatorname{int} X = X$.

Задача 1.51. Проверьте, что $X \subseteq \mathbb{R}$ замкнуто тогда и только тогда, когда $\operatorname{cl} X = X$.

Задача 1.52. Докажите, что $X \subseteq \mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда любая последовательность чисел из X имеет частичный предел в X.

[[Это нетрудно сделать, используя критерий компактности и теорему Больцано–Вейерштрасса. Поучительно также вывести это свойство из компактности напрямую, не используя критерия.]]

Задача 1.53. Проверьте, что на $X \subset \mathbb{R}$ индуцируется дискретная топология (каждое подмножество X относительно открыто) тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in X$ есть окрестность $U \ni x$, такая что $U \cap X = \{x\}$.

[[Заметьте, что дискретность топологии на X равносильна тому, что каждая его точка сама по себе является открытым множеством.]]

Задача 1.54. Постройте *гомеоморфизм* $\overline{\mathbb{R}}$ на отрезок $[-1, 1]$, то есть обратимое отображение, которое сохраняет систему открытых множеств (на отрезке рассматриваются относительно открытые множества).

[[Обратите внимание, что достаточно сделать обратимое отображение, сохраняющее отношение порядка.]]

Задача 1.55. Докажите, что если множества $Z, Y \subseteq X$ открыты относительно X и не пересекаются, то найдутся непересекающиеся открытые $U, V \subseteq \mathbb{R}$, такие что $Z = X \cap U$ и $Y = X \cap V$.

[[У любой точки $y \in Y$ найдите окрестность $U(y) = (y - \varepsilon_y, y + \varepsilon_y)$, не пересекающуюся с Z, аналогично для $z \in Z$ найдите $U(z) = (z - \varepsilon_z, z + \varepsilon_z)$, не пересекающуюся с Y. Потом уменьшите размеры каждой из этих окрестностей в два раза и рассмотрите их объединения.]]

1.14. **Теорема Бэра на прямой.**

Задача 1.56. Проверьте, что $X \subseteq \mathbb{R}$ плотно тогда и только тогда, когда оно пересекает любое непустое открытое множество.

Задача 1.57. Проверьте, что $X \subseteq \mathbb{R}$ неплотно тогда и только тогда, когда $\operatorname{int} X = \emptyset$.

1.15. **Мощность множества, счётные и несчётные множества чисел.**

Задача 1.58. Докажите, что любое непустое конечное множество натуральных чисел равномощно начальному отрезку натуральных чисел вида $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

[[Используйте полную индукцию по максимальному элементу множества.]]

Задача 1.59. Докажите, что мощность конечного множества определена корректно, то есть множества $[n]$ и $[m]$ не могут быть равномощными при $n \neq m$.

[[Используйте математическую индукцию. Предположив противное, постарайтесь перестроить обратимое отображение и уменьшить n и m на единицу.]]

Задача 1.60. Докажите, что для мощности конечных множеств выполняются свойства:

$$|X \cup Y| + |X \cap Y| = |X| + |Y|, \quad |X \times Y| = |X| \cdot |Y|.$$

[[Используйте математическую индукцию, считая $X = [n], Y = [m]$.]]

Задача 1.61. Докажите, что множество $\mathbb{N}$ не конечно, то есть не равномощно никакому своему начальному отрезку $[n] \subseteq \mathbb{N}$.

[[Используйте математическую индукцию; предположив противное, постарайтесь уменьшить n на единицу.]]

Задача 1.62. Проверьте, что выписанные в предыдущем доказательстве отображения $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и $f^{-1} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ взаимно обратны.

Задача 1.63. Докажите, что для любого множества X множество всех его подмножеств, 2^X, не равномощно X.

[[Предположите наличие отображения $f : X \to 2^X$ и подумайте, может ли в его образе лежать множество $Y = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ (то есть используйте парадокс Бертрана Рассела).]]

Задача 1.64. * Докажите, что если $|X| \leqslant |Y|$ и $|Y| \leqslant |X|$, то $|X| = |Y|$.

[[Возьмите существующие по определению инъективные $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$. На множестве $X \cup Y$ введите отношение эквивалетности, $a \sim b$, если b можно получить из a повторением операций f, g, f^{-1}, g^{-1}. Разбейте $X \cup Y$ на классы эквивалентности по этому отношению, изучите структуру этих классов и задайте в каждом классе биекцию между элементами X и элементами Y. Подумайте, используется ли при этом аксиома выбора.]]

Задача 1.65. * Докажите, что множество $\mathbb{R}$ равномощно $2^{\mathbb{N}}$.

[[Поработайте с представлением действительного числа двоичной записью и используйте результат задачи 1.64.]]

Задача 1.66. * Докажите, что множество $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ равномощно $\mathbb{R}$.

[[Используйте результат задачи 1.65 и обоснуйте символическую формулу $2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} = 2^{\mathbb{N}+\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}}$.]]

2. Непрерывность и дифференцируемость функций одной переменной

2.1. **Непрерывность функций.**

Задача 2.1. Пусть непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обладает свойством $f(x) > x$ для любого x. Докажите, что для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ последовательность, определённая как

$$x_n = f(x_{n-1}),$$

стремится к $+\infty$.

[[Используйте монотонность последовательности и непрерывность f по Гейне.]]

Задача 2.2. Докажите непрерывность композиции другим способом — с помощью определения непрерывности по Коши.

Задача 2.3. Докажите, что функцию $f(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$, естественно определённую на $(0, +\infty)$, можно при $\alpha > 0$ доопределить как $f(0) = 0$ и она будет непрерывной.

[[В любой точке множества $(0, +\infty)$ можно применить теорему о непрерывности композиции. В точке $x_0 = 0$ непрерывность можно проверить по Коши.]]

2.2. **Обратные функции и промежуточные значения.**

Задача 2.4. Докажите, что если функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна и инъективна на промежутке X, то она монотонна.

[[Поймите, в чём заключается отрицание монотонности функции f.]]

Задача 2.5. Пусть непрерывная функция $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ имеет равные значения на концах отрезка $f(0) = f(1)$. Докажите, что для любого α вида $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, уравнение (относительно x)

$$f(x + \alpha) = f(x)$$

имеет решение.

[[Докажите, что выражение $f(x + \alpha) - f(x)$ не может иметь один и тот же знак на всём отрезке $[0, 1 - \alpha]$.]]

Задача 2.6. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ не равно никакому $1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Для данного α приведите пример непрерывной функции $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, которая имеет равные значения на концах отрезка $f(0) = f(1)$ и такой, что уравнение (относительно x)

$$f(x + \alpha) = f(x)$$

не имеет решений.

[[Начните с построения подходящей непрерывной функции g, такой что $g(x + \alpha) = g(x)$, но $g(0) \neq g(1)$, а потом модифицируйте её.]]

2.3. **Топологическое определение непрерывности и непрерывные на компактах функции.**

Задача 2.7. Пусть непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет период $T > 0$, то есть

$$f(x + T) = f(x)$$

для любого x. Докажите, что для любого α уравнение

$$f(x + \alpha) = f(x)$$

имеет решение.

[[Докажите, что выражение $f(x + \alpha) - f(x)$ не может иметь один и тот же знак, рассмотрев минимальное значение f. Объясните, почему f принимает минимальное значение.]]

Задача 2.8. Придумайте разрывную $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая отображает любой отрезок в отрезок.

[[Используйте полезный источник контрпримеров, выражение $\sin \frac{1}{x}$.]]

2.4. **Пределы и разрывы функций.**

Задача 2.9. Проверьте по определению, какие есть предельные точки у множества $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

Задача 2.10. Проверьте что если две функции $f, g : X \to \mathbb{R}$ имеют конечные пределы в точке a, то

$$\lim_{x\to a} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

Если к тому же предел g не равен нулю, то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

[[Используйте определение предела по Гейне и сведите к утверждениям о пределах последовательностей.]]

Задача 2.11. Проверьте, что у функции может быть только один предел в предельной точке множества определения. Проверьте, что если неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ выполняется в некотором множестве $X \cap U \setminus \{a\}$, где U — окрестность a, то

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x).$$

[[Используйте определение предела по Гейне и сведите к утверждениям о пределах последовательностей. Для доказательства единственности может понадобиться определение предела по Коши или приём из доказательства теоремы **??** ниже.]]

Задача 2.12. Сформулируйте правильный вариант утверждения о пределе композиции функций.

[[Действуйте аналогично доказательству непрерывности композиции. Обратите внимание, что в определении предела в точке a в функцию нельзя подставлять само число a.]]

Задача 2.13. Определите тип разрывов в нуле у функций $\sin \frac{1}{x}$, e^{-1/x^2}, $\frac{1}{1+e^{1/x}}$.

Задача 2.14. Проверьте, что можно сказать о разрывах монотонной на отрезке функции.

[[После теоремы **??** остаётся изучить только концы отрезка. Существование одностороннего предела на конце проверьте аналогично рассуждениям в доказательстве теоремы.]]

Задача 2.15. Докажите, что если функция определена и монотонна на промежутке, то у неё не более чем счётное количество точек разрыва.

[[Используйте тот факт, что интервалы разрыва $(f(x-0), f(x+0))$, соответствующие разным x, не пересекаются.]]

Задача 2.16. Пусть функции f и g определены и возрастают на некотором интервале, и оказалось, что их сумма $f+g$ непрерывна. Докажите, что обе функции f и g тоже непрерывны.

[[Рассмотрите поведение в предполагаемых точках разрыва.]]

2.5. **Сравнение асимптотического поведения функций, символы O и o.**

Задача 2.17. Проверьте символические равенства (в том смысле, что написанное в левой части неравенства можно заменить на написанное в правой части, но не обязательно наоборот)

$$o(f \pm g) = o(f) \pm o(g),\ o(f) \pm o(f) = o(f),\ o(f)O(g) = o(fg),\ o(O(f)) = o(f),\ O(O(f)) = O(f).$$

[[Перейдите в окрестность $U(a) \ni a$, в которой выполняются определения значков o и O в левой части символического равенства. Проверьте, что тогда выполняется и определения значка в правой части.]]

Задача 2.18. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{Z}$

$$x^n = o(e^x) \text{ при } x \to +\infty \text{ и } e^x = o(x^n) \text{ при } x \to -\infty.$$

[[Вспомните, что экспонента определялась как предел возрастающей (по крайней мере при $x > 0$) последовательности многочленов.]]

Задача 2.19. Докажите, что для любого $\alpha > 0$

$$\ln x = o(x^\alpha) \text{ при } x \to +\infty.$$

[[Сделайте замену $x^\alpha = t$ и покажите, что верность утверждения не зависит от выбора $\alpha > 0$. Далее положите $\alpha = 2$ и оцените логарифм линейной функцией.]]

2.6. **Производная и дифференцируемость функции.**

Задача 2.20. Найдите производные гиперболических функций $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ и их обратных функций.

Задача 2.21. Исследуйте дифференцируемость справа в нуле функции $f(x) = x^\alpha$ в зависимости от параметра $\alpha > 0$, считая $f(0) = 0$.

Задача 2.22. * Существует ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая принимает ненулевые значения в рациональных точках, нулевые значения в иррациональных точках, и дифференцируема в иррациональных точках?

[[Может помочь теорема Бэра или соображения о приближении иррационального числа рациональными.]]

2.7. **Теорема о среднем Лагранжа, исследование функции на монотонность, экстремум и выпуклость.**

Задача 2.23. Докажите, что если дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет n корней (решений уравнения $f(x) = 0$), то её производная имеет как минимум $n - 1$ корень.

Задача 2.24. Докажите, что если квазимногочлен $P(x)e^{ax}$ (где P — обычный многочлен и $a \neq 0$) имеет n различных корней, то его производная тоже имеет n различных корней.

[[Как минимум $n - 1$ корень производной легко найти по теореме Ролля, остаётся найти ещё один.]]

Задача 2.25. Проверьте, что если функция f на интервале (a, b) имеет ненулевую производную, то она строго монотонна.

[[Проверьте, что отсутствие строгой монотонности влечёт существование трёх значений $x < y < z$, таких что $f(x) < f(y) > f(z)$ или $f(x) > f(y) < f(z)$. После этого примените теорему о промежуточном значении, чтобы найти пару значений $s < t$, таких что $f(s) = f(t)$, а потом примените теорему Ролля.]]

Задача 2.26. Докажите, что при натуральном n и $x \geqslant 0$ верно неравенство

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Какое неравенство будет верно при $x < 0$?

[[Используйте интегрирование неравенств и индукцию по n.]]

Задача 2.27. Сравните, что больше, e^π или π^e.

[[Замените π на произвольное $x > e$, перенесите всё в левую часть и дифференцируйте. Заметьте, что иногда логарифм некоторого выражения дифференцировать проще, чем само выражение.]]

Задача 2.28. Проверьте, что функция $f(x) = x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)$, доопределённая в нуле равенством $f(0) = 0$, имеет в нуле минимум, но не удовлетворяет достаточным условиям экстремума.

Задача 2.29. Докажите, что если непрерывная на промежутке и дифференцируемая на его внутренности функция выпукла, то её производная возрастает. Докажите, что если функция строго выпукла, то её производная строго возрастает.

[[Предположите $f'(x) > f'(y)$ при $x < y$. Сведите к случаю $f(x) = f(y) = 0$ как в предыдущем доказательстве и обратите внимание, что по выпуклости функция должна быть неположительной на (x, y) (отрицательной при строгой выпуклости). Посмотрите, что происходит с функцией в окрестности точек x и y и найдите противоречие.]]

Задача 2.30. На каких промежутках функция $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ выпукла, а на каких — вогнута?

Задача 2.31. Докажите, что выпуклая на интервале функция непрерывна. Приведите пример функции на отрезке, которая разрывна, но выпукла.

[[Обратите внимание, что если через две точки графика выпуклой функции провести секущую, то между этими двумя точками она будет лежать (нестрого) над графиком, а слева и справа от этой пары точек — под графиком.]]

Задача 2.32 (Неравенство Йенсена для функции одной переменной и конечных сумм). Докажите, что если функция $f : I \to \mathbb{R}$ на некотором промежутке I выпуклая, то для любого набора $x_1, \dots, x_N \in I$ и неотрицательных коэффициентов $t_1, \dots, t_N$, таких что $t_1 + t_2 + \dots + t_N = 1$, выполняется

$$f(t_1 x_1 + \dots + t_N x_N) \leqslant t_1 f(x_1) + \dots + t_N f(x_N).$$

[[Используйте индукцию по N.]]

Задача 2.33. Выведите из неравенства Йенсена неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \dots x_n},$$

где $x_1, \dots, x_n \geqslant 0$.

[[Используйте вогнутость логарифма.]]

Задача 2.34. Докажите, что если f определена и непрерывна на интервале (a,b), и в каждой точке $x \in (a,b)$ выполняется

$$\varlimsup_{\delta\to+0} \frac{f(x+\delta)+f(x-\delta)-2f(x)}{\delta^2} \geqslant 0,$$

то f выпукла.

[[Покажите, что выпуклость f следует из выпуклости $f_\varepsilon(x) = f(x)+\varepsilon x^2$ при любом положительном ε. Заметьте, что

$$\varlimsup_{\delta\to+0} \frac{f_\varepsilon(x+\delta)+f_\varepsilon(x-\delta)-2f_\varepsilon(x)}{\delta^2} \geqslant 2\varepsilon,$$

и далее действуйте аналогично доказательству теоремы **??**.]]

2.8. **Теорема о среднем Коши и правило Лопиталя.**

Задача 2.35. Найдите пределы в зависимости от натуральных n и k для выражений

$$\frac{x^n}{e^x} \text{ и } \frac{\ln^n x}{x^k} \text{ при } x \to +\infty.$$

[[Можно применять правило Лопиталя напрямую, а можно вынести возведение в степень n за скобки и применять его к выражению в скобках.]]

Задача 2.36. Найдите по правилу Лопиталя предел в нуле в зависимости от целых n и k для выражения

$$x^n \ln^k x.$$

[[Следите за знаком чисел n и k. Возведение в степень k тоже удобно отправить за скобки, если конечно $k \neq 0$.]]

2.9. **Производные высших порядков, формула Тейлора.**

Задача 2.37. Выпишите формулы Тейлора с разными остаточными членами при $x_0 = 0$ для функций

$$e^x, \sin x, \cos x, (1+x)^\alpha, \ln(1+x), \operatorname{arctg} x.$$

Задача 2.38. Выпишите формулу Тейлора при $x_0 = 0$ для $\operatorname{tg} x$ до остаточного члена $o(x^6)$.

Задача 2.39. Докажите, что коэффициенты асимптотического разложения по степеням $(x - x_0)$ определены единственным образом.

[[Начните с $n = N$, а потом проведите индукцию по n.]]

Задача 2.40. Приведите пример функции, которая положительна при $x \neq 0$, но её асимптотическое разложение в нуле имеет все коэффициенты равными нулю.

[[Доопределите e^{-1/x^2} в нуле как 0 и считайте её производные в нуле по определению и правилу Лопиталя.]]

Задача 2.41. * Покажите, что для любого N и любого набора коэффициентов $a_N, a_{N+1}, \dots$ найдётся бесконечно дифференцируемая f с заданными коэффициентами асимптотического разложения по степеням x в нуле.

[[При решении этой задачи может понадобиться аккуратная работа с функциональными рядами и бесконечно гладкими функциями, отличными от нуля в маленькой окрестности нуля, что объясняется в разделе **??**.]]

3. Метрические пространства и их топология

3.1. **Определение и примеры.**

Задача 3.1. Проверьте непосредственно, что ρ_∞ является метрикой на евклидовом пространстве.

Задача 3.2. Проверьте, что формула

$$\rho_1(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$$

задаёт метрику на $\mathbb{R}^n$.

Задача 3.3. Пусть на множестве M есть *полурасстояние* $\rho : M \times M \to \mathbb{R}^+$, имеющее все свойства метрики, кроме свойства невырожденности, заменённого на более слабое свойство $\rho(x,x) \equiv 0$. Докажите, что отношение, определённое как

$$x \sim y \Leftrightarrow \rho(x,y) = 0,$$

является отношением эквивалентности, а на множестве $M/{\sim}$ функция ρ корректно задаёт невырожденную метрику.

[[Надо проверить транзитивность и равенство $\rho(x,y) = \rho(x',y)$ при $x \sim x'$.]]

3.2. **Пределы последовательностей, фундаментальные последовательности и полные метрические пространства.**

Задача 3.4. Докажите единственность предела последовательности точек метрического пространства.

[[Вспомните, что если расстояние между точками равно нулю, то сами точки равны.]]

Задача 3.5. Проверьте, что в любом метрическом пространстве сходящаяся последовательность фундаментальна.

[[Используйте неравенство треугольника

$$\rho(x_k, x_m) \leqslant \rho(x_k, x_0) + \rho(x_0, x_m).$$

]]

Задача 3.6. Проверьте, что для полного метрического пространства M отображение $i : M \to \overline{M}$ его в пополнение есть биекция.

[[Рассмотрите отображение $j : c(M) \to M$, ставящее в соответствие фундаментальной последовательности её предел. Разложите его в композицию $c(M) \to \overline{M} \to M$.]]

Задача 3.7. Докажите, что любое сохраняющее расстояния отображение метрических пространств $f : M \to N$ продолжается до сохраняющего расстояния отображения пополнений $\overline{f} : \overline{M} \to \overline{N}$.

[[Продолжите сначала f до сохраняющего расстояния отображения $c(M) \to c(N)$.]]

3.3. **Шары, ограниченность, радиус и диаметр.**

Задача 3.8. Докажите, что последовательность вложенных замкнутых шаров $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$ полного метрического пространства со стремящимися к нулю радиусами имеет единственную общую точку.

[[Докажите, что последовательность центров шаров будет фундаментальной.]]

Задача 3.9. Докажите, что последовательность вложенных замкнутых шаров $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$ евклидова пространства имеет общую точку, даже если радиусы шаров не стремятся к нулю.

[[Докажите, что последовательность центров шаров будет фундаментальной.]]

Задача 3.10. * Приведите пример полного метрического пространства, в котором утверждение предыдущей задачи неверно.

[[Введите метрику на $\mathbb{N}$ так, чтобы всегда выполнялось $\rho(n,m) > 1$ для $n \neq m$, докажите, что это гарантирует полноту такого метрического пространства. При подходящем введении метрики, радиусов и центров шаров можно добиться того, чтобы шары в последовательности выглядели как $B_k = \{n \mid n \geqslant k\}$.]]

Задача 3.11. Докажите, что подмножество метрического пространства ограничено тогда и только тогда, когда оно имеет конечный диаметр.

Задача 3.12. Докажите, что если два множества X и Y в метрическом пространстве M пересекаются, то

$$\operatorname{diam} X \cup Y \leqslant \operatorname{diam} X + \operatorname{diam} Y.$$

Приведите пример, когда неравенство нарушается для непересекающихся множеств.

3.4. **Топология в метрическом пространстве.**

Задача 3.13. Проверьте, что $x_n \to x_0$ в метрическом пространстве M тогда и только тогда, когда для любой ε-окрестности $U_\varepsilon(x_0)$ включение $x_n \in U_\varepsilon(x_0)$ выполняется для достаточно больших n.

Задача 3.14. Проверьте, что в $\mathbb{Z}$ с расстоянием $\rho(n,m) = |n-m|$ все шары, и вообще все подмножества открыты и замкнуты.

Задача 3.15. Проверьте, что стандартная метрика евклидова пространства и метрика ρ_∞ (максимум модуля разности координат) из леммы **??** определяют одну и ту же топологию в $\mathbb{R}^n$.

[[Поймите, что означает лемма **??** для шаров этих метрик.]]

Задача 3.16. Проверьте, что индуцированная топология соответствует индуцированной метрике.

Задача 3.17. Докажите, что объединение семейства связных множеств будет связно, если любые два множества в семействе пересекаются.

[[Предположите, что объединение $X - \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ несвязно, и рассмотрите его разложение на два непустых открытых относительно X множества, $X = Y \sqcup Z$. Посмотрите, как одно из исходных множеств X_α может пересекать Y и Z.]]

3.5. **Компактность в метрическом пространстве.**

Задача 3.18. Проверьте, что X компактно как подмножество M тогда и только тогда, когда оно компактно как подмножество самого себя в индуцированной с M метрике (или топологии).

Задача 3.19. Докажите, что объединение конечного числа компактных подмножеств пространства M тоже компактно.

[[Примените определение компактности.]]

Задача 3.20. Приведите пример полного метрического пространства, которое имеет конечный диаметр, но не компактно.

[[Возьмите некоторое множество и определите на нём метрику так, чтобы расстояние между любой парой различных точек было равно 1.]]

Задача 3.21. * Докажите, что из секвенциальной компактности метрического пространства X следует его компактность.

[[Это можно вывести из свойства вполне ограниченности, см. теорему **??**, но можно придумать и какое-нибудь другое рассуждение.]]

Задача 3.22. Приведите пример метрического пространства, в котором для каждой точки найдётся компактный шар положительного радиуса с центром в данной точке, но само пространство не полное.

[[Найдите пример в виде подмножества прямой.]]

Задача 3.23 (Аналог теоремы Кантора о вложенных отрезках для компактов). Пусть в метрическом пространстве M есть убывающая по включению последовательность непустых компактных подмножеств

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_k \supseteq \dots.$$

Докажите, что пересечение $\bigcap_{k=1}^{\infty} K_k$ не пусто.

[[Попробуйте покрыть K_1 открытыми множествами $U_K = M \setminus K_k$.]]

Задача 3.24. Пусть в метрическом пространстве M есть семейство компактов $\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}$, такое, что пересечение $\bigcap_{\alpha\in A} K_\alpha$ пусто. Докажите, что тогда для некоторого конечного подсемейства пересечение $K_{\alpha_1} \cap \dots \cap K_{\alpha_N}$ тоже пусто.

[[Попробуйте покрыть K_{α_0} открытыми множествами $U_\alpha = M \setminus K_\alpha$ при $\alpha \neq \alpha_0$.]]

Задача 3.25 (Лемма Лебега). Докажите, что если компактное метрическое пространство X покрыто открытыми множествами $\{U_\alpha\}$, то найдётся $\delta > 0$, такое, что любое подмножество $Y \subseteq X$ диаметра не более δ содержится в каком-то одном из множеств U_α полностью.

[[Предположите противное, взяв $\delta = 1/k$ и соответствующее Y_k с $\operatorname{diam} Y_k \leqslant 1/k$, которое не лежит в одном множестве покрытия. Выберите $y_k \in Y_k$ и рассмотрите предельную точку последовательности (y_k) в X.]]

3.6. **Непрерывные отображения метрических пространств.**

Задача 3.26. Докажите, что ограничение непрерывного отображения $f : M \to N$ на подмножество $X \subseteq M$ даёт непрерывное отображение $f|_X : X \to N$.

[[Используйте топологическое определение непрерывности.]]

Задача 3.27. Пусть функция одной переменной $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема. Докажите, что функцию двух переменных

$$g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

можно доопределить до непрерывной функции $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

[[Используйте теорему о среднем Лагранжа.]]

Задача 3.28. Докажите, что множество решений неравенства

$$f(x_1, \dots, x_n) > 0$$

открыто, если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна.

Задача 3.29. Докажите, что график непрерывной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ замкнут.

Задача 3.30. Верно ли, что если график функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ замкнут, то f непрерывна?

3.7. **Непрерывные отображения компактов и связных множеств.**

Задача 3.31. Докажите, что непрерывное отображение метрических пространств переводит секвенциальные компакты в секвенциальные компакты.

[[Используйте определение непрерывности по Гейне.]]

Задача 3.32. Докажите, что отображение между компактными метрическими пространствами $f : M \to N$ непрерывно тогда и только тогда, когда его график замкнут.

[[Используйте компактность произведения, непрерывность проекций $M \times N \to M$, $M \times N \to N$ и теорему **??**.]]

Задача 3.33. Докажите, что отображение $f : X \to \mathbb{R}^m$ для некоторого $X \subseteq \mathbb{R}^n$ переводит любую фундаментальную последовательность в фундаментальную тогда и только тогда, когда оно продолжается до непрерывного $\overline{f} : \operatorname{cl} X \to \mathbb{R}^m$.

Задача 3.34. Докажите, что для любого метрического пространства M его функция расстояния $\rho : M \times M \to \mathbb{R}^+$ непрерывна.

[[Используйте неравенство треугольника.]]

3.8. **Расстояние между множествами и нормальность.**

Задача 3.35. Докажите, что $\operatorname{dist}(X, Y) = \inf\{\operatorname{dist}(x, Y) \mid x \in X\} = \inf\{\operatorname{dist}(X, y) \mid y \in Y\}$.

Задача 3.36. Проверьте, что ε-окрестность любого множества открыта.

[[Используйте непрерывность функции расстояния до множества.]]

Задача 3.37. Докажите, что если компактное подмножество K некоторого метрического пространства M содержится в открытом подмножестве U, то K содержится в U вместе с некоторой своей ε-окрестностью.

[[Рассмотрите расстояние от компактного K до замкнутого $M \setminus U$.]]

Задача 3.38. Приведите пример замкнутых непересекающихся множеств X и Y в евклидовом пространстве, у которых ε-окрестности пересекаются при любом положительном ε.

[[Сделайте так, чтобы расстояние между X и Y было равно нулю.]]

Задача 3.39. Докажите, что если множество X в некотором метрическом пространстве компактно, то в определении $\operatorname{diam} X$ точная верхняя грань достигается.

[[Используйте задачу 3.34.]]

Задача 3.40. Докажите, что расстояние между подмножествами $\operatorname{dist}(X, Y)$ евклидова пространства не всегда удовлетворяет неравенству треугольника
$$\operatorname{dist}(X, Z) \leqslant \operatorname{dist}(X, Y) + \operatorname{dist}(Y, Z).$$

Задача 3.41. Пусть в метрическом пространстве M есть убывающая по включению последовательность непустых связных компактных подмножеств
$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_k \supseteq \dots.$$
Докажите, что пересечение $\bigcap_{k=1}^{\infty} K_k$ связно.

[[Предположите, что пересечение $X = \bigcap_{k=1}^{\infty} K_k$ разбилось на два непустых открытых относительно X множества, $X = Y \sqcup Z$. Заметьте, что Y и Z замкнуты, а значит, в силу нормальности имеют непересекающиеся открытые окрестности $X \subset U$ и $Y \subset V$. С помощью задачи 3.23 проверьте, что при достаточно большом n будет выполняться $K_n \subset U \sqcup V$.]]

3.9. **Кривые и линейная связность.**

Задача 3.42. Докажите, что конкатенация двух кривых является непрерывным отображением.

Задача 3.43. Докажите ассоциативность конкатенации ориентированных кривых, то есть выполнение формулы
$$(\gamma_1 \diamond \gamma_2) \diamond \gamma_3 = \gamma_1 \diamond (\gamma_2 \diamond \gamma_3)$$
в случае, если левая часть или правая часть определена.

Задача 3.44. *(Кривая Пеано) Придумайте кривую $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, образ которой равен квадрату $[0, 1]^2$.

[[Нарисуйте в квадрате диагональ. Потом разбейте квадрат на 9 маленьких квадратов и замените диагональ на ломаную, составленную непрерывным образом из девяти диагоналей маленьких квадратов. Потом к каждому из 9 отрезков ломаной примените ту же операцию, получив ломаную из 81 отрезка, потом получите ломаную из 729 отрезков и продолжайте делать так же. Пусть на n-м этапе этой процедуры ломаная параметризована с постоянной скоростью как $\gamma_n : [0, 1] \to [0, 1]^2$. Докажите, что предел $\gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \gamma_n(t)$ существует, непрерывно зависит от t и оказывается во всех точках квадрата.]]

Задача 3.45. Докажите, что ломаная не может заполнить весь квадрат.

[[Можно доказывать по разному. Один из вариантов: заметить, что на плоскости верна теорема Бэра **??** об объединении счётного числа замкнутых неплотных множеств.]]

Задача 3.46. * Докажите, что функции $x(t)$ и $y(t)$, получающиеся по приведённому выше рецепту построения кривой Пеано, будут непрерывными, но ни в одной точке не дифференцируемыми.

[[Опишите $x(t)$ как предел последовательности $(x_n(t))$, обратите внимание, что функции x_n кусочно-линейные, $|\frac{dx_n}{dt}| = 3^{n-1}$ там, где производная существует, и что для любого $t_0 \in [0, 1]$ при любом n найдутся $t' \leqslant t \leqslant t''$, такие что
$$t'' - t' \leqslant 3^{1-n}, \quad x_n(t') = x(t'), \quad x_n(t'') = x(t''), \quad \left|\frac{x(t'') - x(t')}{t'' - t'}\right| = 3^{n-1}.$$
Докажите, что это противоречит дифференцируемости $x(t)$ в t_0.]]

Задача 3.47. Докажите, что замыкание связного множества $X \subseteq M$ в метрическом пространстве M тоже связно.

[[Предположите, что $\operatorname{cl} X$ разбилось на два относительно открытых Y и Z. Докажите, что $X \cap Y$ и $X \cap Z$ будут непустые.]]

Задача 3.48. Докажите, что если образ кривой $\gamma : [a,b] \to M$ пересекает и внутренность и внешность множества $X \subset M$, то он пересекает и границу X.

[[Используйте топологическое определение непрерывности кривой аналогично доказательству теоремы **??**.]]

Задача 3.49. Докажите, что пересечение выпуклых множеств выпукло. Приведите пример, когда пересечение линейно связных множеств может не быть линейно связным.

Задача 3.50. Докажите, что объединение пересекающихся линейно связных множеств линейно связно. Приведите пример, когда объединение пересекающихся выпуклых множеств не является выпуклым.

Задача 3.51. Докажите, что решение любой (в том числе бесконечной) системы линейных неравенств вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leqslant b$$

в $\mathbb{R}^n$ выпукло.

Задача 3.52. *(Теорема Хелли на плоскости) Докажите, что если в конечном наборе выпуклых множеств на плоскости $\mathbb{R}^2$ любые три множества имеют непустое пересечение, то все множества набора имеют непустое пересечение.

[[Используйте индукцию по количеству множеств, ключевой случай — когда в наборе четыре множества.]]

Задача 3.53. * Покажите, что для бесконечных наборов выпуклых множеств теорема Хелли уже неверна.

[[Контрпример можно построить уже на прямой.]]

3.10. **Равномерная непрерывность.**

Задача 3.54. Проверьте, что для положительных x и y

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}.$$

Задача 3.55. Докажите, что если производная функции $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ограничена, то функция липшицева.

[[Используйте теорему о среднем Лагранжа.]]

Задача 3.56. Будем говорить, что $f : M \to N$ *локально липшицево*, если у любой точки $x_0 \in M$ есть окрестность, в ограничении на которую f липшицево. Докажите, что если M компактно, то любое локально липшицево отображение из него липшицево на всём M.

[[Проверьте, что локально липшицево отображение непрерывно. Далее действуйте от противного и предположите существование последовательности пар точек (x_n, y_n), такой что $\frac{\rho(f(x_n),f(y_n))}{\rho(x_n,y_n)} \to +\infty$. Используя компактность, перейдите к подпоследовательности и считайте, что $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$, $f(x_n) \to f(x_0)$, $f(y_n) \to f(y_0)$. Рассмотрите после этого два случая: $x_0 = y_0$ и $x_0 \neq y_0$.]]

Задача 3.57. Докажите, что если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, то существуют константы $L, C > 0$, такие что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x-y| + C.$$

[[Фиксируйте некоторые ε и δ в определении равномерной непрерывности. Любой отрезок $[x,y]$ разбейте на части длиной меньше δ и оцените сумму приращений f на этих частях.]]

Задача 3.58. Докажите, что функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ на ограниченном интервале (a, b) равномерно непрерывна тогда и только тогда, когда она имеет конечные пределы на концах интервала.

[[В одну сторону используйте теорему **??**, в другую сторону — теорему **??**.]]

Задача 3.59. Докажите, что если функция $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, равномерно непрерывна, то она продолжается до непрерывной функции на замыкании множества X.

[[Заметьте, что f переводит фундаментальные последовательности в фундаментальные.]]

Задача 3.60. * Как естественно определить расстояние в произведении $M \times M$ метрического пространства на себя (то есть $\rho_2 : (M \times M) \times (M \times M) \to \mathbb{R}^+$), чтобы исходная функция расстояния $\rho : M \times M \to \mathbb{R}^+$ оказалась относительно этого расстояния липшицевой с константой 1?

[[Поищите в классе функций вида $\rho_2((x, y), (x', y')) = f(\rho(x, x'), \rho(y, y'))$.]]

3.11. **Разрывные и полунепрерывные функции.**

Задача 3.61. Проверьте утверждения о том, что множество частичных пределов функции при $x \to x_0$ непусто, замкнуто в $\overline{\mathbb{R}}$; и что оно состоит из одной точки тогда и только тогда, когда у функции есть предел при $x \to x_0$.

Задача 3.62. Докажите, что если функция f непрерывна в проколотой окрестности $U(x_0) \setminus \{x_0\}$ точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 2$, то множество её частичных пределов в x_0 является промежутком.

[[Используйте связность проколотых окрестностей при $n \geqslant 2$.]]

Задача 3.63. Приведите пример полунепрерывной снизу функции на отрезке, не имеющей максимального значения.

Задача 3.64. Докажите, что сумма полунепрерывных снизу функций полунепрерывна снизу.

[[Заметьте, что

$$f(x) + g(x) > y \Leftrightarrow \exists z, t \in \mathbb{R},\ z + t > y,\ f(x) > z,\ g(x) > t.$$

]]

Задача 3.65. Докажите, что для любого отображения $f : M \to N$ между метрическими пространствами функция $\omega(f, x)$ является полунепрерывной сверху.

[[Предположите, что неравенство $\omega(f, x_0) < c$ верно для некоторых $x_0 \in X$ и $c \in \mathbb{R}$. Примените определение ω и проверьте, что для некоторой окрестности $U \ni x_0$ неравенство $\omega(f, x) < c$ тоже верно для всех $x \in U$.]]

Задача 3.66. Докажите, что для любой функции $f : M \to \mathbb{R}$ на метрическом пространстве функция (точные грани берутся по открытым U)

$$\overline{f}(x_0) = \inf \{\sup\{f(x) \mid x \in U\} \mid U \ni x_0\}$$

полунепрерывна сверху, а функция

$$\underline{f}(x_0) = \sup \{\inf\{f(x) \mid x \in U\} \mid U \ni x_0\}$$

полунепрерывна снизу.

[[Используйте определение полунепрерывности с использованием неравенств $\overline{f}(x) < c$ и $\underline{f}(x) > c$.]]

Задача 3.67. * Докажите, что не существует функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непрерывной в рациональных точках, и разрывной в иррациональных точках.

[[Рассмотрите замкнутые множества $\{x \mid \omega(f, x) \geqslant 1/n\}$ и аккуратно примените теорему Бэра.]]

Задача 3.68. * Докажите, что если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ полунепрерывна, то множество её точек разрыва имеет пустую внутренность.

[[Предположите для определённости, что f полунепрерывна снизу. Предположив противное (f разрывна на некотором интервале) с помощью теоремы Бэра перейдите к меньшему интервалу, где f ограничена сверху. Далее с помощью теоремы Бэра перейдите к ещё меньшему интервалу, на котором колебание f не менее $1/k$ в любой точке. Получите противоречие с ограниченностью сверху.]]

3.12. **Длина кривой в метрическом пространстве.**

Задача 3.69. Докажите тождество $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$ для непустых X и Y, не забывая рассмотреть случай бесконечной точной верхней грани и принимая соглашение $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

Задача 3.70. Проверьте, что если $\gamma : [a, b] \to M$ не обязательно спрямляема, то $\ell(\gamma_t)$, рассматриваемая как функция $[a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$, всё равно непрерывно зависит от t в смысле стандартной топологии на расширенной числовой прямой.

Задача 3.71. Определение длины кривой можно дословно использовать и для разрывных кривых. Докажите, что если разрывная кривая $\gamma : [a, b] \to M$ в полном метрическом пространстве имеет конечную длину, то в любой соответствующей параметру $t_0 \in [a, b]$ точке кривая имеет левый и правый пределы $\gamma(t_0 - 0)$ и $\gamma(t_0 + 0)$, и случаев их несовпадения счётное количество.

[[В силу полноты пространства примените критерий Коши существования, скажем правого, предела и заметьте, что при его отсутствии в кривую можно будет «вписать ломаную» произвольно большой длины.]]

3.13. **Дифференцируемые кривые в евклидовом пространстве.**

Задача 3.72. Приведите пример ситуации, когда в теореме о среднем для кривой нельзя добиться равенства ни при каком ξ.

Задача 3.73. Выпишите формулу кривизны дважды дифференцируемой кривой в евклидовом пространстве, заданной в произвольной параметризации. Выпишите параметрическое уравнение эволюты плоской кривой, заданной в произвольной параметризации.

[[Воспользуйтесь тем, что $\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'_t}{|\gamma'_t|}$ и продифференцируйте это равенство по s ещё раз. В левой части получится вектор, длина которого равна кривизне, а производную по s справа найдите как производную по t, делённую на $|\gamma'_t|$. Проверьте, что в трёхмерном случае у вас получилась формула ($u \times v$ означает векторное произведение векторов $u, v \in \mathbb{R}^3$)

$$k = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3}.$$

При выписывании уравнения эволюты заметьте, что на плоскости $\mathbb{R}^2$ удобнее считать кривизну плоской кривой величиной со знаком (векторное произведение в формуле выше рассматривать без модуля и считать числом), если требовать, чтобы в формулах Френе (τ, ν) всегда была правой парой векторов.]]

Задача 3.74. Докажите, что для центра кривизны на плоскости выполняется $\frac{d\rho}{ds} = \frac{dR}{ds}\nu$ и объясните, как восстановить кривую γ по её эволюте ρ.

Задача 3.75. Выведите формулу для кручения трижды дифференцируемой кривой в произвольной, не обязательно натуральной, параметризации.

[[Сначала посмотрите на смешанное произведение $(\gamma', \gamma'', \gamma''')$ в натуральной параметризации, а потом изучите, как оно поменяется при замене параметризации на произвольную. Убедитесь, что полученное вами выражение эквивалентно следующему ($u \times v$ означает векторное произведение векторов $u, v \in \mathbb{R}^3$)

$$\varkappa = \frac{(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{|\gamma' \times \gamma''|^2}.$$

]]

Задача 3.76. Опишите кривые в $\mathbb{R}^3$ с постоянной ненулевой кривизной и постоянным ненулевым кручением.

[[Подберите какие-то кривые из известных вам или решите систему линейных дифференциальных уравнений, которую дают формулы Френе. Отсутствие других примеров обоснуйте теоремой существования и единственности решений для линейных дифференциальных уравнений **??**.]]

3.14. **Внутренняя метрика метрического пространства.**

Задача 3.77. Объясните, почему для внутренней метрики выполняется неравенство треугольника.

[[Используйте конкатенацию.]]

Задача 3.78. Докажите, что если метрика ρ в M уже была внутренняя, то операция взятия внутренней метрики, ρ_ℓ, даст ту же самую метрику $\rho_\ell \equiv \rho$.

[[Заметьте, что из предыдущей леммы следует, что в рассматриваемом случае две точки на расстоянии d можно соединить кривой длины, сколь угодно близкой к d.]]

Задача 3.79. * Докажите, что в метрическом пространстве с компактными шарами минимум в определении внутренней метрики, если он конечный, достигается на некоторой (возможно не единственной) кривой, называемой *кратчайшей*.

[[Рассмотрите последовательность кривых, стремящихся к точной нижней грани. Параметризуйте кривые почти натурально липшицевым образом и используйте рассуждения типа теоремы Арцела–Асколи **??**, выбирая из последовательности кривых равномерно сходящуюся подпоследовательность (см. раздел **??**), с учётом теоремы **??**.]]

4. Ряды, приближения функций и первообразные

4.1. **Комплексные числа и многочлены.**

Задача 4.1. На множестве четвёрок действительных чисел, записываемых в виде $a+ib+jc+kd$ введём умножение по правилам

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j,$$

это называется *кватернионы*. Докажите, что у любого ненулевого кватерниона есть обратный относительно умножения.

[[Определите сопряжение и действуйте как с комплексными числами.]]

Задача 4.2 (Деление многочленов с остатком). Докажите, что для $P, D \in \mathbb{F}[x]$, при $\deg D > 0$, найдётся единственный *остаток* $R \in \mathbb{F}[x]$ с $\deg R < \deg D$ и единственное *частное* $Q \in \mathbb{F}$, такие что

$$P = QD + R.$$

[[Можно использовать индукцию по степени P.]]

Задача 4.3. Докажите, что любой многочлен $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots c_n z^n \in \mathbb{C}[z]$ степени n раскладывается в произведение

$$P(z) = c_n(z - z_0) \dots (z - z_n).$$

[[Поделите многочлен с остатком на многочлен $z - z_0$ и посмотрите, что будет, если z_0 был его корнем.]]

Задача 4.4. Докажите, что любой многочлен $P \in \mathbb{R}[x]$ представляется в виде произведения константы, линейных многочленов вида $x - x_i$ и квадратных трёхчленов вида $x^2 + p_i x + q_i$ с отрицательными дискриминантами.

[[Примените комплексное утверждение и заметьте, что у действительного многочлена корни идут парами комплексно сопряжённых.]]

Задача 4.5 (Алгоритм Евклида для многочленов). Докажите, что для любой пары многочленов $P, Q \in \mathbb{F}[x]$ найдутся $S, T \in \mathbb{F}[x]$, такие что $\deg S < \deg Q$, $\deg T < \deg P$, а многочлен

$$D = SP + TQ$$

является делителем P и Q. Этот *наибольший общий делитель* D определён однозначно с точностью умножения на константу.

[[Поделите P на Q с остатком и примените предположение индукции к Q и остатку R.]]

Задача 4.6. Докажите, что любой общий делитель многочленов P и Q из предыдущей задачи является также делителем многочлена D из предыдущей задачи.

[[Используйте установленную формулу наибольшего общего делителя.]]

Задача 4.7. Два многочлена с наибольшим общем делителем степени 0 (то есть константой) назовём *взаимно простыми.* Докажите, что многочлены $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ взаимно просты тогда и только тогда, когда они не имеют общих корней.

[[Используйте установленную формулу наибольшего общего делителя и алгебраическую замкнутость $\mathbb{C}$.]]

Задача 4.8. Многочлен из $\mathbb{F}[x]$ положительной степени называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде произведения многочленов из $\mathbb{F}[x]$ меньшей степени. Докажите, что любой многочлен из $\mathbb{F}[x]$ можно разложить в произведение *неприводимых* многочленов единственным образом, с точностью до перестановки сомножителей и домножения их на ненулевые числа (элементы поля $\mathbb{F}$).

[[Вспомните, как в школе доказывалась единственность разложения натурального числа в произведение простых. Если в школе единственность разложения не доказывалась, то докажите с помощью алгоритма Евклида следующее утверждение: *Если многочлены P и Q взаимно просты, а также многочлены P и R взаимно просты, то многочлены P и QR взаимно просты.*]]

Задача 4.9. Докажите, что если две рациональные дроби из $\mathbb{R}(x)$ принимают одинаковые значения при подстановке в них любого $x \in \mathbb{R}$, для которого они одновременно могут быть вычислены, то они равны в смысле предыдущего определения.

[[Сведите к равенству двух многочленов, значения которых совпадают на бесконечном множестве значений переменной.]]

Задача 4.10. Докажите, что если $\frac{P}{Q_1Q_2}$ — правильная дробь, а Q_1 и Q_2 взаимно просты, то дробь можно представить в виде суммы правильных дробей

$$\frac{P}{Q_1Q_2} = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}.$$

[[Домножьте требуемое равенство на Q_1Q_2 и вспомните про выражение для наибольшего общего делителя.]]

Задача 4.11. Проверьте по определению, что производная экспоненты комплексного числа в комплексном смысле равна той же экспоненте.

[[Из свойств экспоненты достаточно посчитать производную в нуле. Разложите экспоненту, косинус и синус в выражении для e^{a+ib} по формуле Тейлора до $o(a)$ и $o(b)$.]]

Задача 4.12. Для квадратного трёхчлена $x^2 + px + q$, не имеющего действительных корней, найдите первообразную правильной дроби

$$\frac{ax + b}{x^2 + px + q}$$

в виде, использующем только действительные числа и функции.

[[Посмотрите, как записать отдельно действительную и мнимую часть логарифма комплексного числа.]]

4.2. **Суммирование абсолютно сходящихся рядов.**

Задача 4.13. Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ имеют конечные суммы. Определим

$$c_n = \begin{cases} a_k, & n = 2k - 1; \\ b_k, & n = 2k. \end{cases}$$

Докажите, что $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

[[Используйте определение и, возможно, необходимое условие сходимости.]]

Задача 4.14. Докажите по определению, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

[[Используйте неравенство $1/n \geqslant \ln(1 + 1/n)$.]]

Задача 4.15. Докажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно* (то есть сходится, но не абсолютно), то переставляя его слагаемые, можно получить любое число, а также $-\infty$ и $+\infty$.

[[Заметьте, что сумма положительных членов ряда $+\infty$, а сумма отрицательных членов $-\infty$. Для действительного A выписывайте члены ряда так: если частичная сумма меньше A, то добавляйте к ней следующий положительный член, если больше или равна A — то добавляйте следующий неположительный член. Для $A = \pm\infty$ поправьте эту конструкцию соответственно.]]

Задача 4.16 (Геометрическая прогрессия). Докажите, что для $|z| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}.$$

[[Запишите частичную сумму в явном виде.]]

Задача 4.17 (Почти геометрическая прогрессия). Докажите, что для $|z| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

[[Начните с произведения геометрических прогрессий

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \sum_{k,n \geqslant 0} z^{n+k}$$

и сгруппируйте в нём слагаемые с одинаковой степенью z.]]

Задача 4.18 (Признак Даламбера абсолютной сходимости ряда). Пусть для последовательности положительных чисел (a_n) существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in [0, +\infty].$$

Тогда при $q > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, а при $q < 1$ — сходится.

[[Аналогично признаку Коши, сравните ряд с геометрической прогрессией.]]

Задача 4.19. Пусть последовательность положительных чисел (a_n) убывает. Докажите, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} < +\infty.$$

[[Оцените одно через другое и наоборот, используя очевидное неравенство $a_{2^{k-1}} \geqslant a_n \geqslant a_{2^k}$ при условии $2^{k-1} \leqslant n \leqslant 2^k$.]]

Задача 4.20. Докажите, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < +\infty \Leftrightarrow s > 1.$$

[[Используйте предыдущую задачу.]]

Задача 4.21. Сходится ли ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}?$$

[[Аналогично предыдущей задаче.]]

Задача 4.22. * Докажите, что при $s > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-s}},$$

где произведение берётся по простым числам и бесконечное произведение понимается как предел частичных произведений.

[[В конечном произведении раскройте скобки и перейдите к пределу по количеству скобок.]]

Задача 4.23. * Докажите, что сумма

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$$

расходится.

[[Возьмите логарифм в предыдущей формуле, чтобы сделать из произведения сумму. Оцените эту сумму и перейдите к пределу $s \to 1+0$.]]

4.3. **Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов.**

Задача 4.24. Верно ли, что $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \rightrightarrows_{\mathbb{R}} e^x$?

[[Сравните поведение экспоненты и её приближений на бесконечности.]]

Задача 4.25. Верно ли, что $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \rightrightarrows_{[a,b]} e^x$, если $[a,b]$ — некоторый отрезок?

[[Возьмите логарифм, воспользуйтесь липшицевостью экспоненты на отрезке и, например, разложением логарифма по формуле Тейлора с явным видом остаточного члена.]]

Задача 4.26. При каких значениях коэффициентов a_n функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сходится равномерно на всей прямой $\mathbb{R}$?

[[Начните с применения необходимого условия равномерной сходимости ряда.]]

Задача 4.27. Проверьте, что если в теореме о дифференцировании последовательности функций отрезок $[a,b]$ заменить на неограниченный промежуток, то сходимость $(f_n(x))$ может и не быть равномерной.

[[Достаточно рассмотреть случай, когда f_n' являются константами, сходящимися к какой-то константе.]]

Задача 4.28 (Пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции, см. также задачу 3.46). Пусть функция $\varphi(x)$ равна 0 в чётных целых числах, 1 в нечётных целых числах, непрерывна и линейна между целыми числами (её график выглядит как пила). Докажите, что сумма ряда

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{4^n}\varphi(4^n x)$$

непрерывна, но нигде не дифференцируема.

[[Непрерывность следует из признака Вейерштрасса и непрерывности равномерного предела. Для анализа дифференцируемости в точке x_0, для $n\in\mathbb{Z}^+$ рассмотрите приближения

$$a_n = m4^{-n} \leqslant x_0 \leqslant (m+1)4^{-n} = b_n$$

и изучите приращение $f(b_n)-f(a_n)$. Заметьте, что если f дифференцируема в точке x_0, то $\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}$ стремится к $f'(x_0)$.]]

4.4. **Степенные ряды и радиус сходимости.**

Задача 4.29. Проверьте, что на открытом круге сходимости $|z-z_0|<R$ степенной ряд может и не сходиться равномерно.

[[Рассмотрите геометрическую прогрессию $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ и примените необходимое условие равномерной сходимости.]]

Задача 4.30. Верно ли, что любой степенной ряд с бесконечным радиусом сходимости сходится равномерно на $\mathbb{C}$?

Задача 4.31 (Формула Даламбера для радиуса сходимости). Докажите, что для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ радиус сходимости можно найти как

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

если предел существует.

[[Сравните сумму ряда из модулей с геометрической прогрессией.]]

Задача 4.32. Приведите пример степенного ряда, который расходится в любой граничной точке круга сходимости и пример степенного ряда, который сходится равномерно на замыкании круга сходимости.

[[Используйте формулу Коши–Адамара и наблюдение, что $\sqrt[n]{n} \to 1$ при $n \to \infty$.]]

4.5. **Ряды Тейлора для элементарных функций.**

Задача 4.33. Определите косинус и синус через подстановку комплексного числа в экспоненту

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

проверьте их основные свойства, исходя из такого определения. Выпишите их ряды Тейлора.

Задача 4.34. * Используя ряды для e^z и $\ln(1+z)$ как определения этих функций, докажите формулу $\ln e^z = z$ для достаточно близких к нулю комплексных z.

[[Сначала напишите

$$(e^z - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} e^{kz} = \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{k^m z^m}{m!},$$

а потом

$$\ln e^z = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n \leqslant m} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{n} \frac{k^m z^m}{m!} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n \leqslant m} \binom{n-1}{k-1} (-1)^{k+1} \frac{k^{m-1} z^m}{m!},$$

просуммируйте сначала по n, потом по k.]]

Задача 4.35. Установите разложение функции $f(x) = (1+x)^\alpha$ в ряд Тейлора при $|x| < 1$, положив $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ и установив формулу $g'(x) = \frac{\alpha}{1+x} g(x)$ при $|x| < 1$.

Задача 4.36. Проверьте, что теорема **??** не позволяет установить разложимость в ряд Тейлора $(1+x)^\alpha$ и $\ln(1+x)$ при $|x| < 1$.

Задача 4.37. Приведите пример бесконечно дифференцируемой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ряд Тейлора которой сходится, но не к f.

[[Используйте функцию из задачи 2.40.]]

4.6. **Условная сходимость рядов, признаки Абеля и Дирихле.**

Задача 4.38. Докажите, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$$

сходятся при $\alpha > 0$ равномерно на любом отрезке $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, но при $\alpha \in (0, 1]$ сходимость будет условной и не равномерной на $(0, 2\pi)$.

[[Примените признак Дирихле, посчитав суммы $\sum_{k=1}^{n} \sin kx$ и $\sum_{k=1}^{n} \cos kx$, которые являются мнимой и действительной частью геометрической прогрессии $\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}$. Для доказательства отсутствия абсолютной сходимости оцените $|\sin x| \geqslant \sin^2 x$ и $|\cos x| \geqslant \cos^2 x$. Для доказательства отсутствия равномерной сходимости в окрестности нуля примените критерий Коши равномерной сходимости.]]

Задача 4.39. Последовательность a_n *сходится в среднем* к числу a, если последовательность

$$\overline{a}_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

сходится к a в обычном смысле. Докажите, что если $a_n \to a$, то $\overline{a}_n \to a$.

[[Сначала рассмотрите сходимость к нулю, в общем случае представьте последовательность как сумму постоянной и бесконечно малой.]]

Задача 4.40. Опишите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, «непрерывные в среднем», то есть такие, для которых сходимость в среднем x_n к x_0 влечёт сходимость в среднем $f(x_n)$ к $f(x_0)$.

[[Обратите внимание, что последовательность (x_n), принимающая только два значения a и b, может сойтись в среднем к любой точке между a и b.]]

Задача 4.41. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с частичными суммами

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

сходится в среднем (или *сходится по Чезаро*) к числу S, если последовательность (S_n) сходится в среднем к S. Найдите, куда в среднем сходятся ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx.$$

[[Для вычислений удобно воспользоваться $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ и суммировать геометрические прогрессии.]]

4.7. **Приближение кусочно линейными функциями и многочленами.**

Задача 4.42. Докажите, что если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и имеет *компактный носитель* (то есть равна нулю за пределами некоторого компакта), а $t_n \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательность функций

$$f_n(x) = f(x - t_n)$$

равномерно стремится к f.

[[Докажите, что непрерывная функция с компактным носителем равномерно непрерывна.]]

Задача 4.43. Пусть n — натуральное число, $[a, b]$ — отрезок, $M \in \mathbb{R}$, и последовательность многочленов (P_k) степени не более n равномерно ограничена на $[a, b]$ числом M, то есть $|P_k(x)| \leqslant M$ для любых $x \in [a, b]$ и k. Докажите, что из последовательности (P_k) можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность, которая сходится к многочлену степени не более n.

[[Переходом к подпоследовательности добейтесь того, чтобы последовательность (P_k) сходилась в $n + 1$ разной точке отрезка. Потом примените какую-нибудь формулу, выражающую многочлен не более чем n-й степени через его значения в $n + 1$ разной точке.]]

Задача 4.44 (Теорема Чебышёва). Докажите, что для всякой непрерывной $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и натурального n, существует многочлен P степени n, который приближает f равномерно точнее всех. Пусть $d = \max\{|f(x) - P(x)| \mid x \in [a, b]\}$. Докажите, что существуют $n+2$ точки

$$a \leqslant x_1 < \dots < x_{n+2} \leqslant b,$$

такие, что $|f(x_i) - P(x_i)| = d$ для любого i и знаки отклонений

$$f(x_1) - P(x_1),\ f(x_2) - P(x_2),\ \dots, f(x_{n+2}) - P(x_{n+2})$$

чередуются.

[[Существование наилучшего приближения выведите из результата предыдущей задачи. Для доказательства свойства перемен знаков, рассмотрите замкнутое множество

$$S = \{x \in [a, b] \mid |f(x) - P(x)| = d\}.$$

Если перемен знаков выражения $f(x) - P(x)$ на множестве S оказалось не более n, то постройте многочлен Q степени не более n, такой что $P + tQ$ приближает f лучше, чем P, при достаточно малых положительных t.]]

Задача 4.45 (Многочлен Чебышёва). Найдите многочлен степени не более $n-1$, лучше всего приближающий функцию x^n на отрезке $[-1,1]$. Какова точность этого приближения?

[[Придумайте многочлен степени n, который $n+1$ раз на данном отрезке принимает своё наибольшее по модулю значение. Используйте тригонометрические функции.]]

4.8. **Приближение тригонометрическими многочленами и общая теорема Стоуна–Вейерштрасса.**

Задача 4.46. Какие функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ можно равномерно на всей прямой сколь угодно близко приблизить многочленами?

[[Предположите, что такое приближение $P_k \rightrightarrows_{\mathbb{R}} f$ возможно и убедитесь, что степени многочленов P_k ограничены.]]

Задача 4.47. Докажите, что если метрическое пространство X компактно, то любая полунепрерывная снизу $f : X \to \mathbb{R}$ является поточечным пределом возрастающей последовательности непрерывных функций.

[[Для любого натурального n найдите по определению полунепрерывности у каждой точки $x \in X$ окрестность $U(x) \ni x$ диаметра менее $1/n$, такую что $f(y) > f(x) - 1/n$ для любой $y \in U(x)$. Пользуясь компактностью X, покройте его конечным числом таких окрестностей $U(x_i)$. С помощью разбиения единицы (h_i), подчинённого этому покрытию, постройте $f_n = -1/n + \sum_i f(x_i)h_i(x)$ и докажите, что $f_n \leqslant f$ и $f_n \to f$ поточечно при $n \to \infty$. Чтобы сделать последовательность возрастающей, перейдите к новой последовательности $\overline{f}_n = \max\{f_1, \dots, f_n\}$.]]

Задача 4.48. Верно ли, что любую непрерывную функцию $f : S \to \mathbb{C}$, где $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ можно сколь угодно близко приблизить многочленом Лорана из $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$?

[[Докажите, что действительная часть многочлена Лорана на окружности сама выражается как многочлен Лорана.]]

Задача 4.49. Верно ли, что любую непрерывную функцию $f : S \to \mathbb{C}$, где $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ можно сколь угодно близко приблизить обычным многочленом из $\mathbb{C}[z]$?

[[Полезно посмотреть на интеграл $\int_S f(z)\ dz$ или использовать какие-то другие инструменты из главы **??**.]]

Задача 4.50. Докажите, что если непрерывные функции $f_1, \dots, f_n \in C(X)$ не имеют общих нулей на X, то найдутся $g_1, \dots, g_n \in C(X)$, такие что

$$g_1 f_1 + \dots + g_n f_n = 1.$$

[[Достаточно положить $g_i = f_i/(f_1^2 + \dots + f_n^2)$.]]

Задача 4.51. Для компактного X докажите, что для любого гомоморфизма алгебр $E : C(X) \to \mathbb{R}$, то есть линейного отображения, совместимого с умножением по формулам $E(fg) = E(f)E(g)$ и $E(1) = 1$, найдётся точка $x \in X$ такая, что для любой $f \in C(X)$ оказывается

$$E(f) = f(x).$$

[[Рассмотрите множество функций $\mathfrak{m} = \{f \in C(X) \mid E(f) = 0\}$. Выведите из предыдущей задачи, что любой конечный набор $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{m}$ имеет общий нуль. Заключите из компактности, что все функции из $\mathfrak{m}$ имеют общий нуль $x \in X$, а потом установите действие отображения E на функции, не содержащиеся в $\mathfrak{m}$.]]

Задача 4.52. ** Докажите утверждение предыдущей задачи для необязательно компактного метрического пространства X.

[[Рассматривая лишь ограниченные непрерывные функции, можно описать гомоморфизмы в духе задачи 9.150 (модифицировав понятие ультрафильтра до элемента *компактификации Стоуна–Чеха* топологического пространства). Потом можно выяснить, что расширение гомоморфизма на неограниченные функции возможно? только если гомоморфизм соответствует элементу X.]]

Задача 4.53 (Частный случай теоремы Урысона). Докажите, что для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ найдётся непрерывная функция $f : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, которая равна единице на K и равна нулю за пределами наперёд заданной окрестности $U_\varepsilon(K)$.

[[Посмотрите сначала на функцию расстояния $\operatorname{dist}(x, K)$.]]

Задача 4.54. *(Частный случай теоремы Титце) Докажите, что непрерывную на компакте $K \subset \mathbb{R}^n$ функцию можно продолжить непрерывно на всё $\mathbb{R}^n$ так, что она будет равна нулю за пределами наперёд заданной окрестности $U_\varepsilon(K)$.

[[Один из вариантов решения: положить $L = \mathbb{R}^n \setminus U_\varepsilon(K)$, $V = \mathbb{R}^n \setminus (K \cup L)$ и продолжить f на L нулём. Потом сделать разбиение единицы $1 = \sum_n \rho_n(x)$ на V так, чтобы диаметр носителя ρ_n был не более его расстояния до $K \cup L$. Потом домножить ρ_n на значение в ближайшей к носителю ρ_n точке $K \cup L$ и сложить результаты. Другой вариант: вывести эту теорему из теоремы Урысона и непрерывности равномерного предела последовательности непрерывных функций, таким образом доказав полный вариант теоремы Титце для нормальных топологических пространств.]]

Задача 4.55. * Докажите, что функцию на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, которая является 1-липшицевой ($|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$), можно продолжить на всё $\mathbb{R}^n$ так, что она останется 1-липшицевой.

[[Докажите, что можно продолжить 1-липшицевым образом на ещё одну точку $x \notin X$. Потом продолжайте по одной точке на счётное плотное в $\mathbb{R}^n \setminus X$ подмножество, а на всё $\mathbb{R}^n$ продолжите по непрерывности]]

Задача 4.56 (Теорема Киршбрауна). ** Докажите, что отображение $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$, которое является 1-липшицевым ($|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$ для любых $x, y \in X$), можно продолжить до $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ так, что оно останется 1-липшицевым.

[[Аналогично, достаточно продолжить на одну точку, но в этой теореме это посложнее.]]

4.9. **Интегрирование непрерывных функций через приближения.**

4.10. **Разбиения отрезка, суммы Дарбу и интеграл Римана.**

Задача 4.57. Проверьте, что общее измельчение двух разбиений действительной является разбиением того же отрезка.

Задача 4.58. Докажите, что если τ состоит из n промежутков, а σ — из m промежутков, то в $\tau \wedge \sigma$ не более $n + m - 1$ промежутка.

4.11. **Интеграл Римана через ступенчатые функции.**

Задача 4.59. Докажите, что если $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ступенчатые, то

$$M(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

тоже ступенчатые.

4.12. **Интегрируемость по Риману разных функций.**

Задача 4.60. Докажите утверждение в обратную сторону: Если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что если $|\tau| < \delta$, то для любой системы представителей

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx - \sigma(f, \tau, \xi)\right| < \varepsilon,$$

то функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману.

Задача 4.61. Докажите, что $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся непрерывные $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$, такие что $g \leqslant f \leqslant h$ и $\int_a^b h(x) - g(x)\ dx < \varepsilon$.

[[Проверьте, что из приближения f снизу и сверху элементарно ступенчатыми можно получить не сильно отличающееся в среднем приближение снизу и сверху непрерывными. В обратную сторону, начав с приближения снизу и сверху непрерывными, приблизьте непрерывные функции снизу и сверху элементарно ступенчатыми, используя их интегрируемость по Риману.]]

Задача 4.62 (Функция Дирихле). Докажите, что функция, принимающая значение 1 на рациональных числах и 0 на иррациональных, не интегрируема по Риману ни на одном отрезке положительной длины.

[[Заметьте, что её колебание на промежутке положительной длины равно 1.]]

Задача 4.63. Пусть последовательность интегрируемых по Риману функций $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ сходится равномерно к функции f_0. Докажите, что f_0 интегрируема по Риману и

$$\int_a^b f_0(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx.$$

[[Используйте, что f_n равномерно приближает f_0 и само может быть приближено снизу и сверху ступенчатыми функциями с небольшой разностью между их интегралами.]]

Задача 4.64. Докажите, что предыдущее утверждение не верно для поточечной сходимости функций, даже если все эти функции равномерно ограничены.

[[Можно использовать функцию Дирихле.]]

Задача 4.65. Докажите, что если функция ограничена на $[a, b]$ и интегрируема на отрезке $[\alpha, \beta]$ при любых $a < \alpha \leqslant \beta < b$, то она интегрируема и на $[a, b]$.

[[Дополните разбиение $[\alpha, \beta]$ до разбиения $[a, b]$ и оцените добавку к взвешенной сумме колебаний.]]

4.13. **Приёмы интегрирования.**

Задача 4.66. Докажите, что число e иррационально.

[[Предположите $e = p/q$ и умножьте на $q!$ формулу

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

]]

Задача 4.67. Докажите, что число π иррационально.

[[Предположите $\pi = p/q$ и рассмотрите последовательность

$$a_n = \int_0^\pi \frac{x^n(p-qx)^n}{n!} \sin x \; dx.$$

Она состоит из положительных чисел, но стремится к нулю. Заметьте, что выражение $\frac{x^n(p-qx)^n}{n!}$ не меняется при замене $x \mapsto \pi - x$, его производные до $(n-1)$-го порядка на концах отрезка равны нулю, а производные порядка n и более на концах отрезка являются целыми числами. Используя эти свойства, установите интегрированием по частям, что a_n является целым числом.]]

Задача 4.68. * Докажите, что если у бесконечно дифференцируемой на интервале функции все производные неотрицательные, то функция аналитическая.

[[Примените формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме на отрезке $[a, b]$ на данном интервале. Получите из неё оценку сверху остаточного члена той же формуле на меньшем отрезке $[a, c]$. Заметьте, что при $c - a < b - c$ получается сходящийся к данной функции ряд Тейлора на $[a, c]$.]]

5. Мера и интеграл Лебега

5.1. **Элементарные множества и мера Жордана.**

Задача 5.1. Проверьте неравенство из предыдущего следствия $m(S_1 \cup \dots \cup S_k) \leqslant mS_1 + \dots + mS_k$ для элементарных множеств индукцией по k.

Задача 5.2 (Аддитивность меры Жордана). Докажите, что если $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ измеримы по Жордану, то измеримы $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$ и выполняется

$$mX + mY = m(X \cup Y) + m(X \cap Y).$$

[[Если приблизить элементарными $s \subseteq X \subseteq S$ и $t \subseteq Y \subseteq T$ так что

$$mS - ms < \varepsilon, \quad mT - mt < \varepsilon,$$

то $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$ тоже можно будет очевидным образом приблизить снизу и сверху элементарными с точностью не более 2ε. Сравните с аналогичным утверждением для меры Лебега, теоремой **??**.]]

Задача 5.3 (Критерий измеримости множества по Жордану). Докажите, что множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда оно ограничено и мера Жордана границы ∂X равна нулю.

[[Поместите X в большой параллелепипед P. Имея элементарные $s \subseteq X \subseteq S$, разбейте P на маленькие параллелепипеды так, чтобы s, S и $S \setminus s$ были составлены из некоторых маленьких параллелепипедов разбиения и получите покрытие границы набором маленьких параллелепипедов, являющихся замыканиями параллелепипедов, составляющих $S \setminus s$. Имея элементарное $\sigma \supseteq \partial X$, разбейте весь P на маленькие параллелепипеды так, чтобы σ было составлено из некоторых маленьких параллелепипедов разбиения, соберите соответствующие s и S из маленьких параллелепипедов этого разбиения, которые полностью содержатся в X или которые составляют σ.]]

Задача 5.4. Докажите, что график непрерывной функции $f : K \to \mathbb{R}$ на компактном $K \subseteq \mathbb{R}^n$ является подмножеством $\mathbb{R}^{n+1}$ нулевой меры Жордана.

[[Используйте равномерную непрерывность и определение верхней меры Жордана.]]

Задача 5.5. * Докажите, что ограниченные выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$ измеримы по Жордану.

[[Изучите строение границы ограниченного выпуклого множества в $\mathbb{R}^n$.]]

5.2. **Внешняя мера Лебега и её свойства.**

Задача 5.6. Докажите, что горизонтальная или вертикальная прямая на плоскости имеет меру нуль.

Задача 5.7. Докажите, что наклонная прямая на плоскости имеет меру нуль. Обратите внимание, что элементарные множества на плоскости состоят из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат.

Задача 5.8. Докажите, что образ любой спрямляемой кривой $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ имеет меру нуль.

[[Используя счётную аддитивность, достаточно доказать утверждение для кривой, параметризованной отрезком $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Далее можно считать параметризацию кривой натуральной и оценить её меру Лебега как $\mu(\gamma) \leqslant \ell(\gamma)^2$, а потом пытаться применить эту оценку после разбиения кривой на N кусков равной длины.]]

5.3. **Множества конечной меры Лебега и их свойства.**

Задача 5.9. Проверьте, что множество нулевой внешней меры измеримо.

[[Приблизьте его пустым элементарным множеством.]]

Задача 5.10. Докажите, что измеримое по Жордану множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ является измеримым по Лебегу с той же мерой.

[[Это легко проверить непосредственно по определению.]]

Задача 5.11. * Докажите, что множество измеримых по Лебегу с конечной мерой множеств в $\mathbb{R}^n$ относительно «расстояния» $\rho(X, Y) = \mu^*(X \triangle Y)$ является полным (но вырожденным) метрическим пространством.

[[Имея фундаментальную последовательность измеримых по Лебегу множеств, перейдите к её подпоследовательности (X_k), для которой выполняется $\rho(X_k, X_m) \leqslant 2^{-k}$ при $k \leqslant m$. В качестве (не единственного) предела этой последовательности можно взять, например, $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=k}^{\infty} X_k$.]]

5.4. **Измеримые по Лебегу множества с бесконечной мерой.**

Задача 5.12. Докажите, что всё пространство $\mathbb{R}^n$ (как подмножество самого себя) измеримо по Лебегу с бесконечной мерой.

Задача 5.13. Докажите, что множество на плоскости $\mathbb{R}^2$, заданное неравенством $|xy| \leqslant 1$, является измеримым по Лебегу. Чему равна его мера?

[[Измеримость можно доказать по определению, разрезав это множество на ограниченные куски, которые хорошо приближаются элементарными. Далее можно попробовать поместить в это множество элементарные множества большой меры.]]

5.5. **Измеримость счётных объединений и пересечений, непрерывность меры Лебега.**

Задача 5.14 (Критерий измеримости Каратеодори в одну сторону). Пусть множество $A \subseteq \mathbb{R}^n$ произвольное, а $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — измеримое. Докажите, что

$$\mu^*(A \setminus X) + \mu^*(A \cap X) = \mu^*(A).$$

[[Поместите A в измеримое B, такое что $\mu^*(A) = \mu(B)$, используйте аддитивность меры и субаддитивность внешней меры.]]

Задача 5.15 (Критерий измеримости Каратеодори в другую сторону). Предположим, что для данного множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и любого множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$ выполняется

$$\mu^*(A \setminus X) + \mu^*(A \cap X) = \mu^*(A).$$

Докажите, что X измеримо.

[[Если внешняя мера X бесконечна, то замените его на его пересечение с параллелепипедом P, убедившись, что свойство из условия продолжает выполняется для любых $A \subseteq P$. Потом вложите X в измеримое Y (или $X \cap P$ в измеримое $Y \subseteq P$), так что $\mu^*(X) = \mu(Y)$. Возьмите Y в качестве A из условия и заметьте, что $Y \setminus X$ окажется измеримым.]]

Задача 5.16. Докажите, что если множество X является объединением возрастающей последовательности не обязательно измеримых множеств

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X_k \subseteq \dots,$$

то $\lim_{k\to\infty} \mu^*(X_k) = \mu^*(X)$.

[[Для начала полезно доказать, что X_k можно поместить в измеримое Y_k, такое что $\mu(Y_k) = \mu^*(X_k)$.]]

Задача 5.17. Докажите, что если множество X является пересечением убывающей последовательности измеримых множеств

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots \supseteq X_k \supseteq \dots$$

и мера какого-то из X_k конечна, то $\lim_{k\to\infty} \mu(X_k) = \mu(X)$. Приведите пример, когда все меры X_k бесконечны, а мера X всё же конечна.

[[Примените аддитивность к пересечению $I = \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k$ и разностям $X_k \setminus X_{k+1}$.]]

Задача 5.18 (Непрерывность сдвига относительно меры Лебега). Докажите, что если $X \subset \mathbb{R}$ измеримо по Лебегу с конечной мерой, то мера

$$\mu(X \setminus (X + t))$$

стремится к нулю при $t \to 0$. Здесь $X + t$ — это сдвиг множества X на t.

[[Воспользуйтесь приближением X элементарным множеством.]]

Задача 5.19. * Докажите, что существует подмножество отрезка, неизмеримое по Лебегу. Можно использовать аксиому выбора.

[[Вместо отрезка удобнее рассматривать окружность, взять поворот R на угол $t\pi$ с $t \notin \mathbb{Q}$, и придумать множество X, повороты которого $\{R^n X\}_{n\in\mathbb{Z}}$ попарно не пересекаются и покрывают всю окружность. Покажите, что такое X не может быть измеримым по Лебегу.]]

Задача 5.20. Докажите, что внешняя мера Лебега не аддитивна.

[[Возьмите неизмеримое ограниченное множество X, поместите его в параллелепипед P и положите $Y = P \setminus X$. Проверьте, что если $\mu^*(X) + \mu^*(Y) = \mu(P)$, то множества X и Y должны быть на самом деле измеримыми.]]

5.6. **Измеримость открытых и замкнутых множеств, регулярность меры Лебега.**

Задача 5.21. Докажите, что мера Лебега открытого множества совпадает с его нижней мерой Жордана.

[[Разрежьте открытое множество на счётное семейство параллелепипедов.]]

Задача 5.22. Докажите, что мера Лебега компактного множества совпадает с его верхней мерой Жордана.

[[Можно вывести это утверждение из предыдущей задачи. Или можно действовать по определению, аналогично доказательству регулярности, заменив счётное объединение элементарных множеств на конечное объединение.]]

Задача 5.23. Постройте примеры компактных неплотных подмножеств отрезка $[0,1]$, имеющих произвольную меру в диапазоне $[0,1)$.

[[Сделайте обобщённое канторово множество: выкиньте из отрезка $[0,1]$ интервал длины ε_1 в середине, у каждого из получившихся отрезков выкиньте интервалы посередине, длины которых относятся к длинам отрезков как ε_2 и так далее счётное количество раз. Проверьте, что мера получившегося множества равна $\prod_{k=1}^{\infty}(1-\varepsilon_k)$.]]

Задача 5.24. Покажите, что не каждое измеримое множество можно приблизить содержащимися в нём открытыми множествами сколь угодно точно в смысле меры их разности. Покажите, что не каждое измеримое множество можно приблизить содержащими его замкнутыми множествами сколь угодно точно в смысле меры их разности.

[[Используйте множества, полученные в предыдущей задаче.]]

Задача 5.25. Докажите, что если множество F компактно, то для мер его ε-окрестностей выполняется

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\mu(U_\varepsilon(F)) = \mu(F).$$

Покажите, что это может быть неверно для некомпактных множеств.

[[Используйте внешнюю регулярность и найдите ε-окрестность в просто окрестности множества.]]

Задача 5.26. Докажите, что с помощью теоремы **??** можно определить меру Лебега открытого $U \subset \mathbb{R}^n$ как

$$\mu(U) = \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f\ dx_1 \dots dx_n \;\middle|\; \text{по непрерывным } f : \mathbb{R}^n \to [0,1] \text{ с носителем в } U \right\}.$$

Докажите, что эта величина счётно субаддитивна на открытых множествах, то есть

$$\mu\left(\bigcup_n U_n\right) \leqslant \sum_n \mu(U_n).$$

[[Используйте компактность носителя, сведя счётную аддитивность к конечной.]]

Задача 5.27. Докажите, что если меру открытого множества определить как его нижнюю меру Жордана, то это будет совпадать с определением из предыдущей задачи.

[[Используйте построение непрерывной функции, равной единице на данном компакте и нулю за пределами его окрестности.]]

Задача 5.28. Докажите, что внешняя мера, определённая как $\mu^*(X) = \inf\{\mu(U) \mid U \supseteq X\}$ (по открытым множествам с использованием определения из предыдущих задач) обладает свойством счётной субаддитивности.

5.7. **Измеримые по Лебегу функции.**

Задача 5.29. Докажите, что сужение измеримой на X функции на измеримое $Y \subseteq X$ тоже будет измеримой функцией.

Задача 5.30. Докажите, что непрерывные функции на измеримом множестве X измеримы.

[[Действуйте по определению измеримой функции и используйте измеримость открытых множеств.]]

Задача 5.31. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ везде имеет конечную производную. Докажите, что её производная f' измерима.

[[Представьте производную в виде поточечного предела.]]

Задача 5.32 (Существенный супремум). Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима по Лебегу, а множество

$$S = \{M \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant M \text{ почти всюду}\}$$

непусто (здесь *почти всюду* означает что множество тех x, для которых утверждение не выполняется, имеет меру нуль). Докажите, что S имеет минимальный элемент.

[[Используйте непрерывность меры Лебега.]]

5.8. **Борелевские множества и функции.**

Задача 5.33. Докажите, что борелевские множества в $\mathbb{R}^n$ можно также определить как множества, которые можно получить из элементарных множеств операциями разности множеств, счётного объединения и счётного пересечения, а также повторениями этих операций несколько раз.

[[Проверьте, что каждое элементарное множество (а точнее, каждый параллелепипед) борелевское. В обратную сторону вспомните доказательство измеримости открытых множеств.]]

Задача 5.34. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — некоторое множество. Докажите, что его характеристическая функция $\chi_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in X; \\ 0, & \text{если } x \notin X; \end{cases}$$

будет измеримой по Лебегу тогда и только тогда, когда X измеримо по Лебегу. Докажите, что характеристическая функция будет борелевской тогда и только тогда, когда множество X будет борелевским.

[[Примените определение и опишите, какие множества имеют вид $\{x \mid \chi_X(x) < c\}$.]]

Задача 5.35. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измеримая, а $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — борелевская. Докажите, что композиция $g \circ f$ измеримая.

[[Заметьте, что если функция измерима, то прообраз любого борелевского множества относительно неё измерим по Лебегу.]]

Задача 5.36. Приведите пример, показывающий, что композиция измеримых по Лебегу функций одной переменной не обязательно измерима по Лебегу.

[[Постройте сначала инъективную и монотонную функцию f, отображающую прямую в множество меры нуль (например, начав с отображения отрезка в канторово множество), из монотонности она будет измерима по Лебегу. А функцию g тогда можно определять на образе f как угодно, если за его пределами она равна нулю, в любом случае она будет измерима по Лебегу. Это позволяет сделать функцию $g \circ f$ любой.]]

Задача 5.37. Докажите, что если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является поточечным пределом последовательности непрерывных функций, то для любого числа $c \in \mathbb{R}$ множества $\{f(x) \leqslant c\}$ и $\{f(x) \geqslant c\}$ являются счётными объединениями замкнутых множеств.

[[Выразите множество $\{f(x) \leqslant c\}$ через множества $\{f_n(x) \leqslant c\}$, где $f_n \to f$ и f_n непрерывны.]]

Задача 5.38. Докажите, что любая полунепрерывная снизу (см. определение **??**) функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ борелевская.

[[Используйте «топологическое» определение полунепрерывности.]]

Задача 5.39. Докажите, что если все функции в последовательности $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ полунепрерывны снизу, то функция, определённая по формуле

$$\bar{f}(x) = \sup\{f_k(x) \mid k \in \mathbb{N}\},$$

тоже полунепрерывна снизу.

[[Аналогично предыдущей задаче.]]

5.9. **Интеграл Лебега для ступенчатых функций.**

Задача 5.40. Проверьте, что любая ступенчатая функция измерима по Лебегу.

[[Заметьте, что $\{x \mid f(x) < c\} = \bigcup_{f(X_i)<c} X_i$.]]

Задача 5.41. Докажите формулу включений-исключений для множеств $X_1, \dots, X_N \subseteq \mathbb{R}^n$ конечной меры

$$\mu\left(X_1 \cup \dots \cup X_N\right) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \sum_{i_1<\dots<i_k} \mu\left(X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_K}\right).$$

[[Проинтегрируйте ступенчатую функцию $1-(1-\chi_{X_1})\dots(1-\chi_{X_N})$, где χ_{X_i} — характеристическая функция множества X_i.]]

Задача 5.42 (Теорема Лузина). Докажите, что если $f : X \to \mathbb{R}$ измерима по Лебегу, то для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $Y \subseteq X$, такое что $\mu(X \setminus Y) < \varepsilon$ и сужение $f|_Y$ непрерывно.

[[Сведите к случаю X конечной меры и докажите утверждение для ступенчатых функций, применив к основанию каждой ступеньки теорему **??**. Потом представьте исходную измеримую f в виде равномерного предела ступенчатых и используйте теорему **??**.]]

5.10. **Интеграл Лебега для произвольных функций.**

Задача 5.43. Докажите, что если $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ имеет конечный интеграл, то её сужение на измеримое $Y \subseteq X$ тоже будет иметь конечный интеграл.

[[Проверьте это утверждение для ступенчатых функций, а потом докажите в общем случае.]]

Задача 5.44. Докажите, что интегрируемая по Риману на отрезке функция интегрируема и по Лебегу с тем же интегралом.

[[Заметьте, что класс ступенчатых по Лебегу функций содержит в себе класс элементарно ступенчатых (с конечным числом элементарных ступенек), который используется в определении интеграла Римана.]]

5.11. **Линейность и монотонность интеграла Лебега.**

Задача 5.45. Докажите, что любая интегрируемая $f : X \to \mathbb{R}$ совпадает с некоторой борелевской функцией $g : Y \to \mathbb{R}$ за исключением множества меры нуль (в частности $\mu(X \triangle Y) = 0$) и их интегралы совпадают.

[[Используйте теорему **??** и проверьте, что происходит с интегралом.]]

5.12. **Приближение интегрируемых функций в среднем.**

Задача 5.46. Докажите, что если функцию f на отрезке можно приблизить функциями из некоторого класса $\mathcal{G}$ равномерно, то её можно приблизить функциями $\mathcal{G}$ и в среднем. Докажите, что на прямой (или в $\mathbb{R}^n$) из возможности приблизить равномерно возможность приблизить в среднем не следует.

[[Проверьте, когда ограниченность функции позволяет ограничить её интеграл.]]

5.13. **Счётная аддитивность и непрерывность интеграла Лебега по множествам.**

Задача 5.47. Приведите пример измеримой на $X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Y_k$ функции f, которая имеет на каждом Y_k конечный интеграл, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{Y_k} f(x)\ dx$$

абсолютно сходится, но f не имеет интеграла на всём X.

[[Добейтесь, чтобы интегралы от положительной части f и отрицательной части f были бесконечны при выполнении условий задачи.]]

Задача 5.48 (Абсолютная непрерывность интеграла Лебега). Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ интегрируема с конечным интегралом. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое, что если $Y \subset X$ измеримо и $\mu(Y) < \delta$, то

$$\int_Y |f(x)|\ dx < \varepsilon.$$

[[Приближайте f ограниченными функциями, как в доказательстве теоремы ??. Также можно посмотреть на аналогичное рассуждение в доказательстве теоремы ??.]]

Задача 5.49. Найдите интеграл Лебега $\int_1^{+\infty} x^s\ dx$ в зависимости от $s \in \mathbb{R}$.

[[Обоснуйте существование интеграла Лебега. Посчитайте интеграл на конечном отрезке $[1, n]$ по Риману с помощью формулы Ньютона–Лейбница и перейдите к пределу $n \to +\infty$.]]

Задача 5.50. Найдите интеграл Лебега $\int_0^1 x^s\ dx$ в зависимости от $s \in \mathbb{R}$.

[[Аналогично предыдущей задаче.]]

5.14. **Предельный переход в интеграле Лебега по функциям.**

Задача 5.51 (Лемма Фату). Докажите, что для любой последовательности неотрицательных измеримых функций $f_k : X \to \mathbb{R}$ выполняется

$$\varliminf_{k\to\infty} \int_X f_k\ dx \geqslant \int_X \varliminf_{k\to\infty} f_k\ dx.$$

[[Рассмотрите возрастающую последовательность функций $g_k = \inf\{f_m \mid m \geqslant k\}$, поймите, к чему она сходится, и примените теорему о монотонной сходимости.]]

Задача 5.52. Докажите, что если функция F непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) с ограниченной производной $f = F'$, то

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ dx.$$

[[Используйте определение производной и проинтегрируйте его.]]

Задача 5.53. Пусть последовательность непрерывных функций $f_n : [a, b] \to [0, +\infty)$ убывает по n и стремится к нулю в среднем. Докажите, что эта последовательность функций стремится к нулю почти всюду.

[[Рассмотрите предельную функцию $f_n \to f$ и примените предельный переход под знаком интеграла.]]

Задача 5.54. *(Критерий Лебега интегрируемости по Риману) Докажите, что $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда она ограничена и множество её точек разрыва имеет меру Лебега нуль.

[[Предположив интегрируемость f по Риману, приблизьте f снизу и сверху непрерывными, $g_n \leqslant f \leqslant h_n$ в среднем с точностью $1/n$ по результату задачи 4.61. Сделайте последовательность (g_n) возрастающей, а последовательность (h_n) — убывающей. Примените задачу 5.53 к разности $h_n - g_n$ и заметьте, что если $h_n(x) - g_n(x) \to 0$ в некоторой точке x, то f непрерывна в точке x.

Для доказательства в обратную сторону заметьте, что равенство нулю меры множества точек разрыва f равносильно равенству нулю интеграла от функции $\omega(f, x) = \overline{f} - \underline{f}$ в обозначениях задачи 3.66. Используя результат задачи 4.47, найдите возрастающую последовательность непрерывных g_n, такую что $g_n \to \underline{f}$, и убывающую последовательность непрерывных h_n, такую что $h_n \to \overline{f}$. Примените к разности $h_n - g_n \to \overline{f} - \underline{f}$ теорему об ограниченной сходимости.]]

5.15. **Примеры применения интеграла Лебега.**

Задача 5.55. Докажите, что если f интегрируема по Лебегу с конечным интегралом, а g убывает и неотрицательна на $[a, b]$, то при некотором $\vartheta \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = g(a) \int_a^{\vartheta} f(x)\ dx.$$

[[Переопределите $g(b) = 0$ и используйте вторую теорему о среднем.]]

Задача 5.56. Докажите неравенство для $0 < a < b$

$$\left| \int_a^b \frac{\sin x}{x}\ dx \right| \leqslant \frac{2}{a}.$$

[[Примените вторую теорему о среднем или результат предыдущей задачи.]]

5.16. **Несобственный интеграл функции одной переменной.**

Задача 5.57. Докажите, что интегралы

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\ dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\ dx$$

сходятся абсолютно только при $\alpha > 1$, но сходятся условно в несобственном смысле при $\alpha > 0$.

[[Используйте признак Дирихле для доказательства сходимости, критерий Коши для доказательства расходимости, и оценку $|\sin x| \geqslant \sin^2 x$ для доказательства отсутствия абсолютной сходимости.]]

Задача 5.58 (Интегральный признак сходимости числового ряда). Пусть $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ убывает. Докажите, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\ dx < +\infty.$$

[[Докажите неравенства

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leqslant \int_1^{+\infty} f(x)\ dx \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

заключив f между подходящей парой ступенчатых функций.]]

Задача 5.59. Пусть функция $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ убывает и стремится к нулю на бесконечности. Докажите, что

$$\int_0^{+\infty} f(x) \sin x \; dx \geqslant 0.$$

[[Примените вторую теорему о среднем.]]

Задача 5.60. Пусть функция $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ выпукла и стремится к нулю на бесконечности. Докажите, что

$$\int_0^{+\infty} f(x) \cos x \; dx \geqslant 0.$$

[[Докажите, что можно интегрировать по частям. При возникновении затруднений с существованием производной можно посмотреть раздел **??**.]]

5.17. **Теорема Фубини.**

Задача 5.61. Пусть функции $f : X \to \mathbb{R}$ и $g : Y \to \mathbb{R}$ измеримы. Докажите, что выражение $f(x)g(y)$ задаёт измеримую функцию на $X \times Y$.

[[Сведите к измеримости декартова произведения множеств.]]

Задача 5.62. Приведите пример, когда повторные интегралы функции двух переменных в обоих порядках x, y и y, x существуют и конечные, но интеграл функции двух переменных не существует.

[[Вспомните, что интеграл Лебега от функции f абсолютный, то есть подразумевает существование интеграла от $|f|$, пример можно построить даже не для интеграла, а для повторного суммирования ряда $\sum_{n,m\in\mathbb{N}} a_{nm}$.]]

5.18. **Мера под графиком и линейная замена переменных в интеграле.**

Задача 5.63. Докажите, что график любой измеримой функции $f : X \to \mathbb{R}$ измерим и имеет меру нуль.

[[Вспомните доказательство леммы **??**.]]

5.19. **Объём шара, интеграл Пуассона, гамма и бета функции.**

Задача 5.64. Докажите, что для $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^n},$$

где $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)$ и считаем $(-1)!! = 1$.

[[Примените известные значения $\Gamma(1) = 1$ и $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, а потом примените формулу понижения.]]

Задача 5.65. Проверьте по определению, что $B(p, q)$ конечна при $p, q > 0$.

Задача 5.66. Найдите при $u, v > -1$ интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \sin^u x \cos^v y \; dx.$$

[[Сведите к бета-функции.]]

Задача 5.67. Проверьте, что при положительных a и произвольных b и c

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-bx-c}\,dx = e^{\frac{b^2}{4a}-c}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

[[Выделите полный квадрат и линейной заменой сведите к стандартному интегралу Пуассона.]]

Задача 5.68 (Объём тела вращения). Пусть функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ измерима, а множество $X \subset \mathbb{R}^3$ задано условиями

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad y^2 + z^2 \leqslant f(x)^2.$$

Докажите, что

$$\mu(X) = \int_a^b \pi f(x)^2\,dx.$$

[[Используйте теорему Фубини, проинтегрировав сначала по переменным (y,z).]]

Задача 5.69. Пусть $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — положительно определённая квадратичная форма. Докажите формулу

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(x)}\,dx_1 \dots dx_n = \pi^{n/2} \cdot (\det Q)^{-1/2}.$$

[[Линейной ортогональной заменой переменных сделайте Q диагональной.]]

Задача 5.70. Пусть $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — положительно определённая квадратичная форма, а E_C — эллипсоид $\{x \mid Q(x) \leqslant C\}$. Докажите формулу

$$\mu E_C = \frac{\pi^{n/2}C^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)(\det Q)^{1/2}}.$$

[[Выведите из предыдущей задачи аналогично формуле для объёма шара.]]

Задача 5.71. Посчитайте интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|}\,dx_1 \dots dx_n.$$

[[Используйте теорему Фубини и сведите к гамма-функции и объёму шара.]]

Задача 5.72. Посчитайте интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 e^{-|x|^2}\,dx_1 \dots dx_n.$$

[[Используйте теорему Фубини и интегрирование по частям для функций одной переменной.]]

5.20. **Лемма Безиковича и дифференцируемость почти всюду.**

Задача 5.73 (Лемма Безиковича о покрытии в $\mathbb{R}^n$). * Пусть в каждой точке x измеримого $X \subset \mathbb{R}^n$ дан набор шаров $\{B_{x,k}\}_k$ с центрами в x, радиусы которых стремятся к нулю при $k \to \infty$. Тогда из всех этих шаров можно выбрать счётную систему попарно не пересекающихся шаров $\mathcal{C}$, которая покрывает почти всё X, то есть $\mu(X) \setminus \bigcup \mathcal{C} = 0$.

[[Аналогично одномерному случаю, надо вначале покрыть конечной системой непересекающихся шаров какую-то фиксированную долю X. Для этого надо покрыть X некоторой подсистемой из этих шаров $\mathcal{D}$, которую можно раскрасить в конечное число $M(n)$ цветов так, что шары одного цвета из $\mathcal{D}$ попарно не пересекаются. Тогда один из цветов будет покрывать не менее $1/M(n)$ от меры X. Для построения $\mathcal{D}$ можно использовать жадный алгоритм, который сводится к выбору на каждом шаге самого большого шара (точнее, близкого к супремуму) из тех шаров системы, центры которых не покрыты ранее выбранными шарами. Далее надо доказать, что в результате работы жадного алгоритма выбранный на некотором шаге шар пересекает не более $M(n) - 1$ предыдущих, для подходящей константы $M(n)$, зависящей только от размерности.]]

Задача 5.74. Докажите что если у измеримой функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интеграл по любому отрезку $[a, x] \subseteq [a, b]$ равен нулю, то она равна нулю почти всюду.

[[Примените предыдущую теорему.]]

Задача 5.75. Приведите пример непрерывной и непостоянной на отрезке функции, у которой производная почти всюду (по мере Лебега) существует и почти всюду равна нулю.

[[Вспомните про канторово множество, пусть функция возрастает только на нём, а на его дополнении кусочно постоянна.]]

Задача 5.76. ** Докажите, что монотонная на отрезке функция почти всюду имеет производную.

[[Действуйте аналогично доказательству дифференцируемости почти всюду липшицевой функции, но более аккуратно.]]

Задача 5.77. * Докажите, что 1-липшицево отображение $f : X \to \mathbb{R}^n$ для $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (то есть отображение со свойством $|f(x) - f(x)| \leqslant |x - y|$) не увеличивает внешнюю меру Лебега множества и переводит измеримые множества в измеримые.

[[Используйте многомерный вариант леммы Безиковича.]]

Задача 5.78. *(Теорема Радемахера) Докажите, что липшицева функция на области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ почти всюду дифференцируема (в смысле определения из раздела **??**).

[[Проверьте наличие частных производных почти всюду по одномерному случаю, потом для значений этих производных используйте многомерный вариант теоремы о плотности.]]

6. Гладкие отображения, многообразия и дифференциальные формы

6.1. **Дифференцируемые отображения открытых подмножеств $\mathbb{R}^n$.**

Задача 6.1. Опишите $\|A\|$ для самосопряжённого оператора $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ в терминах его собственных значений и докажите, что для любого линейного отображения $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ выполняется

$$\|A\|^2 = \|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A^*\|^2.$$

[[Приведите в некотором ортонормированном базисе самосопряжённый оператор A к диагональному виду, изучите также максимум выражения (x, Ax) по единичным векторам x для самосопряжённого A.]]

Задача 6.2. Приведите пример, показывающий, что линейный оператор с нулевыми собственными значениями может иметь сколь угодно большую норму, если мы не предполагаем его самосопряжённости.

Задача 6.3. Приведите пример, показывающий, что существование частных производных первого порядка в окрестности нуля для функции двух переменных не гарантирует её дифференцируемости в нуле.

Задача 6.4. Приведите пример функции двух переменных, определённой в окрестности нуля и имеющей производные по всем направлениям в нуле, но не являющейся дифференцируемой в нуле.

[[На самом деле такая функция даже не обязана быть непрерывной в нуле.]]

6.2. **Формула Тейлора для функции нескольких переменных.**

Задача 6.5. Докажите соотношение для целых $(k_1, \dots, k_n) \neq (0, \dots, 0)$

$$\binom{k}{k_1 \dots k_n} = \sum_{i=1}^{n} \binom{k-1}{k_1 \dots (k_i - 1) \dots k_n},$$

считая, что если какая-то из координат отрицательна, $k_i < 0$, то мультиномиальный коэффициент равен нулю.

[[Удобно использовать выражение

$$(x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} \binom{k}{k_1 \dots k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n},$$

которое можно считать определением мультиномиальных коэффициентов.]]

Задача 6.6. Докажите, что если определённую в окрестности точки x функцию можно разложить двумя способами

$$f(\xi) = \sum_{k_1 + \dots + k_n \leqslant m} a_{k_1 \dots k_n} (\xi_1 - x_1)^{k_1} \dots (\xi_n - x_n)^{k_n} + o(|\xi - x|^m) =$$
$$= \sum_{k_1 + \dots + k_n \leqslant m} b_{k_1 \dots k_n} (\xi_1 - x_1)^{k_1} \dots (\xi_n - x_n)^{k_n} + o(|\xi - x|^m),$$

то на самом деле все коэффициенты равны, $a_{k_1 \dots k_n} = b_{k_1 \dots k_n}$.

[[Докажите сначала это утверждение для функций одной переменной. В случае функций нескольких переменных воспользуйтесь сведением к функции одной переменной, как в доказательстве формулы Тейлора для функции нескольких переменных. При этом может понадобиться такое утверждение из алгебры: *Если два многочлена от нескольких переменных имеют равные значения в каждой точке $\mathbb{R}^n$, то они имеют одни и те же коэффициенты.*]]

6.3. **Свёртки и приближение функций бесконечно гладкими.**

Задача 6.7. Докажите ассоциативность свёртки

$$f * (g * h) = (f * g) * h,$$

для функций с конечным интегралом.

[[Выпишите интеграл, который повторным интегрированием сводится к двум разным порядкам свёртки.]]

Задача 6.8. * Докажите, что в условиях теоремы **??** оказывается, что $f * \varphi_k \to f$ поточечно почти всюду.

[[Используйте теорему об усреднении **??** в одномерном случае или докажите и используйте её многомерный аналог.]]

6.4. **Непрерывно дифференцируемые отображения и их обратные.**

Задача 6.9. Докажите, что если у непрерывно дифференцируемого отображения $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ выпуклой области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ производная $D\varphi$ в каждой точке удовлетворяет неравенству $v \cdot D\varphi(v) > 0$ для любого ненулевого вектора v, то φ инъективно.

[[Посмотрите на определение $A(x', x'')$ в доказательстве леммы **??**.]]

Задача 6.10. Докажите, что непрерывно дифференцируемое отображение $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, у которого якобиан ни в одной точке не равен нулю, переводит открытые множества в открытые.

Задача 6.11. Отображение метрического пространства в себя $f : M \to M$ называется *сжимающим*, если оно липшицево с меньшей единицы константой, то есть если существует константа $0 \leqslant c < 1$, такая что

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant c\rho(x, y), \quad \forall x, y \in M.$$

Докажите, что любое сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет единственную неподвижную точку, такую что $x = f(x)$.

[[Примените рассуждения из доказательства теоремы об обратном отображении.]]

Задача 6.12. Для полного метрического пространства M и ещё одного метрического пространства P непрерывное отображение $f : M \times P \to M$ можно рассматривать как семейство отображений $\{f_p : M \to M \mid p \in P\}$. Докажите, что если все f_p сжимающие с одной и той же константой Липшица, то x_p, неподвижная точка f_p, непрерывно зависит от $p \in P$.

6.5. **Криволинейные системы координат.**

Задача 6.13. Докажите, что гладкое отображение $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ имеет гладкое обратное $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to U$ тогда и только тогда, когда якобиан φ нигде не равен нулю и φ инъективно.

Задача 6.14. Докажите, что если дифференциалы гладких функций $f_1, \dots, f_k$ линейно зависимы в окрестности точки p, а дифференциалы функций $f_2, \dots, f_k$ линейно независимы в p, то в некоторой окрестности точки p функция f_1 выражается через остальные.

[[Считайте функции $f_2, \dots, f_k$ частью системы координат в точке p.]]

6.6. **Исследование функций нескольких переменных на экстремум.**

Задача 6.15. Докажите, что для наличия локального минимума непрерывно дифференцируемой функции f в точке x_0 достаточно, чтобы для любого x из некоторой окрестности x_0 выполнялось неравенство $df_x(x - x_0) \geqslant 0$.

[[Используйте лемму **??**.]]

Задача 6.16. Докажите, что если f и $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки p, f имеет условный минимум в точке p при условиях

$$\varphi_1(x) \geqslant 0, \dots, \varphi_m(x) \geqslant 0,$$

и в точке p линейно независимы те из дифференциалов $d\varphi_i$, для которых $\varphi_i(p) = 0$, то в точке p выполняется

$$df = \lambda_1 d\varphi_1 + \dots + \lambda_m d\varphi_m,$$

где все $\lambda_i \geqslant 0$ и $\lambda_i = 0$, если $\varphi_i(p) \neq 0$.

[[Аналогично доказательству теоремы **??** считайте те φ_i, для которых $\varphi_i(p) = 0$, частью системы координат.]]

Задача 6.17. * Докажите, что если f и $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ — линейные функции и f имеет условный минимум в точке p при условиях

$$\varphi_1(x) \geqslant 0, \dots, \varphi_m(x) \geqslant 0,$$

то (без требований невырожденности из предыдущей задачи) в точке p выполняется

$$df = \lambda_1 d\varphi_1 + \dots + \lambda_m d\varphi_m,$$

где все $\lambda_i \geqslant 0$ и $\lambda_i = 0$, если $\varphi_i(p) \neq 0$.

[[Отбросьте те φ_i, для которых $\varphi_i(p) > 0$, так как в некоторой окрестности p они не налагают никаких ограничений. Предположите противное, что df не содержится в конусе $N = \{\lambda_1 d\varphi_1 + \dots + \lambda_m d\varphi_m \mid \lambda_i \geqslant 0\}$.

Докажите замкнутость N. Проверьте, что если N содержит линейное подпространство L, то в силу выпуклости L можно перейти к факторпространству по L, причём N будет прообразом N/L. Далее заметьте, что если конус N линейных подпространств не содержит, то только тривиальные комбинации его образующих n_i с неотрицательными коэффициентами равны нулю. Отсюда аналогично доказательству леммы **??** установите неравенство $(\lambda_1 n_1 + \dots + \lambda_m n_m)^2 \geqslant \varepsilon(\lambda_1 + \dots + \lambda_m)^2$ с некоторым положительным ε. После этого представьте N в виде объединения компактных (как образы компактов) множеств $K_k = \{\lambda_1 n_1 + \dots + \lambda_m n_m \mid \lambda_i \geqslant 0,\ k-1 \leqslant \lambda_1 + \dots + \lambda_m \leqslant k\}$, $k \in \mathbb{N}$, и проверьте, что у любой точки есть окрестность, которая пересекает лишь конечное число этих множеств.

После установления замкнутости N найдите ближайшую к df точку N. С помощью этой точки постройте вектор v, такой что $df(v) < 0$ и $d\varphi_i(v) > 0$. Рассмотрев точку $p + tv$ при малых t убедитесь, что f не имеет минимума в точке p.]]

6.7. **Определение касательного вектора.**

Задача 6.18. *(Лемма Морса) Докажите, что любую гладкую функцию, у которой первый дифференциал в нуле равен нулю, а второй дифференциал невырожден (то есть матрица вторых производных $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ невырождена), можно криволинейной заменой координат привести к виду

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2$$

в некоторой окрестности нуля, где $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

[[Дважды используйте лемму **??**, а потом вспомните процедуру приведения квадратичной формы к каноническому виду.]]

6.8. **Векторные поля и прямой образ вектора.**

Задача 6.19. Проверьте по определению векторного поля как отображения $X : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$, что произведение векторного поля X на функцию $g \in C^\infty(U)$, определённое как $(g \cdot X)(f) = g \cdot X(f)$, тоже является векторным полем.

[[Проверьте $\mathbb{R}$-линейность и правило Лейбница.]]

Задача 6.20. Проверьте, что для функции $f : U \to \mathbb{R}$ отображение f_* действительно совпадает с её дифференциалом df.

Задача 6.21. Проверьте свойство композиции гладких отображений и прямого образа вектора в виде $(\varphi \circ \psi)_* X = \varphi_*(\psi_* X)$.

[[Можно сослаться на формулу производной композиции, а можно вывести это из определения (**??**).]]

Задача 6.22. Приведите пример гладкого отображения $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которое является инъективным, но переводит гладкие векторные поля в негладкие.

[[Сделайте так, чтобы производная φ обращалась в нуль.]]

6.9. **Факторпространство и конечная порождённость векторного пространства.**

Задача 6.23. Проверьте, что сложение и умножение на скаляр в пространстве V корректно индуцирует структуру векторного пространства в V/W.

Задача 6.24. Докажите, что линейное отображение $f : V \to U$, такой что $f(W) \subseteq Y$ для линейных подпространств $W \subseteq V$ и $Y \subseteq U$, корректно определяет линейное отображение $\bar{f} : V/W \to U/Y$.

Задача 6.25. Докажите, что факторпространство конечно-порождённого векторного пространства является конечно-порождённым.

[[Примените композицию сюръективных отображений.]]

Задача 6.26. Пусть дана пара векторных пространств $W \subset V$, причём W и V/W оказались конечно-порождёнными. Докажите, что V тоже является конечно-порождённым.

[[Используйте описание конечной порождённости через системы векторов, или дождитесь описания через флаги в следующем разделе.]]

6.10. **Размерность векторного пространства.**

Задача 6.27. Докажите, что пары векторных подпространств $U, W \subseteq V$ классифицируются числами $\dim U \cap W, \dim U, \dim W, \dim V$, и что выполняется соотношение

$$\dim U + \dim W = \dim U \cap W + \dim(U + W).$$

[[Докажите и используйте изоморфизмы $(U + W)/U \cong W/(W \cap U)$, $(U + W)/W \cong U/(U \cap W)$.]]

Задача 6.28. Докажите, что если поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто (например, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$), V — конечномерное пространство над этим полем, $A : V \to V$ — линейный оператор, то существует полный флаг в V, инвариантный относительно A (в том смысле, что все составляющие флаг подпространства инварианты относительно A).

[[Найдите одномерное инвариантное подпространство для A и перейдите к фактору по нему, применив индукцию.]]

Задача 6.29. Приведите примеры линейных операторов $A : V \to V$, не имеющих инвариантных полных флагов для поля, не являющегося алгебраически замкнутым (например, поле действительных чисел $\mathbb{R}$).

Задача 6.30. Пусть V — векторное пространство размерности n, $\mathcal{F}$ — семейство его векторных подпространств. Докажите, что найдутся не более n представителей $L_1, \ldots, L_m \in \mathcal{F}$ ($m \leqslant n$) такие, что

$$\bigcap_{i=1}^{m} L_i = \bigcap_{L \in \mathcal{F}} L := \bigcap \mathcal{F}.$$

Задача 6.31. * Проверьте, что в бесконечномерном случае размерности V и V^* (определённые как мощности базисов) не обязаны быть равны.

[[Проще всего рассмотреть случай счётной прямой суммы с самим собой одномерных векторных пространств над конечным полем $\mathbb{K}$.]]

Задача 6.32. * Проверьте, что в бесконечномерном случае $s : V \to V^{**}$ не является изоморфизмом. Попробуйте придумать элемент V^{**}, не лежащий в V.

Задача 6.33. ** Проверьте, что для установления равенства $\operatorname{rk} f = \operatorname{rk} f^*$ достаточно конечности ранга, а конечномерность пространств на самом деле не нужна.

[[Докажите для начала, что любое линейное отображение $\lambda : \operatorname{Im} f \to \mathbb{K}$ продолжается до линейного отображения $\bar{\lambda} : U \to \mathbb{K}$. Для этого может понадобиться лемма Цорна (теорема **??**).]]

6.11. **Полилинейные формы и детерминант.**

Задача 6.34. Докажите, что если $\dim V = n$, то $\dim \wedge^k(V^*) = \binom{n}{k}$.

[[Рассмотрите значения формы на наборах базисных векторов.]]

Задача 6.35. Докажите, что если оператор задан в координатно-матричном представлении как

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f_{ij} x_j v_i,$$

то

$$\det f = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot f_{1,\sigma(1)} \dots f_{n,\sigma(n)}.$$

[[Подставьте явно $f(v_1), \dots, f(v_n)$ в какую-то ненулевую $p \in \wedge^n(V^*)$ и воспользуйтесь данным выше определением знака перестановки.]]

Задача 6.36. Определим многочлен от n переменных формулой $D = \prod\limits_{1 \leqslant i < k \leqslant n} (x_i - x_j)$. Проверьте, что перестановка σ переменных $x_1, \dots, x_n$ приводит к умножению этого многочлена на число из $\{-1, 1\}$ и что возникающий так гомоморфизм $\mathfrak{S}_n \to \{-1, 1\}$ совпадает со знаком перестановки.

[[Проверьте для начала, что делает с этим многочленом транспозиция соседних переменных x_i и x_{i+1}.]]

Задача 6.37. Проверьте, что для линейного оператора в конечномерном пространстве $f : V \to V$ выполняется $\det f = \det f^*$.

[[Можно установить равенство $\operatorname{sgn}\sigma^{-1} = \operatorname{sgn}\sigma$ и использовать явную формулу из задачи 6.35, а можно заметить, что $\wedge^n f^* = (\wedge^n f)^*$.]]

Задача 6.38. Проверьте, что если $W \subset V$ и линейный оператор $f : V \to V$ обладает свойством $f(W) \subseteq W$, то

$$\det f = \det f|_W \cdot \det \bar{f},$$

где $\bar{f} : V/W \to V/W$ индуцирован f.

[[Можно использовать формулу $\wedge^{\dim V}(V^*) = \wedge^{\dim W}(W^*) \otimes \wedge^{\dim V - \dim W}(V/W)^*$ или сделать это через подходящий базис и матричное представление f.]]

Задача 6.39. Интерпретируйте матричные элементы линейного отображения $\wedge^k f^* : \wedge^k(U^*) \to \wedge^k(V^*)$ в терминах матричных элементов отображения $f : V \to U$.

[[Должно получиться понятие, известное из матрично-ориентированных учебников по линейной алгебре как «минор».]]

Задача 6.40. Опишите собственные значения оператора $\wedge^k f^* : \wedge^k(V^*) \to \wedge^k(V^*)$ в терминах собственных значений исходного оператора $f : V \to V$.

[[Приведите f к верхнетреугольному виду.]]

6.12. **Тензорное произведение векторных пространств.**

Задача 6.41. Проверьте, что для любых $f : V \to V'$, $f' : V' \to V''$, $g : W \to W'$, $g' : W' \to W''$ выполняется

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g).$$

[[Проверьте действие левой и правой части равенства на парах $v \otimes w$.]]

Задача 6.42. Проверьте, что если $\dim V, \dim W \geqslant 2$, то образ отображения тензорного произведения $V \times W \to V \otimes W$ не является линейным подпространством.

Задача 6.43. Покажите, что имеет место естественный изоморфизм $V \otimes W \to W \otimes V$.

[[Начните с билинейного отображения $V \times W \to W \otimes V$, $F(v, w) = w \otimes v$.]]

6.13. **Тензорное произведение и двойственность.**

Задача 6.44. Выразите явно эту операцию для базиса в V, двойственного ему базиса в V^*, и соответствующего им по лемме **??** базиса в $V^* \otimes V$.

Задача 6.45. Проверьте, что с точки зрения изоморфизма $V^* \otimes V \cong \mathcal{L}(V, V)$ свёртка является взятием следа линейного оператора.

[[Проще всего это проверить, разложив всё по базису.]]

Задача 6.46. Найдите размерность $S^p(V)$ в зависимости от размерности V и числа p.

[[Возьмите базис в $T^{p,0}(V)$ и посмотрите, какие его элементы эквивалентны в том смысле, что получаются один из другого какой-то перестановкой. Посчитайте количество таких классов эквивалентности (*орбит*) элементов базиса. Покажите, что орбиты соответствуют элементам некоторого базиса $S^p(V)$.]]

Задача 6.47. Докажите, что $S^p(V)$ линейно порождено тензорами вида $\underbrace{v \otimes \dots \otimes v}_{p}$, $v \in V$.

[[Обобщите формулу

$$v \otimes w = \frac{(v + w) \otimes (v + w) - v \otimes v - w \otimes w}{2}$$

на значения $p > 2$.]]

Задача 6.48. Установите изоморфизмы

$$S^p(V \oplus W) \cong \bigoplus_{k=0}^{p} S^k(V) \otimes S^{p-k}(W), \quad \wedge^p(V \oplus W) \cong \bigoplus_{k=0}^{p} \wedge^k(V) \otimes \wedge^{p-k}(W).$$

[[Для этого удобно использовать симметризованный или кососимметризованный (как в формуле (**??**)) вариант тензорного умножения. Изоморфность можно проверить на уровне базисов в соответствующих пространствах. Для обоснования независимости разложения от выбора базиса полезно посмотреть, как на тензор из $T^{p,0}(V \oplus W)$ действует линейное преобразование, которое является тензорной степенью прямой суммы умножения на скаляр a в пространстве V и умножения на скаляр b в пространстве W.]]

Задача 6.49. Проверьте, что двойственное к свёртке отображение

$$\mathbb{K} \to (V^* \otimes V)^* \cong V \otimes V^* \cong V^* \otimes V \cong \mathcal{L}(V, V)$$

можно интерпретировать так, что скаляр $a \in \mathbb{K}$ переходит в скалярный оператор умножения на a.

6.14. **Дифференциальные формы и внешнее дифференцирование.**

Задача 6.50. Обозначим $\mathfrak{m}_p(U)$ гладкие функции на U, которые обращаются в нуль в точке p. Обозначим $\mathfrak{m}_p^2(U)$ те гладкие функции, которые представляются в виде

$$f_1 g_1 + f_2 g_2 + \dots + f_k g_k, \quad \forall i\ f_i, g_i \in \mathfrak{m}_p(U).$$

Установите изоморфизм $T_p^* U = \mathfrak{m}_p(U)/\mathfrak{m}_p^2(U)$.

[[Работая в системе координат, по существу надо доказать, что функции с нулевым значением и нулевыми производными в p лежат в $\mathfrak{m}_p^2(U)$.]]

Задача 6.51. Найдите коэффициенты $c_{k,\ell}$, совместимые с ассоциативностью внешнего умножения и условием нормировки.

Задача 6.52. Проверьте, что умножение формы $\alpha \in \Omega^k(U)$ на функцию $f \in C^\infty(U)$ по формуле

$$(f\alpha)(X_1, \dots, X_k) = f \cdot \alpha(X_1, \dots, X_k)$$

совпадает со внешним умножением $f \wedge \alpha$ при интерпретации функции как формы из $\Omega^0(U)$.

Задача 6.53. Выпишите в явном виде действие φ^* на Ω^n в областях $\mathbb{R}^n$.

[[В выражение $dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$ подставьте dy_i как дифференциалы новых функций в старых координатах $dy_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n} dx_n$ и перемножьте по правилам внешнего умножения.]]

Задача 6.54. Докажите, что для двух гладких отображений открытых подмножеств евклидова пространства, $\varphi : U \to V$ и $\psi : V \to W$, имеет место соотношение

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

[[Начните с соотношения для прямого образа вектора $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ из задачи 6.21.]]

6.15. **Интеграл дифференциальной формы с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$.**

6.16. **Разбиение единицы в окрестности компакта в $\mathbb{R}^n$.**

Задача 6.55. Докажите, что для связной области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ пространство $\Omega_c^n(U)/d\Omega_c^{n-1}(U)$ одномерно.

[[У произвольной формы ν с компактным носителем в U можно покрыть носитель параллелепипедами, каждый из которых содержится в U. Разбиение единицы, подчинённое такому покрытию, позволит доказать, что ν представляется в виде суммы единообразно устроенных форм $I_i \varphi(k_i(x - x_i)) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ с центрами x_i и носителями в соответствующих параллелепипедах при достаточно большом числе $k_i > 0$. Далее остаётся использовать (линейную) связность и от суммы перейти к одной такой форме.]]

6.17. **Замена координат в интеграле от формы.**

Задача 6.56 (Замена координат в интеграле для где-то однозначных собственных отображений). Пусть гладкое отображение $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является собственным (прообраз любого компактного множества компактен), и для некоторого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ отображение φ тождественно на U и $\varphi^{-1}(U) = U$. Докажите, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^* \nu = \int_{\mathbb{R}^n} \nu.$$

[[Проверьте, что из собственности φ и компактности носителя ν следует компактность носителя $\varphi^*\nu$. Заметьте, что выражение слева обнуляется при подстановке $\nu = d\lambda$ для любого $\lambda \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$. Выведите, что выражения слева и справа отличаются друг от друга только умножением на константу, и найдите её.]]

Задача 6.57. Докажите, что отображение $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ из условия предыдущей задачи сюръективно.

[[Примените результат предыдущей задачи к форме ν с носителем, сосредоточенным в малой окрестности некоторой точки $p \in \mathbb{R}^n$.]]

Задача 6.58 (Замена координат в интеграле для собственных отображений вообще). Пусть гладкое отображение $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является собственным. Докажите, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^* \nu = C_\varphi \int_{\mathbb{R}^n} \nu,$$

где константа C_φ является целым числом. Докажите, что число C_φ может оказаться любым целым числом для подходящего собственного $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

[[Из предыдущих рассуждений понятно, что C_φ существует как действительное число. Для понимания, почему оно на самом деле целое, могут понадобиться сведения из раздела **??**. Кроме того, в разделе **??** будут рассматриваться более общие утверждения.]]

6.18. **Замена координат в интеграле от функции.**

Задача 6.59. В теореме о замене переменных в кратном интеграле ослабьте условие бесконечной гладкости отображения φ до его непрерывной дифференцируемости.

[[Начните с интегрирования бесконечно гладких функций с компактным носителем. Для них можно равномерно приближать непрерывно дифференцируемое отображение φ вместе с производными последовательностью бесконечно гладких φ_k и переходить к равномерному пределу в обеих частях равенства. При этом надо аккуратно обосновать инъективность φ_k при достаточно больших k, в этом может помочь задача 6.9. Переход к интегрируемым функциям сделайте как в доказательстве теоремы **??** для гладких φ.]]

Задача 6.60. * Доделайте последнюю часть предыдущего наброска доказательства, доказав подходящую оценку искажения меры при условии искажения расстояния отображением φ не менее чем в $(1-\delta)$ и не более чем в $(1+\delta)$ раз.

[[В некоторых вариантах рассуждения полезно будет свести вопрос к доказательству того, что 1-липшицево отображение не увеличивает меру.]]

6.19. **Вложенные многообразия в $\mathbb{R}^N$.**

Задача 6.61. Проверьте, что любая сфера в $\mathbb{R}^n$ является вложенным многообразием размерности $n-1$.

Задача 6.62. Проверьте, что край ∂M многообразия с краем M сам по себе является $(n-1)$-мерным многообразием без края.

Задача 6.63. * Пусть функция $f : (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ непрерывна и все её частные производные определены при $x_1 < 0$ и непрерывно продолжаются до $x_1 = 0$. Докажите, что функцию можно продолжить до гладкой функции на всём $\mathbb{R}^n$.

[[Для решения этой задачи полезно решить задачу 2.41 так, чтобы её решение гладко зависело от возможных параметров.]]

6.20. **Абстрактное определение многообразия.**

Задача 6.64. Постройте счётную базу топологии в $\mathbb{R}^n$.

[[Используйте счётность множества рациональных чисел.]]

Задача 6.65. Докажите, что если у топологического пространства X есть счётная база топологии, то из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать не более чем счётное подпокрытие.

[[Для каждой точки $x \in X$ найдите множество базы $V_x \ni x$, которое содержится в одном из множеств данного покрытия.]]

Задача 6.66. Проверьте, что подмножество X абстрактного многообразия M открыто тогда и только тогда, когда образы $\varphi_\alpha(X \cap U_\alpha)$ этого множества во всех в картах открыты (открыты относительно $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$ в случае многообразия с краем).

[[Обратите внимание, что на открытом подмножестве U любого топологического пространства M индуцируется топология, состоящая из всех открытых $V \subseteq U$.]]

Задача 6.67. Проверьте, что край ∂M абстрактного многообразия с краем M естественным образом является $(n-1)$-мерным абстрактным многообразием без края.

[[Заметьте, что на ∂M уже по определению есть координатные карты. Топологию на ∂M можно определить как индуцированную с M, а для удобства можно проверить, что подмножество ∂M открыто тогда и только тогда, когда его образ в каждой карте открыт.]]

Задача 6.68. * Постройте такую $f : U \to \mathbb{R}^+$.

[[Представьте U в виде объединения последовательности компактных подмножеств $K_1 \subset K_2 \subset \dots$, так чтобы внутренность K_{n+1} содержала K_n. Далее стройте функцию по индукции, добиваясь того, чтобы $f(K_{n+1} \setminus K_n) \subseteq (n-1, n+1)$. Можно пользоваться результатом задачи 4.53 для получения непрерывных функций, а потом их сглаживать, или сразу решить задачу 4.53 для гладких функций.]]

Задача 6.69. Рассмотрите на $\mathbb{R}^1$ две карты $\varphi_A : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $\varphi_A(x) = x$ и $\varphi_B : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $\varphi_B(x) = x^3$. Проверьте, что они не могут одновременно состоять в атласе одного и того же гладкого многообразия.

[[Рассмотрите выражение $\varphi_A \circ \varphi_B^{-1}$.]]

Задача 6.70. Проверьте, что если добавить к атласу две карты φ и ψ с гладкими заменами координат между новыми картами и картами атласа, то замена координат между φ и ψ тоже будет гладкой.

Задача 6.71. Пусть X — множество, покрытое своими подмножествами $\{U_\alpha\}$, отображения $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ инъективны и имеют открытые образы $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$, и каждое $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ на своей естественной области определения является диффеоморфизмом между открытыми подмножествами $\mathbb{R}^n$. Определим топологию на X, объявив множество U открытым, если $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ открыто для любого α. Проверьте, что это определение задаёт топологию на X.

Задача 6.72. В условиях предыдущей задачи проверьте, что если $V \subset U_\alpha$ и $\varphi_\alpha(V)$ открыто, то V открыто в определённой выше топологии.

[[Используйте результат задачи 6.10.]]

Задача 6.73. В условиях предыдущих задач проверьте, что если из покрытия $\{U_\alpha\}$ можно выбрать счётное подпокрытие, то определённая в предыдущей задаче топология имеет счётную базу.

[[Используйте результат задачи 6.64.]]

Задача 6.74. В условиях предыдущих задач проверьте, что отделимость построенной в них топологии гарантируется выполнением следующего условия. Для любых точек $x \neq y \in X$ либо существуют карты $U_\alpha \ni x$ и $U_\beta \ni y$ с пустым пересечением, либо существует карта $U_\alpha \ni x, y$.

Задача 6.75. Докажите, что многообразие является связным топологическим пространством тогда и только тогда, когда оно линейно связно.

[[Заметьте, что доказательство теоремы **??** работает с минимальными модификациями.]]

Задача 6.76. * Опишите все компактные одномерные гладкие многообразия (возможно с краем) с точностью до диффеоморфизма.

[[Компактность позволяет оставить лишь конечное число карт в атласе, карты при этом можно считать связными. Покажите, что многообразие распадается на компоненты (линейной) связности, которых оказывается конечное число. Далее изучите связные компактные многообразия.]]

Задача 6.77. * Опишите все не обязательно компактные одномерные гладкие многообразия (возможно с краем) с точностью до диффеоморфизма.

[[Действуйте аналогично предыдущей задаче. В данном случае не обязательно есть конечное покрытие координатными картами, но по определению многообразия есть счётное покрытие, с которым надо аккуратно поработать.]]

6.21. **Гладкие отображения между многообразиями.**

Задача 6.78. Докажите, что если отображение $f : M \to \mathbb{R}^n$ гладких многообразий инъективно, $\operatorname{rk} Df \equiv \dim M$ всюду и M компактно, то его образ $f(M)$ является вложенным в $\mathbb{R}^n$ многообразием.

[[Надо проверить, что в достаточно малой окрестности $V \ni f(p)$ ничего кроме $f(U)$ не будет.]]

Задача 6.79. Докажите, что диффеоморфизм гладких многообразий с краем $f : M \to N$ переводит край в край.

[[Если какая-то точка $p \in M$ не из края идёт в край, то рассматривая ситуацию в локальных координатах можно получить противоречие с теоремой об обратном отображении.]]

Задача 6.80. * Докажите, что гладкие отображения между многообразиями $M \to N$ находятся в однозначном соответствии с *гомоморфизмами алгебр* $C^\infty(N) \to C^\infty(M)$, то есть отображениями колец функций, сохраняющих сложение, умножение, и переводящих константу в ту же константу.

[[В одну сторону очевидно. Обратно, если есть гомоморфизм колец φ^* и если без ограничения общности N вложено $\mathbb{R}^\nu$, то посмотрите на образы координатных функций в $\mathbb{R}^\nu$ при отображении φ^*, они являются координатами некоторого отображения $M \to \mathbb{R}^\nu$. Докажите с помощью леммы **??**, что гомоморфизм колец задаётся композицией функции с этим отображением.]]

Задача 6.81. * Каким геометрическим объектам соответствуют гомоморфизмы алгебр $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$?

Задача 6.82. * Докажите, что любой $\mathbb{R}$-линейный гомоморфизм колец $C^\infty(M) \to \mathbb{C}$ на самом деле имеет образ в $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

[[Продолжите гомоморфизм $e : C^\infty(M) \to \mathbb{C}$ до $\mathbb{C}$-линейного гомоморфизма кольца комплекснозначных функций $e : C^\infty(M, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. Докажите, что для любой комплекснозначной f число $e(f) \in \mathbb{C}$ является значением f, приведя к противоречию предположение о том, что $f - e(f)$ обратима в $C^\infty(M, \mathbb{C})$.]]

Задача 6.83. * Если вы знакомы с алгеброй, опишите все максимальные идеалы в кольце $C^\infty(M)$ для компактного гладкого многообразия M.

[[Проверьте, что решение задачи 4.51 проходит при замене непрерывных функций на гладкие.]]

6.22. **Разбиение единицы на многообразии.**

Задача 6.84. Докажите, что компактное подмножество абстрактного гладкого многообразия является замкнутым.

[[Используйте свойство отделимости и топологическое определение компактности. Покажите, что если точка не лежит в заданном компактном подмножестве, то заданное компактное подмножество и точка имеют непересекающиеся окрестности.]]

Задача 6.85. Пусть многообразие M вложено в $\mathbb{R}^N$. Докажите, что любая гладкая функция $f : M \to \mathbb{R}$ является сужением на M некоторой гладкой функции $\tilde{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

[[Домножьте f на разбиение единицы и сведите утверждение к продолжению функции в координатной окрестности, когда её носитель был и остаётся в координатной окрестности.]]

Задача 6.86. Проверьте, что векторное поле на многообразии M можно определить как дифференцирование $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, $\mathbb{R}$-линейное и удовлетворяющее правилу Лейбница $X(fg) = gX(f) + fX(g)$.

[[Начните со значения дифференцирования в точке, постройте функцию, отличную от нуля только в заданной координатной карте в окрестности U этой точки и равную единице в меньшей окрестности точки. С помощью такой функции докажите локальность дифференцирования, то есть однозначную определённость дифференцирования в точке как отображения $C^\infty(U) \to \mathbb{R}$, после этого утверждение сведётся к случая открытого подмножества $\mathbb{R}^n$.]]

6.23. **Ориентация многообразия.**

Задача 6.87. Придумайте атлас на $\mathbb{R}^1$, из которого нельзя выбрать покрывающий $\mathbb{R}^1$ податлас с положительными якобианами перехода, даже если разрешить переворачивать координаты ($x \mapsto -x$) в картах.

[[Покройте $\mathbb{R}^1$ двумя картами, область определения одной из которых состоит из двух интервалов, а знак производной отображения φ карты меняется.]]

Задача 6.88. Докажите, что на связном ориентируемом многообразии существует ровно две ориентации. Сколько ориентаций может быть на несвязном многообразии?

[[Ещё одну ориентацию из первой можно получить, назначив положительными все карты, для которых якобиан перехода из карт первой ориентации всюду отрицателен. То, что других ориентаций на связном многообразии не будет, проще вывести из следующей ниже леммы.]]

Задача 6.89. Докажите, что ориентации многообразия M^n соответствуют нигде не нулевым формам $\nu \in \Omega^n(M)$ с точностью до умножения формы на положительную функцию.

[[Поясните, что умножение формы на положительную функцию не меняет построенную в доказательстве предыдущей леммы ориентацию, а умножение на ненулевую не везде положительную функцию — меняет.]]

Задача 6.90. Определите ориентацию на единичной сфере $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ с помощью какой-нибудь формы второй степени, не обращающейся в нуль при ограничении на сферу.

[[Например, посмотрите на смешанное произведение в $\mathbb{R}^3$ и подставьте в него одним из аргументов вектор (x, y, z).]]

Задача 6.91. Предположим, что многообразие $M \subset \mathbb{R}^N$ размерности n определяется системой гладких уравнений
$$f_1(x) = 0, \quad \dots, \quad f_{N-n}(x) = 0,$$
и дифференциалы этой системы уравнений линейно независимы в каждой точке M. Докажите, что M ориентируемо.

[[Для выяснения ориентации карты из координат $t_1, \dots, t_n$ на M дополните её функциями $f_1, \dots, f_{N-n}$ до системы координат в области $\mathbb{R}^N$.]]

6.24. **Интеграл формы по ориентированному многообразию и формула Стокса.**

Задача 6.92. Распространите формулу Стокса на замкнутый параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ и на симплекс
$$\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \geqslant 0, x_1 + \dots + x_n \leqslant 1\},$$
считая интеграл по краю как сумму интегралов по граням с правильной ориентацией.

[[Можно обобщить рассуждение в основном доказательстве на случай, когда множество, по которому интегрируют $d\alpha$, устроено как отделимое топологическое пространство, координатные карты которого дают гомеоморфизмы его открытых подмножеств с относительно открытыми подмножествами $(-\infty, 0]^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ при $k = 0, \dots, n$.]]

6.25. **Частные случаи формулы Стокса и её применения.**

Задача 6.93. Проверьте, что ориентация кривой, которую мы определяли при изучении кривых, и ориентация вложенной кривой как одномерного многообразия дают по сути одно и то же понятие.

Задача 6.94. Проверьте, что ориентация ∂G в формуле Гаусса–Остроградского должна быть такая, что в положительной карте на ∂G с координатами (u, v) вектор $[r'_u \times r'_v]$ торчит вовне G.

Задача 6.95. Проверьте, что при согласованной ориентации поверхности и её края в трёхмерной формуле Стокса ориентирующий касательный вектор ∂S, ориентирующая нормаль S (вида $[r'_u \times r'_v]$ для некоторых положительных координат (u, v)), и касательный вектор к S, направленный перпендикулярно ∂S в направлении от S, должны образовывать правую тройку.

Задача 6.96. Распространите формулу Стокса на случай, когда α непрерывна на всём многообразии, дифференцируема на его внутренности $M \setminus \partial M$ с локально ограниченными производными, а $d\alpha$ глобально имеет конечный интеграл по его внутренности.

[[Приведённое доказательство формулы Стокса проходит, если его правильно понимать и если при локальном рассмотрении сначала доказать формулу для области $x_1 \leqslant -\varepsilon < 0$ и потом устремить $\varepsilon \to +0$, используя непрерывность интеграла Лебега и непрерывность α вплоть до границы.]]

Задача 6.97. Докажите, что площадь области, ограниченной замкнутой гладкой кривой без самопересечений $C \subset \mathbb{R}^2$, можно посчитать по формуле:
$$A = \pm \int_C x dy,$$
где знак выбирается в зависимости от ориентации кривой.

Задача 6.98. * Четыре замкнутые кривые на плоскости
$$\alpha, \beta, \gamma, \delta : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$$
не имеют самопересечений и ограничивают области площадей $S_\alpha, S_\beta, S_\gamma, S_\delta$. Также оказалось, что в любой момент времени точки $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \delta(t)$ образуют квадрат в указанном

порядке, ориентированный по часовой стрелке. Как найти площадь одной из этих областей, зная площади трёх других?

[[Выпишите площади по формуле Грина.]]

Задача 6.99. Докажите, что объём области в $\mathbb{R}^3$, ограниченной связной вложенной компактной поверхностью без края $S \subset \mathbb{R}^3$, можно посчитать по формуле:

$$A = \pm \int_S x dy \wedge dz,$$

где знак выбирается в зависимости от ориентации поверхности, не забывая про положительность объёма.

7. Гомотопические инварианты, векторные поля и римановы структуры

7.1. **Потенциалы дифференциальных форм первой степени.**

Задача 7.1 (Порядок точки относительно кривой). Для замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, не проходящей через начало координат, обозначим *порядок начала координат относительно кривой* γ

$$w(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

Докажите, что это число не меняется при непрерывных деформациях кривой, при которых она не проходит через начало координат. Докажите, что это число корректно определено и для непрерывных замкнутых кривых, которые не проходят через начало координат.

[[Выражение под интегралом локально является полным дифференциалом (используйте арктангенс), что позволяет доказать инвариантность при непрерывных деформациях и определить число для непрерывных кривых.]]

Задача 7.2. Докажите, что порядок точки относительно кривой является целым.

[[Если кривая не приближается к началу координат ближе чем на ε, то её равномерное приближение ломаной с точностью $\varepsilon/2$ не меняет порядка точки относительно кривой. Для ломаной же можно с помощью локальной первообразной интерпретировать вклад каждого её отрезка в порядок точки и смысл суммы этих вкладов.]]

Задача 7.3. Докажите, что порядок начала координат относительно не проходящей через него нечётной (как отображение $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ со свойством $\gamma(-u) = -\gamma(u)$) кривой является нечётным целым числом.

[[Посмотрите на определяющий порядок интеграл по половине нечётной кривой.]]

Задача 7.4. Пусть гладкая кривая на плоскости замкнута и имеет всюду ненулевую скорость. Докажите, что интеграл кривизны (взятой со знаком)

$$\int_\gamma k(s)\, ds$$

по натуральному параметру является целым числом, умноженным на 2π.

[[Посмотрите на скорость этой кривой и порядок нуля относительно скорости.]]

Задача 7.5. Докажите, что если на гладком многообразии M любая замкнутая гладкая кривая $\gamma : \mathbb{S}^1 \to M$ может быть гладко стянута в точку, то условие $d\alpha = 0$ для $\alpha \in \Omega^1(M)$ является достаточным для существования $f \in C^\infty(M)$, такой что $\alpha = df$.

[[Достаточно доказать, что $\int_\gamma \alpha = 0$ для всех замкнутых кусочно-гладких кривых γ и данного α. Сначала полезно приблизить кусочно-гладкую кривую гладкой и проверить, что условие $d\alpha = 0$ гарантирует равенство интегралов по исходной кривой и приближенной.

Стягивание γ в точку $p \in M$ можно понимать как отображение $h : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to M$ с $h(t,0) \equiv \gamma(t)$ и $h(t,1) \equiv p$. Для доказательства $\int_\gamma \alpha = 0$ перейдите к рассмотрению $h^*\alpha$ с $dh^*\alpha = 0$ на цилиндре $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ и примените формулу Стокса не цилиндре.]]

7.2. **Первообразные дифференциальных форм и когомологии де Рама.**

Задача 7.6. Докажите, что внешнее произведение замкнутой формы на точную форму — точная форма.

[[Используйте правило Лейбница для внешнего произведения.]]

Задача 7.7. Пусть M — многообразие, а $N \subset M$ — некоторое его подмногообразие. Верно ли, что ограничение замкнутой $\alpha \in \Omega^*(M)$ на N является замкнутой формой? Верно ли, что ограничение точной формы $\alpha \in \Omega^*(M)$ на N является точной формой?

[[Используйте тот факт, что ограничение формы на подмногообразие коммутирует с внешним дифференцированием.]]

Задача 7.8. Докажите, что гладкая гомотопность является отношением эквивалентности между гладкими отображениями многообразий.

[[Проверьте транзитивность, определив для данных гомотопий $h_1(x,t)$ и $h_2(x,t)$ при условии $h_1(x,1) \equiv h_2(x,0)$ новую гомотопию $h_3(x,t)$, равную $h_1(x,2t)$ при $t \leqslant 1/2$ и $h_2(2t-1)$ при $t \geqslant 1/2$. Обоснуйте её гладкость.]]

Задача 7.9. Постройте гомотопию между тождественным отображением $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ и отображением $x \mapsto -x$ на той же сфере.

[[Используйте отождествление $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$.]]

Задача 7.10. Проверьте, что разложение формы α на $M \times [0,1]$ в сумму форм, одна из которых делится на dt, а другая — нет, не зависит от замены координат на многогобразии M.

[[Можно проверить действие замены координат непосредственно. Также можно воспользоваться внутренним умножением, определяемым далее в разделе **??**, проверить формулу $\alpha = dt \wedge i_{\frac{\partial}{\partial t}}\alpha + i_{\frac{\partial}{\partial t}}(dt \wedge \alpha)$ и проверить, что она даёт нужное разложение.]]

Задача 7.11. Придумайте форму $\alpha \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, у которой $d\alpha = 0$ и для которой не существует $\beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, такой что $d\beta = \alpha$.

[[Постарайтесь придумать замкнутую α так, чтобы её интеграл по единичной сфере был ненулевым. Тогда отсутствие «первообразной» будет следовать из формулы Стокса.]]

Задача 7.12. Докажите, что при условии $d\alpha = 0$ для $\alpha \in \Omega^1(M)$ интеграл по кривой $\int_\gamma \alpha$ можно определить для непрерывных кривых без требования дифференцируемости.

[[Утверждение станет локальным, если определённая нами величина будет аддитивна по кривым. Поэтому сначала можно работать в $U \subseteq \mathbb{R}^n$ и считать, что $\alpha = du$. Тогда интеграл можно определить как разность потенциалов в конце и в начале.]]

Задача 7.13. * Докажите, что для произвольной $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ можно корректно определить интеграл по не обязательно дифференцируемой кривой γ в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условию Гёльдера

$$|\gamma(t') - \gamma(t'')| \leqslant C|t' - t''|^\alpha$$

с показателем $\alpha > 1/2$.

[[Приближайте кривую всё более мелко вписанными в неё ломаными и докажите, что интегралы по ломаным составляют фундаментальную последовательность.]]

Задача 7.14. * Для не обязательно компактного многообразия без края M рассмотрим дифференциальные формы с компактным носителем $\Omega_c^*(M)$ и определим *когомологии де Рама с компактным носителем*

$$H_c^k(M) = \left(\ker d : \Omega_c^k(M) \to \Omega_c^{k+1}(M)\right) / \left(\operatorname{Im} d : \Omega_c^{k-1}(M) \to \Omega_c^k(M)\right).$$

Докажите, что если $n = \dim M$, M ориентируемо и связно, то $H_c^n(M)$ одномерно. Что будет, если M связно, но не ориентируемо?

[[Лемма **??** доказывает это для $\mathbb{R}^n$, модифицируйте доказательство для произвольного связного M.]]

Задача 7.15. ** Докажите, что $H_c^k(\mathbb{R}^n) = 0$ при $k \neq n$ и $H_c^n(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$.

[[Для случая $k = 0$ утверждение делается вручную. В остальных случаях заметьте, что цепная гомотопия с сохранением компактности носителя возможна для *собственных* отображений и гомотопий, то есть отображений и гомотопий с компактными прообразами компактов. Отсюда следует, что $\alpha \in \Omega_c^k(\mathbb{R}^n)$ гомологична с компактным носителем форме $f^*\alpha$, где $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — любое гладкое собственное отображение, гомотопное тождественному с помощью гладкой собственной гомотопии.

Один из вариантов дальнейшего рассуждения: вывести гомологичность α с компактным носителем её усреднению по всевозможным вращениям $\mathbb{R}^n$ вокруг начала координат и изучить формы степени k, инвариантные относительно вращений.]]

7.3. **Критические и регулярные значения, теорема Сарда.**

Задача 7.16. Опишите критические и регулярные значения функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.

Задача 7.17. В теореме Сарда сначала следовало бы проверить, что множество критических значений измеримо. Докажите, что оно является объединением счётного числа замкнутых множеств.

[[Представьте N в виде объединения счётной последовательности компактных многообразий (с краем), и покажите, что для каждого из них множество критических точек замкнуто, а значит и множество соответствующих критических значений в M — тоже.]]

Задача 7.18. Докажите, что множество матриц с единичным детерминантом $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ является гладким подмногообразием в пространстве матриц $n \times n$, рассматриваемом как $\mathbb{R}^{n^2}$.

[[Рассмотрите положительное регулярное значение функции детерминанта матрицы, масштабируйте множество соответствующих ему матриц.]]

Задача 7.19. Докажите, что множество ортогональных матриц $\mathrm{O}(n)$ является гладким подмногообразием в пространстве матриц $n \times n$, рассматриваемом как $\mathbb{R}^{n^2}$.

[[Рассмотрите отображение $X \mapsto X^T X$ пространства всех матриц в пространство симметричных положительно полуопределённых матриц и его положительно определённое регулярное значение. Покажите, что слой над каким-то регулярным значением диффеоморфен слою над единичной матрицей.]]

7.4. **Степень гладкого отображения.**

Задача 7.20. Докажите, что без предположения о компактности N или собственности отображения f предыдущая лемма неверна.

[[Постройте контрпример из одномерных многообразий и отображений между ними.]]

Задача 7.21. Пусть $f : N \to M$ — гладкое собственное отображение ориентированных многообразий без края одной и той же размерности n, причём M связно. Докажите, что для любой формы $\omega \in \Omega^n_c(M)$ выполняется

$$\int_N f^*\omega = \deg f \cdot \int_M \omega.$$

[[Посмотрите на ω с носителем в окрестности регулярного значения. Произвольную ω разбейте в сумму форм с маленькими носителями и с помощью леммы **??** сдвиньте их с критических значений на регулярные.]]

Задача 7.22. Пусть $f : N \to M$ — гладкое отображение компактных ориентированных многообразий с краем одной и той же размерности, причём $f(\partial N) \subseteq \partial M$ и M связно. Докажите, что в этом случае степень f корректно определена и $\deg f = \deg f|_{\partial N}$.

[[Можно рассуждать геометрически (заодно доказав вариант утверждения для чётностей при отсутствии ориентации), а можно использовать предыдущую задачу и формулу Стокса, модифицировав рассуждения для многообразий с краем.]]

7.5. **Применения степени отображения.**

Задача 7.23. Приведите пример компактного многообразия с краем положительной размерности, у которого тождественное отображение гомотопно постоянному.

Задача 7.24. Выведите теорему Брауэра из теоремы **??**.

[[Сделайте так, чтобы отображение $f : B^n \to B^n$ шло строго внутрь шара и постройте ректракцию, рассматривая прямые $[x, f(x)]$, которые все невырождены при условии отсутствия неподвижных точек.]]

Задача 7.25. * Докажите, что гомеоморфизм (не обязательно гладкое непрерывное отображение с непрерывным обратным) гладких многообразий с краем $f : M \to N$ переводит край в край.

[[Если какая-то точка $p \in M$ не из края идёт в край, то можно рассмотреть ситуацию в локальных координатах. Потом можно применить теорему об инвариантности области.]]

Задача 7.26 (Вторая половина теоремы Жордана). * Докажите, что дополнение к образу инъективного непрерывного отображения $f : S \to \mathbb{R}^2$ окружности в плоскость разбивается на два связных множества.

[[Проверьте это утверждение для ломаных. Взяв положительное δ, которое меньше половины минимального расстояния между парой непересекающихся отрезков ломаной, проверьте, что δ-окрестность ломаной состоит из не более чем двух связных компонент. Проверьте также, что если две точки p и q лежат на расстоянии не менее ε от ломаной, могут быть соединены кривой, не пересекающей ломаную, но не могут быть соединены кривой, лежащей на расстоянии более δ от ломаной, то на ломаной есть пара точек на расстоянии не более 2δ друг от друга, которые разбивают ломаную на две ломаные диаметра не менее ε каждая.

Приблизьте равномерно непрерывную кривую ломаной f_n и сделайте это достаточно аккуратно, чтобы ломаная не имела самопересечений. Для исходной непрерывной кривой f предположите противное и рассмотрите три точки, никакие две из которых нельзя соединить кривой в $\mathbb{R}^2 \setminus f(S)$. Перейдя к подпоследовательности ломаных, считайте, что какие-то две точки p и q из этих трёх для любого n можно соединить кривой γ_n, не пересекающей $f_n(S)$. Выберите γ_n на максимально возможном расстоянии от $f_n(S)$. Выведите, что p и q можно соединить и кривой, не пересекающей $f(S)$, рассмотрев отдельно случаи, когда предел $\operatorname{dist}(\gamma_n, f_n(S))$ положительный (это просто) и когда он равен нулю (с помощью наблюдения из предыдущего абзаца).]]

Задача 7.27. Докажите, что любое выпуклое компактное множество $K \subset \mathbb{R}^n$ гомеоморфно шару некоторой размерности и для непрерывных отображений $f : K \to K$ тоже верна теорема Брауэра.

[[Перейдите из $\mathbb{R}^n$ в аффинную оболочку K (наименьшее аффинное подпространство, содержащее K). Заметьте, что в этой аффинной оболочке K имеет непустую внутренность, поместите во внутренность начало координат, докажите, что для лучей из начала координат расстояние от начала координат до пересечения луча с ∂K будет непрерывно зависеть от луча. После этого выпишете гомеоморфизм явно.]]

Задача 7.28. Докажите, что для непрерывного отображения сферы в себя $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ либо найдётся x, такая что $f(x) = -x$, либо f сюръективно.

[[Попробуйте сделать гомотопию между f и тождественным отображением кратчайшим поворотом от $f(x)$ к x. Используйте тот факт, что степень корректно определена для всего лишь непрерывных отображений.]]

Задача 7.29. Докажите, что если степень непрерывного отображения $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ не равна $(-1)^{n-1}$, то f имеет неподвижную точку $f(x) = x$.

[[Рассмотрите отображение, действующее по формуле $g(x) = -f(x)$, и примените предыдущую задачу.]]

Задача 7.30. Докажите, что если на сфере $\mathbb{S}^n$ есть всюду ненулевое касательное векторное поле, то n должно быть нечётным.

[[Один способ: построить из ненулевого векторного поля отображение сферы в себя без неподвижных точек, гомотопное тождественному. Другой способ: построить из ненулевого векторного поля гомотопию между тождественным отображением сферы и отображением $x \mapsto -x$.]]

Задача 7.31. Приведите пример всюду ненулевого касательного векторного поля на сфере нечётной размерности.

[[Рассмотрите сферу в $\mathbb{R}^{2n}$ как сферу в $\mathbb{C}^n$.]]

Задача 7.32. Классифицируйте непрерывные отображения окружности в себя $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ с точностью до гомотопии.

[[Рассмотрите стандартную параметризацию $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ и найдите непрерывное $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такое что $\tau \circ g = f \circ \tau$, изучите свойства таких g.]]

Задача 7.33. * Докажите, что любое вложенное в $\mathbb{R}^3$ компактное двумерное многообразие без края S ориентируемо.

[[Попробуйте построить ориентацию с помощью непрерывного выбора нормали к данной поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$. Заметьте, что если это не получится, то дополнение $\mathbb{R}^3 \setminus S$ связно. Для любой точки $p \notin S$ рассмотрите отображение $g_p : S \to S^2$, заданное как $g_p(x) = (x - p)/|x - p|$. Докажите, что его степень (как остаток по модулю два) не меняется при небольших изменениях p. Рассмотрев близкие к S точки докажите, что степень g_p принимает оба значения остатков по модулю два и получите противоречие.]]

7.6. **Внутреннее умножение и производная Ли.**

Задача 7.34. Проведите выкладки для проверки формулы Лейбница для внутреннего умножения на базисных формах с помощью формулы (**??**).

Задача 7.35. Пусть i_X — внутреннее умножение на вектор X, а e_α — внешнее умножение на линейную форму α. Найдите собственные значения оператора $i_X e_\alpha + e_\alpha i_X$ на кососимметричных формах.

Задача 7.36. Пусть i_X — внутреннее умножение на вектор X, а e_α — внешнее умножение на линейную форму α. Определим линейный оператор $A_{X,\alpha}$ как сумму $i_X + e_\alpha$. Найдите его собственные значения на кососимметричных формах и их кратность.

[[Заметьте, что его след равен нулю и изучите его квадрат.]]

Задача 7.37. * Пусть в булевом кубе $\{0,1\}^n$ отмечена $2^{n-1}+1$ вершина. Докажите, что найдётся отмеченная вершина, у которой не менее $\sqrt{n}$ отмеченных соседей (вершины считаются соседними, если они отличаются только в одной координате).

[[Отождествите базис во внешней алгебре с вершинами булева куба. Рассмотрите оператор из предыдущей задачи с вектором X и формой α, имеющими все координаты 1. Обратите внимание, что матричные элементы этого оператора соответствуют только соседним вершинам куба. Найдите собственный вектор $A_{X,\alpha}$, у которого отличны от нуля только координаты, соответствующие отмеченным вершинам, и используйте знания о собственном значении.]]

Задача 7.38. Пусть f — гладкая функция, а X — векторное поле. Выразите действие L_{fX} на дифференциальную форму через действие L_X на ту же форму.

Задача 7.39. Выведите правило Лейбница для производной Ли из правила Лейбница для внутреннего умножения и правила Лейбница для внешней производной.

Задача 7.40. Докажите, что производная Ли вдоль векторного поля L_X коммутирует с внешним дифференцированием d для форм любой степени.

[[Проще всего это вывести непосредственно из определения.]]

Задача 7.41. Проверьте, что выражение $i_X d(i_Y\alpha) - i_Y d(i_X\alpha) - i_Y i_X d\alpha$ умножается на гладкую функцию f, если α умножается на f.

Задача 7.42. Выпишите явное выражение для $L_X Y = [X,Y]$ через координаты векторных полей $X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ и $Y = \sum_i Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

[[Можно довести до явного вида формулу (**??**) или подействовать коммутатором на координатные функции. В итоге должно получиться

$$\left[\sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_j Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = \sum_{i,j} X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{i,j} Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

]]

Задача 7.43. Пусть векторное поле X в $\mathbb{R}^n$ задано так, что в точке p находится вектор Ap, где $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, аналогично пусть есть векторное поле Y, заданное аналогично как $p \mapsto Bp$. Посчитайте коммутатор X и Y.

[[Можно воспользоваться координатной формулой.]]

Задача 7.44. Докажите формулу для векторных полей X, Y и дифференциальной формы α

$$i_{[X,Y]}\alpha = d i_X i_Y \alpha + i_X d i_Y \alpha - i_Y d i_X \alpha - i_Y i_X d\alpha.$$

[[Начните с формулы Лейбница $L_X(i_Y\alpha) = i_{L_X Y}\alpha + i_Y L_X \alpha$, которую наверное проще всего объяснить с помощью теоремы **??**.]]

Задача 7.45. Проверьте, что для двух неоднородных линейных дифференциальных операторов первого порядка, которые в координатах имеют вид

$$f \mapsto X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + X_0 f$$

коммутатор будет иметь такой же вид.

[[Проверьте, что после коммутирования производных второго порядка не будет.]]

Задача 7.46 (Теорема о дивергенции). Пусть на многообразии M дана нигде не нулевая форма $\nu \in \Omega^n(M)$ при $n = \dim M$. Интегрирование этой формы задаёт некоторое понятие объёма (меры) на многообразии. Тогда дивергенцию векторного поля X относительно этого объёма можно определить как

$$L_X \nu = (\operatorname{div}_\nu X)\nu.$$

Как написать интеграл по многообразию с краем

$$\int_M (\operatorname{div}_\nu X)\nu$$

через интеграл по краю ∂M?

[[Вспомните формулу для производной Ли дифференциальной формы и примените формулу Стокса.]]

Задача 7.47. Пусть на многообразии M дана форма $\nu \in \Omega^n(M)$ при $n = \dim M$. Докажите, что для любой функции $f \in C^\infty(M)$ и любого векторного поля X на M выполняется $df \wedge i_X \nu = X(f)\nu$.

[[Заметьте, что $df \wedge \nu = 0$ и примените к этом равенству внутреннее умножение на X.]]

Задача 7.48. Докажите, что для любой гладкой функции $H : M \to \mathbb{R}$ (*гамильтониана*) на симплектическом многообразии найдётся единственное *гамильтоново векторное поле* X_H со свойством

$$i_{X_H}\omega = -dH.$$

[[Обратите внимание, что невырожденная билинейная форма устанавливает изоморфизм между векторным пространством и его двойственным.]]

Задача 7.49. Докажите, что в условия предыдущей задачи

$$X_H(H) = 0, \quad L_{X_H}\omega = 0.$$

[[Проверьте всё это по определению.]]

Задача 7.50. Докажите, что на симплектическом многообразии операция скобки Ли векторных полей может быть поднята (в смысле сопоставления функции её гамильтонова векторного поля) до операции *скобки Пуассона* функций со свойствами

$$\{f, g\} = -\{g, f\}, \quad \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0, \quad [X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}.$$

[[Посмотрите на выражение $\omega(X_f, X_g) = X_f g = -X_g f$ и проверьте равенства

$$d(X_f g) = L_{X_f} dg = -L_{X_f} i_{X_g}\omega = -i_{L_{X_f} X_g}\omega - i_{X_g} L_{X_f}\omega = -i_{[X_f, X_g]}\omega,$$

возможно, эти равенства проще понять из геометрического смысла производной Ли в смысле теоремы ??.]]

7.7. **Интегрирование векторных полей и дифференциальные уравнения.**

7.8. **Интегрирование векторных полей на многообразии, геометрический смысл производной Ли.**

Задача 7.51 (Формула Лиувилля–Остроградского). Пусть линейное дифференциальное уравнение $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ порождает семейство аффинных диффеоморфизмов $\varphi_{t_1,t_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Проверьте, что для аффинного отображения корректно определён детерминант и докажите, что выполняется формула

$$\frac{d}{dt_1} \det \varphi_{t_1,t_0} = \operatorname{tr} A(t_1) \det \varphi_{t_1,t_0}.$$

[[Убедитесь, что доказательство теоремы **??** работает и для векторных полей, зависящих от времени.]]

Задача 7.52. Пусть векторные поля $X_1, \ldots, X_k$ линейно независимы в точке p многообразия M. Докажите, что если какая-то скобка $[X_i, X_j]$ в точке p не является линейной комбинацией $X_1, \ldots, X_k$ в какой-то точке, то не может быть k-мерных подмногообразий $N \subset M$, $N \ni p$, у которых $TN = \langle X_1, \ldots, X_k \rangle$ в окрестности p.

[[Проверьте с помощью теорема **??**, что если два векторных поля касаются N в некоторой окрестности p, то их коммутатор тоже касается N.]]

7.9. **Интегрирование системы векторных полей.**

Задача 7.53. Пусть векторные поля $X_1, \ldots, X_k$ линейно независимы в точке p многообразия M. Докажите, что если какая-то скобка $[X_i, X_j]$ в точке p не является линейной комбинацией $X_1, \ldots, X_k$ в сколь угодно близких к p точках, то не может быть k-мерных подмногообразий $N \subset M$, $N \ni p$, у которых $TN = \langle X_1, \ldots, X_k \rangle$ в окрестности p.

[[Проверьте, что если два векторных поля касаются N в некоторой окрестности p, то их коммутатор тоже касается N.]]

Задача 7.54. В условиях теоремы Фробениуса рассмотрите объединение N всех гладких кривых в M с началом в p, касательные векторы которых лежат в линейной оболочке $\langle X_1, \ldots, X_k \rangle$. Введите на нём структуру (связного) гладкого многообразия и покажите, что отображение $N \to M$ гладкое и его производная имеет всюду ранг k.

[[Обратите внимание, что топология N не обязана быть индуцирована с M. Определите окрестность $p \in N$ как окрестность p в некотором локальном интегральном подмногообразии, проходящем через p. Возьмите координатные карты для N из теоремы Фробениуса.]]

Задача 7.55. Пусть в каждой точке p многобразия M дан флаг $0 \subset F_{1,p} \subset \cdots \subset F_{k,p} \subset T_pM$, который гладко зависит от точки p. Пусть также для любых двух векторных полей из включения $X, Y \in F_i$ во всех точках многообразия следует, что скобка Ли оказывается тоже в F_i. Докажите, что у каждой точки M есть координатная окрестность, в любой точке которой для любого $i = 1, \ldots, k$ выполняется

$$F_i = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{\dim F_i}} \right\rangle.$$

[[Действуйте как в доказательстве теоремы Фробениуса, взяв векторное поле в F_1 и выпрямив его до $\frac{\partial}{\partial x_1}$.]]

7.10. **Группы Ли, левоинвариантные векторные поля и однопараметрические подгруппы.**

Задача 7.56. Выпишите явный вид однопараметрических подгрупп группы обратимых матриц $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$.

[[Используйте матричную экспоненту

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

]]

Задача 7.57. Пусть $A \subseteq L(G)$ — подалгебра Ли (то есть векторное пространство, замкнутое относительно операции скобки Ли). Докажите, что существует инъективный гомоморфизм $I : H \to G$ групп Ли, такой что группа H связна, а $DI_e : L(H) \to L(G)$ (производная I в единице группы H) есть инъекция с образом $I(L(H)) = A$.

[[Выбрав базис $X_1, \ldots, X_k$ в A, мы можем применить к этой системе левоинвариантных векторных полей на G теорему Фробениуса. Используя результат теоремы Фробениуса и задачи 7.54, мы получим инъективное гладкое отображение многообразий $I : H \to G$, производная которого всюду имеет ранг k. Сравнивая образ $I(H)$ с его левыми сдвигами на элементы из самого образа и использую его связность, можно понять, что образ $I(H)$ инвариантен относительно левых сдвигов на его элементы. Это означает, что образ $I(H)$ является подгруппой G, а на H можно ввести структуру связной группы Ли.]]

Задача 7.58. Установите изоморфизм алгебр Ли между $L(\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n))$ и алгеброй матриц $n \times n$ с операцией

$$[A, B] = AB - BA.$$

[[Выведите описание левоинвариантных векторных полей на группе $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ из описания её однопараметрических подгрупп. Примените геометрическое определение производной Ли.]]

Задача 7.59. Определите, какой подалгебре $L(\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n))$ соответствует алгебра Ли $L(\mathrm{O}(n))$ ортогональной группы.

[[Аналогично предыдущей задаче.]]

Задача 7.60. Определите, какой подалгебре $L(\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n))$ соответствует алгебра Ли $L(\mathrm{U}(n))$ унитарной группы.

[[Аналогично предыдущей задаче.]]

Задача 7.61. *Дифференцированием* алгебры матриц M_n размера $n \times n$ называется любое линейное отображение $D : M_n \to M_n$, удовлетворяющее правилу Лейбница

$$D(AB) = D(A)B + AD(B), \quad \forall A, B \in M_n.$$

Докажите, что операция $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ задаёт на векторном пространстве дифференцирований алгебры матриц структуру алгебры Ли.

Задача 7.62. * Опишите все дифференцирования алгебры матриц M_n.

[[Рассмотрите матричную экспоненту дифференцирования $\varphi = e^D$ и докажите, что она является *автоморфизмом* алгебры матриц, то есть линейным изоморфизмом, удовлетворяющим равенству

$$\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B), \quad \forall A, B \in M_n.$$

Для установления структуры автоморфизма φ рассмотрите матрицы e_{ij} с единицей в позиции (i, j) и с нулями в остальных местах. Разложите единичную матрицу I_n в виде суммы проекторов $I_n = e_{11} + \cdots + e_{nn}$, проверьте соотношения $e_{ii}e_{jj} = \delta_{ij}e_{ij}$ и посмотрите, что произойдёт с этим разложением после применения автоморфизма φ. С помощью соотношений $e_{ij}e_{k\ell} = \delta_{jk}e_{i\ell}$ разберитесь, чему должны быть равны $\varphi(e_{ij})$.]]

7.11. **Римановы многообразия и риманов объём.**

Задача 7.63. Докажите, что для любых двух римановых структур g и g' на одном и том же многообразии M и $t \in [0,1]$ билинейная форма $(1-t)g + tg'$ тоже будет римановой структурой.

[[Проверьте положительную определённость.]]

Задача 7.64. Докажите, что для гиперповерхности $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$, являющейся графиком гладкой функции $f : U \to \mathbb{R}$,

$$H = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mid x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n),\ (x_1, \dots, x_n) \in U\},$$

риманов объём в индуцированной с $\mathbb{R}^{n+1}$ римановой структуре находится по формуле

$$\operatorname{vol} H = \int_U \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2}\ |dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n|\,.$$

[[Установите сначала формулу для детерминанта квадратичной формы $g_0 + \alpha \otimes \alpha$, где g_0 — положительно определённая квадратичная форма, а α — линейная форма.]]

Задача 7.65. Проверьте, что евклидова структура на $\mathbb{R}^n$ является произведением n римановых структур на прямой $\mathbb{R}^1$.

Задача 7.66. Посчитайте площадь поверхности (риманов объём) единичной сферы в $\mathbb{R}^3$.

[[Параметризуйте её каким-либо образом.]]

Задача 7.67. Посчитайте площадь поверхности тора в $\mathbb{R}^4$, заданного уравнениями

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \quad x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

[[Можно посчитать в лоб, а можно проверить, является ли этот тор произведением римановых многообразий.]]

Задача 7.68. У выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^3$ взяли нормали к граням $\{n_i\}$ и площади этих граней $\{A_i\}$. Докажите, что

$$\sum_i A_i n_i = 0$$

[[Поинтегрируйте по поверхности многогранника формы типа $dx \wedge dy$ и свяжите это выражение с площадями граней.]]

Задача 7.69. * Рассмотрим отображение единичной сферы $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ в $(n-1)$-мерный симплекс $\Delta^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ по формуле

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto \left(|z_1|^2, \dots, |z_n|^2\right).$$

Докажите, что риманов объём на сфере при этом переходит, с точностью до умножения на константу, в риманов объём на симплексе.

[[Риманов объём на сфере определён инвариантно относительно вращений и эта инвариантность характеризует его однозначно с точностью до константы. Значит существует константа c_n, такая, что для любого измеримого множества $X \subseteq S^{2n-1}$ его мера относительно риманова объёма равна гауссовой мере с плотностью $e^{-\pi|\bar{z}|^2}$ конуса над множеством X, $\{tx \mid t \geqslant 0,\ x \in X\}$. Далее уже нетрудно понять, во что переходит гауссова мера при рассматриваемом в задаче отображении.]]

Задача 7.70. * Докажите, что для двумерной компактной поверхности с краем $S \subset \mathbb{R}^4$ и индуцированной с $\mathbb{R}^4$ евклидовой структуры выполняется

$$\operatorname{vol}_g S \geqslant \int_S dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4.$$

Когда выполняется равенство?

[[Это на самом деле локальный вопрос, который в каждой точке сводится к рассмотрению двумерных линейных подпространств $\mathbb{R}^4$. Его удобно решать, введя комплексную структуру на $\mathbb{R}^4$, то есть считая пары (x_1, x_2) и (x_3, x_4) двумя комплексными координатами в $\mathbb{C}^2$.]]

7.12. **Звёздочка Ходжа, градиент, ротор, дивергенция.**

Задача 7.71. Объясните, как связаны матрицы g_{ij} и $\widetilde{g}_{ij}$ (последнюю в теоретической физике пишут как g^{ij}), представляющие (полу)риманову структуру на исходном касательном пространстве и соответствующую билинейную форму на двойственном к нему кокасательном пространстве.

Задача 7.72. Докажите неравенство для римановой структуры g, вектора X и формы первой степени α в той же точке

$$\alpha(X)^2 \leqslant g(X, X) \cdot \widetilde{g}(\alpha, \alpha).$$

[[При правильном выборе системы координат должно получиться неравенство Коши–Буняковского.]]

Задача 7.73. Проверьте невырожденность внешнего умножения в координатах в качестве упражнения.

Задача 7.74. Докажите, что на n-мерном (полу)римановом многообразии для звёздочки $* : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ выполняется

$$* * \alpha = (-1)^{k(n-k)} \operatorname{sgn} \det g \cdot \alpha.$$

[[Проверьте в координатах, в которых g имеет диагональный вид с ± 1 на диагонали.]]

Задача 7.75. Докажите, что для положительно определённой g звёздочка Ходжа является изометрией для скалярного произведения $\widetilde{g}$ на внешних формах касательного пространства в точке.

[[Проверьте в координатах, в которых g имеет диагональный вид с 1 на диагонали.]]

Задача 7.76. Докажите, что определение дивергенции для риманова многообразия согласовано с определением дивергенции относительно формы объёма как $\operatorname{div} X \operatorname{vol}_g = L_X(\operatorname{vol}_g)$.

[[Используйте формулу Картана $L_X = i_X d + d i_X$ и формулу $*1 = \operatorname{vol}_g$.]]

Задача 7.77. Докажите что $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$ и $\operatorname{div} \operatorname{rot} X = 0$.

[[Вспомните свойство $d^2 = 0$.]]

Задача 7.78. Докажите для гладкого векторного поля на $\mathbb{R}^3$, что если $\operatorname{rot} X = 0$ на всём $\mathbb{R}^3$, то $X = \operatorname{grad} f$, для некоторой функции f. А если $\operatorname{div} X = 0$ на всём $\mathbb{R}^3$, то $X = \operatorname{rot} Y$, для некоторого векторного поля Y (последнее физики называют «векторный потенциал»).

[[Сведите к теореме **??** про обращение операции d.]]

Задача 7.79. Выпишите оператор Лапласа для функций в сферических координатах $x = r\cos\varphi\sin\vartheta$, $y = r\sin\varphi\sin\vartheta$, $z = r\cos\vartheta$.

[[Используйте выражение $\Delta f = *d*df$ и тот факт, что векторные поля $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\vartheta}$ ортогональны (но не ортонормированы). Начните с доказательства формул

$$g = dr\otimes dr + r^2\, d\vartheta\otimes d\vartheta + r^2\sin^2\vartheta\; d\varphi\otimes d\varphi,$$

$$\tilde{g}\,(dr,dr) = 1,\ \tilde{g}\,(d\vartheta,d\vartheta) = \frac{1}{r^2},\ \tilde{g}\,(d\varphi,d\varphi) = \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta},$$

$$*dr = r^2\sin\vartheta\; d\vartheta\wedge d\varphi,\ *d\vartheta = \sin\vartheta\; d\varphi\wedge dr,\ *d\varphi = \frac{1}{\sin\vartheta}dr\wedge d\vartheta.$$

]]

Задача 7.80. * Функция f на римановом многообразии называется *гармонической*, если $\Delta f = *d*df = 0$. Докажите, что у гармонической на $\mathbb{R}^n$ функции все средние значения на сферах с центрами в нуле равны её значению $f(0)$.

[[Заметьте, что оператор Лапласа линеен и инвариантен относительно вращений, следовательно функция, получающаяся из f усреднением относительно всех вращений $\mathrm{SO}(n)$ тоже гармоническая и зависит только от расстояния до начала координат. Найдите общий вид гармонических функций в $\mathbb{R}^n$, зависящих только от расстояния до начала координат.]]

Задача 7.81. Докажите, что непостоянная гармоническая функция на многообразии без края не может иметь компактный носитель.

[[Выразите интеграл $\int_M |df|^2\operatorname{vol}_g = \int_M df\wedge *df$ через лапласиан Δf.]]

Задача 7.82. В ортогональной матрице A с положительным детерминантом размера $n\times n$ взяли левую верхнюю подматрицу B размера $k\times k$ и правую нижнюю подматрицу C размера $(n-k)\times(n-k)$. Докажите, что $\det B = \det C$.

[[Действие ортогонального оператора A можно распространить на $\wedge^*(\mathbb{R}^n)$, назовём этот оператор $\wedge A$, его матричные элементы являются минорами исходной матрицы A. Заметьте, что $\wedge A$ коммутирует с действием звёздочки Ходжа на $\wedge^*(\mathbb{R}^n)$ и звёздочка Ходжа сама ортогональна.]]

Задача 7.83. Проверьте, что можно подобрать понижающий степень формы на единицу дифференциальный оператор $d^* : \Omega^*(M)\to\Omega^{*-1}(M)$, такой что для форм с компактным носителем на многообразии без края будет выполняться

$$\int_M \widetilde{g}(d\alpha,\beta)\operatorname{vol}_g = \int_M \widetilde{g}(\alpha,d^*\beta)\operatorname{vol}_g.$$

[[Попробуйте выражение $d^* = \pm * d*$ и подберите в нём знак.]]

Задача 7.84. Оператор Лапласа на дифференциальных формах (с точностью до знака) определяется как $\Delta = (d+d^*)^2$, *гармонические формы* определяются как решения уравнения $\Delta\alpha = 0$. Докажите, что на многообразии без края форма с компактным носителем α гармоническая тогда и только тогда, когда $d\alpha = 0$ и $d^*\alpha = 0$.

[[Рассмотрите выражение $\int_M g(\alpha,\Delta\alpha)\operatorname{vol}_g$.]]

Задача 7.85. * Работая с линейным пространством V с симметричной билинейной формой g зададим для любого вектора $X \in V$ оператор на кососимметричных формах пространства V как $e(X) : \wedge^*(V) \to \wedge^*(V)$ как

$$e(X) : \alpha \mapsto X^\flat \wedge \alpha + i_X \alpha,$$

где операция $\flat$ определена через g. Докажите, что эти операции удовлетворяют соотношению

$$e(X)e(Y) + e(Y)e(X) = 2g(X, Y).$$

Докажите, что они порождают (в смысле линейных комбинаций и умножения) *алгебру Клиффорда* размерности $2^{\dim V}$.

[[Выпишите выражение $e(X)e(Y) + e(Y)e(X)$ по определению, используйте что $X^\flat \wedge Y^\flat + Y^\flat \wedge X^\flat = 0$, $i_X i_Y + i_Y i_X = 0$ и правило Лейбница для i_X и i_Y. Для вычисления размерности докажите, что если фиксировать базис $X_1, \dots, X_n$ в V, то алгебра Клиффорда порождена мономами $e(X_{i_1})e(X_{i_2}) \dots e(X_{i_k})$ для всевозможных наборов $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n$ (это оценивает размерность сверху) и при этом любой элемент $\wedge^*(V)$ можно получить, умножая образующую $\wedge^n(V)$ на подходящий элемент алгебры Клиффорда (это оценивает размерность снизу).]]

7.13. **Ковариантная производная.**

Задача 7.86. Докажите, что условие отсутствия кручения эквивалентно тому, что для форм первой степени выполняется

$$(\nabla_X \alpha)(Y) - (\nabla_Y \alpha)(X) = d\alpha(X, Y).$$

[[Вспомните, что $d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])$.]]

Задача 7.87. Получите выражение в координатах (здесь индексы у векторов пишем сверху, как в теоретической физике) для

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i},\ Y = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x_i},\ Z = \sum_i Z^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

при условии $\nabla_X Y = Z$ как

$$Z^k = \sum_i X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x_i} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} X^i Y^j.$$

Проверьте, что *символы Кристоффеля*

$$\Gamma_{\ell ij} = \sum_k g_{\ell k} \Gamma^k_{ij}$$

можно в координатах найти как

$$\Gamma_{\ell ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\ell i}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{\ell j}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\ell}\right).$$

[[Примените линейность по первому аргументу и правило Лейбница по второму. Последняя формула — это по сути формула Козюля для попарно коммутирующих векторных полей $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_\ell}$.]]

Задача 7.88. Пусть N является вложенным подмногообразием в римановом многообразии M, а риманова структура на N индуцирована римановой структурой на M. Обозначим ковариантные производные на N и M как ∇^N и ∇^M соответственно. Докажите, что для векторных полей X и Y, касательных к N, ковариантная производная $\nabla^N_X Y$ равна ортогональной проекции ковариантной производной $\nabla^M_X Y$ на касательное пространство TN.

[[Проверьте, что проекция $\nabla^M_X Y$ на касательное пространство к N удовлетворяет всем свойствам ковариантной производной на N и равна $\nabla^N_X Y$ в силу единственности.]]

Задача 7.89 (Вторая фундаментальная форма подмногообразия). Пусть N является вложенным подмногообразием в римановом многообразии M, а риманова структура на N индуцирована римановой структурой на M, как в предыдущей задаче. Докажите, что для векторных полей X и Y, касательных к N, ортогональная к TN (по результату предыдущей задачи) компонента

$$\mathrm{II}_N(X, Y) = \nabla^M_X Y - \nabla^N_X Y$$

является симметричным тензором от X и Y.

[[Проверьте, как поменяется нормальная компонента, если X умножится на функцию f, с помощью правила Лейбница для ковариантной производной $\nabla^M_X Y$. Проверьте, как поменяется нормальная компонента при перестановке X и Y с помощью отсутствия кручения.]]

Задача 7.90 (Вторая фундаментальная форма двумерной поверхности в евклидовом пространстве). Пусть N является вложенной ориентированной двумерной поверхностью в $\mathbb{R}^3$ с римановой структурой, индуцированной обычным скалярным произведением. Тогда можно считать, что её вторая фундаментальная форма принимает скалярные значения после скалярного умножения на согласованный с ориентацией вектор нормали ν. Докажите, что если поверхность параметризована как $r = r(u, v)$, то вторая фундаментальная форма в этих координатах имеет вид

$$\mathrm{II}_N = Ldu \otimes du + Mdu \otimes dv + Mdv \otimes du + Ndv \otimes dv,$$

где

$$L = r''_{uu} \cdot \nu, \quad M = r''_{uv} \cdot \nu, \quad N = r''_{vv} \cdot \nu.$$

[[Заметьте, что в евклидовом пространстве ковариантная производная $\nabla_X Y$ просто дифференцирует координаты Y в направлении X (символы Кристоффеля равны нулю). В качестве X и Y возьмите разные комбинации из векторов r'_u и r'_v, продолжив параметризацию поверхности (u, v) до параметризации её окрестности $(u, v, w) \mapsto r(u, v) + w\nu$.]]

7.14. **Длина кривой, действие и уравнение геодезической.**

Задача 7.91. Проверьте явно, что длина кривой не зависит от выбора её параметризации.

Задача 7.92. Проверьте аксиомы метрического пространства для метрики связного риманова многообразия.

[[Наименее тривиально проверить невырожденность метрики, что между двумя разными точками оказывается положительное расстояние. Заметьте, что оценить снизу расстояние можно, если в каких-то координатах около точки p заметить, что любая кривая из точки p в точку q должна пересечь некоторую маленькую сферу S вокруг p, а далее оценить метрику в этой координатной окрестности снизу метрикой, пропорциональной евклидовой и оценить длину части кривой от p до S. Можно также использовать менее элементарную лемму **??**, доказываемую далее.]]

Задача 7.93. Проверьте, что параллельный перенос векторов из начала кривой в конец является ортогональным (относительно g) оператором.

[[Используйте совместимость ∇ с метрикой и ковариантно продифференцируйте $g(X, X)$ по скорости кривой.]]

Задача 7.94. Проверьте, что уравнение Эйлера–Лагранжа действительно даёт то же уравнение геодезической в координатах.

[[В процессе преобразований может понадобиться свойство отсутствия кручения, в координатах выраженное как $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.]]

Задача 7.95. *Векторным полем Киллинга* на (полу)римановом многообразии (M, g) называется поле, сохраняющее (полу)риманову структуру g. Докажите, что векторное поле K является полем Киллинга тогда и только тогда, когда для любых двух векторных полей X, Y выполняется $g(\nabla_X K, Y) + g(X, \nabla_Y K) = 0$.

[[Начните с равенства типа формулы Лейбница $(L_K g)(X, Y) = K(g(X, Y)) - g([K, X], Y) - g(X, [K, Y])$ и выразите в нём всё через ковариантное дифференцирование.]]

Задача 7.96. Пусть K — векторное поле Киллинга на (полу)римановом многообразии (M, g). Докажите, что функция $g(K, K)$ инвариантна относительно K, а нетривиальная интегральная кривая поля K является геодезической тогда и только тогда, когда она состоит из критических точек функции $g(K, K)$.

[[Рассмотрите произвольное векторное поле X и начните выписывать $X(g(K, K)) = 2g(\nabla_X K, K)$. Примените тождество для векторного поля Киллинга из предыдущей задачи для получения информации об ускорении $\nabla_K K$.]]

Задача 7.97. Докажите, что если риманово многообразие N вложено в риманово многообразие M и на N рассматривается индуцированная риманова структура, уравнение геодезической на N в терминах ускорения и ковариантной производной на M имеет вид

$$\ddot\gamma = \nabla^M_{\dot\gamma}\dot\gamma \perp N.$$

[[Примените результат задачи 7.88.]]

Задача 7.98. Докажите, что если риманово многообразие N вложено в риманово многообразие M и на N рассматривается индуцированная риманова структура, то любая геодезическая многообразия M, полностью лежащая на N, является геодезической N.

[[Используйте результат предыдущей задачи или вариационное описание геодезической.]]

7.15. **Экспоненциальное отображение и локальное существование кратчайших.**

Задача 7.99. Если рассмотреть $(\exp_p)^{-1}$ в достаточно малой окрестности p, то получаются *геодезические координаты* в окрестности точки. Докажите, что в этих координатах символы Кристоффеля обращаются в нуль в точке p.

[[Из уравнения геодезической в координатах и того, что все прямые через начало координат в геодезической системе координат являются геодезическими следует, что для любого k и любого вектора v в начале координат выполняется $\sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} v^i v^j = 0$. Далее воспользуйтесь свойством отсутствия кручения в виде $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.]]

Задача 7.100. Докажите теорему **??**, проверив, что функция $x \mapsto \arccos(x \cdot x_0)$ имеет на единичной сфере единичный градиент.

[[Утверждение сводится к нахождению кратчайших кривых на сфере, среди всех спрямляемых кривых между двумя точками. После проверки единичности градиента действуйте, как в доказательстве леммы **??**. Чтобы иметь оценку длины для любых спрямляемых кривых на сфере, используйте их липшицевость и возможность применять формулу Ньютона–Лейбница из теоремы **??**.]]

Задача 7.101. Докажите, что для любой натурально параметризованной отрезком геодезической существует $\delta > 0$ такое, что любой её кусок длины не более δ является кратчайшим.

[[Используйте предыдущую лемму и компактность отрезка.]]

Задача 7.102. Докажите, что если две точки риманова многообразия соединены кратчайшей спрямляемой кривой, то это кривая — геодезическая.

[[Параметризуйте спрямляемую кривую натуральным параметром, тогда она станет липшицевой в смысле римановой метрики. Заметьте, что в координатных картах координаты кривой тоже будут зависеть от натурального параметра локально липшицевым образом. Тогда теорема **??** покажет, что у кривой существует скорость почти всюду и её координаты интегрируемы. Объясните, что неравенство с интегралом в доказательстве леммы **??** проходит и проходит доказательство следствия **??**.]]

Задача 7.103. Докажите, что на (полу)римановом многообразии M для любой гладкой функции f выражение $\operatorname{hess} f = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f$ (*гессиан* функции f) линейно относительно умножения векторных полей X и Y на гладкие функции и симметрично относительно перестановки X и Y.

[[C^∞-линейность по X очевидна. Симметричность последует из отсутствия кручения для ковариантной производной. Линейность по Y тогда последует из возможности переставить X и Y.]]

Задача 7.104. Докажите, что на (полу)римановом многообразии M для любой гладкой функции f и геодезической γ вторая производная композиции $f \circ \gamma$ равна $\operatorname{hess} f(\dot\gamma, \dot\gamma)$.

[[Примените определение гессиана и уравнение геодезической.]]

Задача 7.105. Докажите, что любая точка риманова многообразия имеет геодезически выпуклую окрестность.

[[Возьмите любую функцию f с минимумом $f(p) = 0$ в данной точке $p \in M$ и положительно определённым гессианом в этой точке, а значит, и в некоторой её окрестности. Рассмотрите окрестности $U \ni p$, заданные неравенством $f(q) \leqslant \varepsilon$ для достаточно малых положительных ε, чтобы утверждение леммы **??** выполнялось в несколько большей окрестности p.]]

Задача 7.106. На полуримановом многообразии нет понятия кратчайшей, поэтому утверждение предыдущей задачи не имеет смысла. Сформулируйте правильный аналог этого утверждения в полуримановом случае.

7.16. **Полнота и геодезическая полнота, глобальное существование кратчайших.**

Задача 7.107. Докажите, что если риманово многообразие полно в своей внутренней метрике, то любое равномерно ограниченное векторное поле X (в смысле ограниченности $g(X, X)$) на нём имеет интегральные кривые, определённые для всех $t \in (-\infty, +\infty)$.

[[Рассуждайте аналогично доказательству предыдущей теоремы.]]

Задача 7.108. * Докажите, что на каждом многообразии без края можно ввести полную риманову метрику.

[[Попробуйте использовать разбиение единицы, позаботившись о достаточно быстром росте метрики «на бесконечности»; или используйте теорему Уитни о вложении.]]

Задача 7.109. * Докажите, что любое компактное подмногообразие S, вложенное в многообразие M, имеет *трубчатую окрестность* U и гладкое отображение (*ретракцию*) $r : U \to S$, для которого $r|_S = \mathrm{id}_S$.

[[Возьмите многообразие $N_M S$, составленное из пар (p, v), где $p \in S$, а вектор v в точке p касательный к M и перпендикулярный S. Экспоненциальное отображение можно рассматривать как гладкое отображение $\exp : N_S M \to M$. Проверьте, что оно является диффеоморфизмом в окрестности S, то есть для достаточно малых v. Ретракцию получите как композицию обратного к этому отображению и естественной проекции $N_M S \to S$. Заметьте, что r будет также *метрической проекцией* на S, сопоставляющей каждой точке U единственную ближайшую к ней точку S.]]

7.17. **Кривизна римановых многообразий.**

Задача 7.110. Напишите выражения для координат тензора кривизны Римана через символы Кристоффеля.

[[Примените определение к базисным векторным полям $\frac{\partial}{\partial x_i}$, помня, что $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$. Должно получиться

$$R_{ijk}^\ell = \frac{\partial \Gamma_{jk}^\ell}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^\ell}{\partial x_j} + \sum_m \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^\ell - \sum_m \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^\ell.$$

]]

Задача 7.111. Проверьте, что выражение $\nabla_X Y$ не является тензором по Y. Приведите пример, когда в одной системе координат все символы Кристоффеля обращаются в нуль, а в другой — нет.

Задача 7.112 (Вторая ковариантная производная). Проверьте, что выражение $\nabla_{X,Y}^2 Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z$ (аналогичное гессиану из задачи 7.103) является «тензором по X и Y», то есть умножается на функцию, при умножении на эту функцию одного из векторных полей X или Y. Проверьте, что оно не симметрично по X, Y и что $R_{X,Y} Z = \nabla_{X,Y}^2 Z - \nabla_{Y,X}^2 Z$.

[[Используйте правило Лейбница для ковариантной производной и отсутствие кручения.]]

Задача 7.113. Пусть векторы X и Y непараллельны в точке p и продолжены до коммутирующих векторных полей в окрестности p. Докажите что при переносе вектора Z по контуру маленького параллелограмма около точки p с направлениями сторон X и Y он меняется на

$$\frac{-R_{X,Y} Z}{\sqrt{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}} A + o(A),$$

где A — площадь параллелограмма.

[[Продолжите вектор Z с помощью связности по левой стороне параллелограмма, а потом с помощью связности продолжите его слева направо. Продолжите вектор T с помощью связности по правой стороне параллелограмма, а потом продолжите его справа налево. Заметьте, что при этом в правой части формулы для $\int_\gamma g(\nabla_{\dot\gamma} Z, T)\, dt$ останется только интеграл от формы кривизны.]]

Задача 7.114. Докажите, что при тождественном равенстве нулю тензора кривизны (полу)риманова многообразия результат переноса вектора вдоль кривой не меняется при гомотопиях кривой и в окрестности каждой точки многообразия существует система координат, в которой компоненты g постоянны.

[[Рассмотрите гомотопию между кривыми как поверхность с координатами u, v из некоторого прямоугольника, продолжения векторов до векторных полей сделайте как в предыдущей задаче. Перенося независимо от пути векторы из данной точки в её односвязную окрестность, получите базис векторных полей $X_1, \ldots, X_n$ в этой окрестности, которые $\pm$-ортонормированы в любой точке и ковариантная производная любого из них по любому вектору равна нулю. Докажите, что векторные поля $X_1, \ldots, X_n$ попарно коммутируют, и найдите в некоторой окрестности данной точки систему координат, в которой эти векторные поля равны $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$.]]

Задача 7.115. Докажите первое тождество Бьянки:

$$R_{X,Y} Z + R_{Y,Z} X + R_{Z,X} Y = 0.$$

[[Можно продолжить векторы до попарно коммутирующих векторных полей и применить отсутствие кручения для коммутирующих векторных полей в виде $\nabla_X Y = \nabla_Y X$.]]

Задача 7.116. Докажите, что форма кривизны Римана

$$R(X, Y, Z, T) = g(R_{X,Y} Z, T)$$

меняет знак при перестановке X и Y, меняет знак при перестановке Z и T и не меняется при обмене пар X, Y и Z, T.

[[Считая векторные поля попарно коммутирующими, можно из совместимости ∇ с метрикой и формулы Козюля получить выражение

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, T) = \\ = \frac{1}{2} X(Z(g(Y, T))) + \frac{1}{2} Y(T(g(X, Z))) - \frac{1}{2} X(T(g(Y, Z))) - \frac{1}{2} Y(Z(g(X, T))) + \\ + g(\nabla_X Z, \nabla_Y T) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X T), \end{aligned}$$

которое имеет требуемые свойства симметрии с учётом коммутирования векторных полей.]]

Задача 7.117. Получите выражения для координат формы кривизны Римана

$$R(X, Y, Z, T) = g(R_{X,Y} Z, T)$$

через координаты g.

[[Подставьте базисные векторные поля $\frac{\partial}{\partial x_i}$ в формулу из предыдущей задачи. Должно получиться

$$R^i_{jk\ell} = \frac{\partial \Gamma^i_{j\ell}}{\partial x_k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x_\ell} + \Gamma^i_{km} \Gamma^m_{jk} - \Gamma^i_{\ell m} \Gamma^m_{jk}.$$

]]

Задача 7.118. * Докажите, что форма кривизны Римана полностью определяется значениями $R(X, Y, X, Y)$ на всевозможных парах векторов X, Y.

[[Пусть V — касательное пространство в какой-то точке, так как в форму кривизны подставляется не более четырёх векторов, достаточно рассмотреть не более чем четырёхмерный случай. Исходя из свойств симметрии форма кривизны может считаться симметричной билинейной формой $\widetilde{R}$ на $\wedge^2(V)$, которая в силу известных свойств билинейных форм определяется своими значениями на парах ξ, ξ для всевозможных $\xi \in \wedge^2(V)$. Проверьте, что при $\dim V \leqslant 3$ все ξ имеют вид $X \wedge Y$ и тогда утверждение доказано. Проверьте, что при $\dim V = 4$ в виде $X \wedge Y$ представляются те и только те ξ, которые удовлетворяют квадратичному соотношению $\xi \wedge \xi = 0$. Это означает, что R определяется своими значениями на наборах вида X, Y, X, Y с точностью до выражения, пропорционального $\det(X, Y, Z, T)$. Далее можно использовать тождество Бьянки, чтобы показать, что пропорциональные $\det(X, Y, Z, T)$ выражения можно исключить.]]

Задача 7.119 (Уравнение Якоби). Докажите, что если имеется гладкое семейство геодезических $\{\gamma_s\}$, то производная $J = (\gamma_s)'_s$ является при данном значении s векторным полем J вдоль $\gamma = \gamma_s$, удовлетворяющим линейному дифференциальному уравнению (со второй производной в смысле ковариантного дифференцирования по кривой)

$$\ddot{J} = -R_{J,\dot{\gamma}} \dot{\gamma}.$$

[[Поясните возможность сделать предположение $[J, V] = 0$ для векторного поля V, равного $\dot{\gamma}_s$ на геодезических, и написать формулы

$$0 = \nabla_J 0 = \nabla_J \nabla_V V = R_{J,V} V + \nabla_V \nabla_J V = R_{J,V} V + \nabla_V \nabla_V J = R_{J,V} V + \ddot{J}.$$

]]

Задача 7.120. Объясните, почему определение тензора кривизны Риччи на зависит от выбора взаимных базисов $\{e_i\}$ и $\{f_i\}$.

Задача 7.121. * Докажите, что в трёхмерном случае риманову кривизну можно восстановить по тензору Риччи.

[[Можно проделать манипуляции в явном виде, а можно воспользоваться задачей 7.118.]]

Задача 7.122. Для метрики на области $D \subset \mathbb{R}^2$ вида

$$g(X,Y) = e^{2U}(X,Y),$$

где $U : D \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, а (X,Y) — евклидово скалярное произведение, найдите тензор кривизны Римана.

[[Для упрощения вычислений все векторные поля можно считать имеющими постоянные коэффициенты в данной системе координат, и в частности коммутирующими друг с другом. В таких предположениях формула Козюля сокращается до

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)),$$

а постоянство векторных полей позволяет её расписать как (скобки обозначают евклидово скалярное произведение)

$$2e^{2U}(\nabla_X Y, Z) = 2X(U)e^{2U}(Y,Z) + 2Y(U)e^{2U}(Z,X) - 2Z(U)e^{2U}(X,Y),$$

что упрощается до

$$(\nabla_X Y, Z) = X(U)(Y,Z) + Y(U)(Z,X) - Z(U)(X,Y),$$

или эквивалентно (с градиентом в евклидовом смысле)

$$\nabla_X Y = X(U)Y + Y(U)X - (X,Y)\,\mathrm{grad}\,U.$$

Рассмотрев поля $X = \frac{\partial}{\partial x}$ и $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ тогда можно получить

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X = U'_x Y + U'_y X, \quad \nabla_X X = U'_x X - U'_y Y, \quad \nabla_Y Y = -U'_x X + U'_y Y$$

и в итоге

$$\begin{aligned} R_{X,Y}X = \nabla_X \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_X X = U''_{xx} Y + U''_{yx} X - U''_{xy} X + U''_{yy} Y + \\ + U'_x(U'_x X + U'_y Y) + U'_y(U'_x X - U'_y Y) - U'_x(U'_x X + U'_y Y) + U'_y(-U'_x X + U'_y Y) = \\ = U''_{xx} Y + U''_{yy} Y + 0 = \Delta U \cdot Y, \end{aligned}$$

что с учётом симметрий тензора Римана даёт для произвольных векторов

$$R(X,Y,Z,T) = g(R_{X,Y}Z,T) = \Delta U e^{-2U}\left(g(X,Z)g(Y,T) - g(X,T)g(Y,Z)\right).$$

]]

Задача 7.123 (Формула Гаусса для кривизны подмногообразия). Пусть N является вложенным подмногообразием в римановом многообразии M, а риманова структура на N индуцирована римановой структурой на M, как в задаче 7.89. Докажите, для векторных полей X, Y, Z, T, касательных к N, форма кривизны R^N многообразия N выражается через форму кривизны R^M многообразия M и вторую фундаментальную форму II_N подмногообразия как

$$R^N(X,Y,Z,T) = R^M(X,Y,Z,T) - g(\mathrm{II}_N(X,Z), \mathrm{II}_N(Y,T)) + g(\mathrm{II}_N(Y,Z), \mathrm{II}_N(X,T)).$$

[[Предположите, что векторные поля коммутируют на N и продолжены до коммутирующих полей на окрестности N в M. Первое слагаемое в выражении $R(X,Y,Z,T)$ перепишите как

$$g(\nabla_X \nabla_Y Z, T) = X(g(\nabla_Y Z, T)) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X T)$$

и посмотрите, что в нём меняется при замене ∇^M на ∇^N, с учётом ортогональности X, Y, Z, T любому вектору вида $\mathrm{II}_N(\cdot,\cdot)$. Сделайте то же самое со вторым слагаемым.]]

Задача 7.124 (Формула Гаусса для кривизны двумерной поверхности в евклидовом пространстве). Докажите, что все компоненты формы кривизны двумерного вложенного подмногообразия $N \subset \mathbb{R}^3$ с индуцированной стандартным скалярным произведением римановой структурой равны плюс или минус детерминанту её второй фундаментальной формы, который называется *гауссова кривизна*. Проверьте, что в терминах задачи 7.90 гауссова кривизна поверхности N равна

$$G = (r''_{uu} \cdot \nu)(r''_{vv} \cdot \nu) - (r''_{uv} \cdot \nu)^2.$$

[[Используйте симметрии формы кривизны, чтобы показать, что все её компоненты выражаются через одно число. Потом используйте предыдущую задачу и задачу 7.90.]]

7.18. **Пространство-время специальной теории относительности.**

Задача 7.125. Докажите, что множество времениподобных векторов распадается на две компоненты связности, их можно назвать направленными в будущее и в прошлое.

Задача 7.126 (Обратное неравенство Коши–Буняковского). Докажите, что в $\mathbb{R}^{1+3}$ для двух времениподобных векторов X, Y выполняется

$$g(X, Y)^2 \geqslant g(X, X) \cdot g(Y, Y).$$

[[Вспомните доказательство неравенства Коши–Буняковского и инвариантности сигнатуры квадратичной формы.]]

Задача 7.127. Докажите, что отношение между точками x и y «$x - y$ является направленным в будущее вектором» порождает отношение частичного порядка.

Задача 7.128. Докажите, что времениподобные многообразия в $\mathbb{R}^{1+3}$ имеют размерность не более 1, а пространственноподобные — не более 3.

[[Вспомните про инвариантность индекса квадратичной формы.]]

Задача 7.129. Докажите, что времениподобное многообразие в $\mathbb{R}^{1+3}$ не может быть диффеоморфно окружности.

Задача 7.130. Докажите, что времениподобные прямые максимизируют $\int_\gamma \sqrt{|g(\dot\gamma, \dot\gamma)|}\, dt$ (*собственное время частицы*) среди всех времениподобных кривых, соединяющих две данные точки.

[[Выведите обратное неравенство треугольника из обратного неравенства Коши–Буняковского.]]

Задача 7.131. Докажите аккуратно, что сохранение прямых и их равномерной параметризации влечёт аффинность изометрий $\mathbb{R}^{1+3}$.

Задача 7.132. Напишите параметрическое уравнение движения в двумерной плоскости $\mathbb{R}^{1+1}$ с постоянной скоростью и постоянным ускорением.

[[Заметьте, что символы Кристоффеля равны нулю и ускорение считается в координатах как вторая производная по параметру s. Обратите внимание, что постоянство скорости и ускорения понимается в смысле квадратичной формы $g = -dt \otimes dt + dx \otimes dx$. Сначала найдите зависимость скорости от параметра s, а потом проинтегрируйте её.]]

Задача 7.133. Докажите, что группа Лоренца может перевести любой направленный в будущее единичный вектор в любой другой направленный в будущее единичный вектор.

[[В силу наличия композиции и взятия обратного в группе достаточно доказать, что вектор $(1, 0, 0, 0)$ можно перевести в любой направленный в будущее единичный вектор. Полезно выписать координаты такого линейного преобразования из $\mathrm{O}(1, 3)$ явно.]]

Задача 7.134. Докажите, что любой «почти ортонормированный» базис, в котором $g(e_i, e_j) = \pm\delta_{ij}$, можно группой Лоренца перевести в любой другой такой же базис.

[[Заметьте, что при переводе вектора с данными координатами в одном базисе в вектор с теми же координатами в другом базисе получается изометрия.]]

Задача 7.135. Докажите, что группа Лоренца имеет четыре компоненты связности.

[[Рассмотрите детерминант преобразования и возможную смену прошлого на будущее. Докажите также, что преобразования единичного детерминанта, не меняющие местами прошлое и будущее, составляют связную подгруппу.]]

Задача 7.136. * Заметьте, что множество всевозможных направлений световых лучей из начала координат в $\mathbb{R}^{1+3}$ диффеоморфно двумерной сфере. Проверьте, что при введении на ней римановой структуры из представления её в виде решения системы уравнений

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, t = 1,$$

преобразования группы Лоренца оказываются *конформными*, то есть сохраняют риманову структуру с точностью до умножения на функцию.

[[Заметьте, что на световом конусе $\{t^2 = x^2 + y^2 + z^2\}$ возникает вырожденная риманова структура, вырожденная вдоль световых лучей, проходящих через нуль. При этом на любой двумерной поверхности в этом конусе, которая пересекает каждый световой луч ровно один раз и не касается световых лучей, эта риманова структура уже не является вырожденной. Докажите, что центральная проекция одной такой поверхности на другую конформна относительно их римановых структур.]]

Задача 7.137. Найдите сигнатуру квадратичной формы $Q(A) = \det A$ на пространстве V эрмитовых матриц 2×2. Выпишите какой-нибудь ортогональный базис в V относительно квадратичной формы Q.

Задача 7.138. В условиях предыдущей задачи проверьте, что формула $A \mapsto T^*AT$ даёт изометрии Q для любой комплексной матрицы T размера 2×2 с единичным детерминантом. У построенного таким образом гомоморфизма групп $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{O}(1, 3)$ опишите ядро и образ.

7.19. **Движение в электромагнитном поле, уравнения Максвелла.**

Задача 7.139. Проверьте, что уравнение (**??**) критической кривой функционала, по аналогии с рассуждением для уравнения геодезической.

[[Слагаемое уравнения движения в виде $g(\ddot{\gamma}, X)$ мы уже получали из первой части действия в теореме **??**. Второе слагаемое получится из производной Ли формы α и формулы Картана.]]

Задача 7.140. Проверьте, что для решения уравнения (**??**) оказывается $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \mathrm{const}$.

[[Рассмотрите $L_{\dot{\gamma}}(g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})) = 2g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 2g(\ddot{\gamma}, \dot{\gamma})$.]]

Задача 7.141. Найдите действие звёздочки Ходжа на формах $dx \wedge dt$, $dy \wedge dt$, $dz \wedge dt$, $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$, $dx \wedge dy$ в $\mathbb{R}^{1+3}$.

Задача 7.142. Выпишите уравнения для градиента и дивергенции векторного поля в стандартных координатах $\mathbb{R}^{1+3}$. Проверьте, есть ли отличия от случая евклидова пространства $\mathbb{R}^4$.

Задача 7.143. Выразите уравнение $d(*F) = j$ через дивергенцию и ротор (по пространственным координатам) в $\mathbb{R}^{1+3}$.

7.20. **Уравнения Эйлера–Лагранжа для классических полей.**

7.21. Вывод уравнения Эйнштейна из действия Эйнштейна–Гильберта.

Задача 7.144. Проверьте, что в двумерном случае уравнение Эйнштейна тривиально. Выведите отсюда, что интеграл скалярной кривизны по замкнутому двумерному многообразию не зависит от выбора его римановой структуры.

[[Вспомните, что любые две римановы структуры g и g' можно соединить между собой выпуклыми комбинациями $(1-t)g + tg'$.]]

Задача 7.145. * Проверьте, что условие равенства нулю вариации действия Эйнштейна–Гильберта по не имеющей кручения ковариантной производной равносильно тому, что ковариантная производная совместима с (полу)римановой структурой.

[[В одну сторону утверждение проверено в лемме **??**. В обратную сторону надо проверить, во что сворачивается квадратичная часть вариации $A(X, A(Y,Z)) - A(Y, A(X,Z))$. В координатах это будет выражение $\sum_{i,j,k,m} g^{kj}(A^i_{im}A^m_{jk} - A^i_{jm}A^m_{ik})$. Если это выражение окажется невырожденной квадратичной формой, то вариация может обратиться в нуль только при $A = 0$ (что соответствует совместимой с g ковариантной производной). Для анализа в одной точке можно считать $g^{kj} = \pm\delta_{kj}$ и рассматривать выражение $\sum_{i,j,m} \pm_j (A^i_{im}A^m_{jj} - A^i_{jm}A^m_{ij})$.

От этой квадратичной формы отделяется прямое слагаемое, соответствующее переменным A^m_{ij} с попарно различными индексами i, j, m, которое в свою очередь распадается на слагаемые, в которых невырожденно входят по три координаты A^m_{ij}, отличающиеся циклическими перестановками (i, j, m).

Оставшаяся часть квадратичной формы разбивается на части, нумеруемые тем индексом из i, j, m, которой не равен двум другим. Каждое такое слагаемое уже можно явно проанализировать и обнаружить, что при условии $A^k_{ij} = A^k_{ji}$ (отсутствие кручения) оно будет невырожденным.]]

7.22. Модельные пространства римановой геометрии.

Задача 7.146 (Стереографическая проекция). Докажите, что центральная проекция из полюса (точки $(1, 0, \dots, 0)$) сферы $\mathbb{S}^n$ на гиперплоскость $\{x_0 = 0\}$ задаёт систему координат на сфере без одной точки, в которой её риманова структура имеет вид

$$g = \frac{4dx_1 \otimes dx_1 + 4dx_2 \otimes dx_2 + \dots + 4dx_n \otimes dx_n}{(1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^2}.$$

[[Заметьте, что стереографическая проекция сохраняет углы между касательными векторами, то есть должна переводить метрику на сфере с метрику евклидова пространства с точностью до умножения на функцию. Найдите эту функцию, рассмотрев одномерную подсферу, проходящую через полюс.]]

Задача 7.147. Докажите, что на единичной двумерной сфере сферический двуугольник, образованный двумя половинами больших окружностей с углом φ между ними, имеет площадь 2φ.

[[Используйте вращение вокруг ребра двуугольника, которое сохраняет площадь поверхности сферы. Это даёт доказательство для рациональных φ/π, остальные случаи получаются предельным переходом.]]

Задача 7.148. Докажите, что на единичной двумерной сфере сферический треугольник с внутренними углами α, β, γ имеет площадь

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

[[Продолжите стороны треугольника до больших окружностей, которые разобьют сферу на восемь треугольников, которые разбиваются на центрально-симметричные пары. Запишите уравнения на общую площадь сферы и на площади возникающих на картинке двуугольников.]]

Задача 7.149. Выведите определение тензора кривизны сферы произвольной размерности из задачи 7.118 и информации о кривизне двумерной сферы.

Задача 7.150. Докажите, что если изометрия связного риманова многообразия M оставляет на месте одну точку p и действует на касательном пространстве T_pM тождественно, то она сама является тождественным отображением.

[[Используйте экспоненциальное отображение для доказательства локальной тождественности, далее используйте связность.]]

Задача 7.151. Докажите, что группа $\mathrm{O}(n+1)$ даёт все изометрии $\mathbb{S}^n$, а группа $\mathrm{O}^+(1,n)$ — подгруппа $\mathrm{O}(1,n)$, не меняющая местами связные компоненты гиперболоида — даёт все изометрии $\mathbb{H}^n$.

[[Сделайте композицию какой-то изометрии φ с линейной изометрией φ так, чтобы эта композиция $\varphi\circ\psi$ оставляла не месте некоторую точку сферы/гиперболического пространства и не меняла касательные векторы в этой точке. Примените результат предыдущей задачи.]]

Задача 7.152 (Координаты Пуанкаре). Докажите, что центральная проекция из точки $(-1,0,\dots,0)$ на гиперплоскость $\{x_0=0\}$ задаёт систему координат на гиперболическом пространстве (со значениями в единичном открытом шаре), в которой риманова структура имеет вид

$$g=\frac{4dx_1\otimes dx_1+4dx_2\otimes dx_2+\dots+4dx_n\otimes dx_n}{(1-x_1^2-\dots-x_n^2)^2}.$$

[[Как и в задаче про стереографическую проекцию сферы, удобно сначала доказать сохранение углов, то есть *конформность* данного отображения.]]

Задача 7.153. Выпишите явный вид геодезических в натуральной параметризации на сфере и в гиперболическом пространстве (как в гиперповерхностях в $\mathbb{R}^{n+1}$).

[[Используя симметрии сферы и гиперболического пространства, покажите, что геодезическая обязана лежать в том же двумерном линейном подпространстве объемлющего $\mathbb{R}^{n+1}$, где лежат её начальная точка и начальная скорость. Для сферы после этого нетрудно выписать явную формулу, а для гиперболического пространства надо понять, зачем нужны функции $\operatorname{ch} t$ и $\operatorname{sh} t$ вместо обычных косинуса и синуса.]]

Задача 7.154. * Проверьте, что в гиперболическом пространстве любой отрезок геодезической является кратчайшей.

[[Убедитесь, что гиперболическое пространство геодезически полно и его экспоненциальное отображение является диффеоморфизмом всего касательного пространства в точке на всё $\mathbb{H}^n$. Проверьте, что рассуждения из доказательства леммы **??** тогда работают не только для малой окрестности точки, но и для всего пространства.]]

7.23. **Пространства де Ситтера и метрика Шварцшильда.**

Задача 7.155. Докажите, что в части пространства де Ситтера $\mathrm{d}\mathbb{S}^4$, выделенной условием $x_4>0$, в системе координат $x_0/x_4, x_1/x_4, x_2/x_4, x_3/x_4$ все геодезические этого пространства являются прямыми линиями. По Ньютону такая система координат должна называться *инерциальной*, так как частицы, взаимодействующие только с гравитационным полем, движутся в ней равномерно и прямолинейно.

[[Докажите, что любое двумерное линейное подпространство $P\subset\mathbb{R}^{n+1}$ в пересечении с $\mathrm{d}\mathbb{S}^4$ даёт геодезическую или пару геодезических.]]

Задача 7.156. Напишите выражение для метрики $\widetilde{\mathrm{Ad}\mathbb{S}}^{n+1}$ в координатах $(t, x_1, \ldots, x_n)$.

Задача 7.157. Докажите, что в части анти-пространства де Ситтера $\mathrm{Ad}\mathbb{S}^4$, выделенной условием $u > 0$, в системе координат $v/u, x_1/u, x_2/u, x_3/u$ все геодезические являются прямыми линиями.

[[Аналогично задаче про пространство де Ситтера.]]

Задача 7.158. Возьмите интеграл и посчитайте радиальное расстояние в метрике Шварцшильда.

Задача 7.159. Определите в метрике Шварцшильда поведение световых лучей, идущих в радиальном направлении.

[[Положите $\vartheta = \pi/2, \varphi = 0$ и решите уравнение

$$-\frac{r-\rho}{r}dt^2 + \frac{r}{r-\rho}dr^2 = 0.$$

]]

Задача 7.160. Множитель $1 - \rho/r$ в формуле метрики Шварцшильда соответствует, после извлечения из него квадратного корня, замедлению собственного времени для наблюдателя, находящего на поверхности Земли, по сравнению с наблюдателем, находящимся дальше от Земли. Оцените, сильнее ли этот эффект эффекта замедления собственного времени от движения спутника на круговой орбите для низкой околоземной орбиты и для геостационарной орбиты.

[[Учтите, что $\rho = 2GM/c^2$ в реальных единицах, а замедление собственного времени при движении со скоростью v описывается формулой $\sqrt{1 - v^2/c^2}$.]]

Задача 7.161. * Определите радиальное движение объектов положительной массы (то есть геодезические с $g(\dot\gamma, \dot\gamma) < 0$) в метрике Шварцшильда. Покажите, что за конечное собственное время движущийся к центру объект уходит в зону $t = +\infty$. Это говорит о том, что метрика Шварцшильда требует какого-то продолжения за пределы координатной карты, в которой она определена.

[[Варьируйте функционал действия $\int_\gamma g(\dot\gamma, \dot\gamma)\ ds$ (здесь $\dot\gamma$ обозначает производную по параметру s, не путать с производной по «времени» в координатах Шварцшильда t). Инвариантность относительно сдвига t даст закон сохранения энергии.]]

Задача 7.162. ** Изучите движение объектов положительной массы в метрике Шварцшильда, если они движутся в плоскости $\vartheta = \pi/2$. Посчитайте величину эффектов отклонения световых лучей и смещения перигелия орбиты.

[[Можно напрямую варьировать функционал действия $\int_\gamma g(\dot\gamma, \dot\gamma)\ ds$. Его варьирование по времени t и углу поворота φ даст законы сохранения энергии и углового момента:

$$\frac{r-\rho}{r}\frac{dt}{ds} = \mathrm{const}, \quad r^2\frac{d\varphi}{ds} = \mathrm{const}.$$

Варьирование по координате r даст уравнение второго порядка, которое надо будет изучать.]]

7.24. **Площадь поверхности по Минковскому.**

Задача 7.163. Найдите риманов объём единичной сферы $\mathbb{S}^n$.

[[Наверное проще всего будет это сделать, рассмотрев ε-окрестность единичного шара в $\mathbb{R}^{n+1}$, которая сама является шаром радиуса $1 + \varepsilon$, и применив формулу (**??**).]]

Задача 7.164. * Посчитайте риманов объём ε-окрестности точки (метрического шара радиуса ε) во внутренней метрике сферы и во внутренней метрике гиперболического пространства.

[[Заметьте, что можно представить n-мерный объём как интеграл $(n-1)$-мерных объёмов $\mathrm{vol}_n U_\varepsilon = \int_0^\varepsilon \mathrm{vol}_{n-1} \partial U_t \, dt$ по соображениям, аналогичным формуле Минковского. Из симметричности сферы и гиперболического пространства следует, что $\partial U(t)$ изометрично стандартной $(n-1)$-мерной сфере некоторого радиуса, который остаётся выразить через t.]]

Задача 7.165. Для ориентированной компактной гладкой поверхности N в $\mathbb{R}^3$ рассмотрим её сдвиг N_t, в котором каждая точка $r \in N$ заменяется на $r + t\nu$, где ν является ориентирующей нормалью в точке r. Докажите, что для производной риманова объёма N_t при достаточно малых t выполняется формула

$$\frac{d}{dt} \mathrm{vol}\, N_t = -\int_{N_t} \mathrm{tr}\, \mathrm{II}_{N_t} \, d\,\mathrm{vol}\, N_t.$$

[[Формулу достаточно доказать при $t = 0$. Также полезно связать производные $\frac{d\nu}{du}$ и $\frac{d\nu}{dv}$ с II_N в явном виде, или вспомнив формулы из задачи 7.90.]]

7.25. **Неравенство Брунна–Минковского и изопериметрическое неравенство.**

Задача 7.166. Докажите, что функция $A \mapsto (\det A)^{1/n}$ вогнута на положительно определённых симметричных матрицах размера $n \times n$.

[[Вогнутость функции по определению означает вогнутость её ограничения на любую прямую. Для состоящей из симметричных матриц прямой сделайте ортогональную замену координат, чтобы все матрицы на этой прямой стали одновременно диагональными.]]

Задача 7.167 (Изодиаметрическое неравенство). Докажите, что максимум объёма множества в $\mathbb{R}^n$ данного диаметра достигается на шаре.

[[Сведите вопрос к открытым множествам. Возьмите множество X и сложите по Минковскому с множеством $-X$, переформулируйте неравенство $\mathrm{diam}\, X \leqslant d$ в терминах $X - X$.]]

Задача 7.168. Назовём *выпуклым полиэдром* множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, заданное системой линейных неравенств

$$x \cdot \nu_1 \leqslant c_1, \ldots, x \cdot \nu_m \leqslant c_m.$$

Для определённости будем считать векторы ν_i единичными. Докажите, что среди ограниченных выпуклых полиэдров с фиксированными векторами ν_i и фиксированным объёмом минимальную площадь поверхности имеют те, у которых $c_1 = \cdots = c_m$, и их сдвиги.

[[Действуйте как в доказательстве изопериметрического неравенства, но сумму Минковского берите не с шаром радиуса r, а с выпуклым полиэдром, заданном неравенствами

$$x \cdot \nu_1 \leqslant r, \ldots, x \cdot \nu_m \leqslant r.$$

]]

Задача 7.169 (Логарифмическая вогнутость). Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ называется *логарифмически вогнутой*, если для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $0 < t < 1$ выполняется

$$f((1-t)x + ty) \geqslant f(x)^{1-t} f(y)^t.$$

Докажите, что если логарифмически вогнутую функцию n переменных проинтегрировать по одной переменной, то получится логарифмически вогнутая функция $(n-1)$ переменной (или $+\infty$).

[[Воспользуйтесь рассуждениями из доказательства функционального неравенства Брунна–Минковского.]]

8. Гармонический анализ

8.1. Пространства L_p, неравенства Гёльдера и Минковского.

Задача 8.1. Докажите, что расстояние между двумя абсолютно интегрируемыми функциями конечно.

[[Проинтегрируйте неравенство $|f(x) - g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)|$.]]

Задача 8.2. Докажите, что норма в $L_1(X)$ не зависит от выбора класса эквивалентности.

[[Примените неравенство треугольника $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$ или разбейте интеграл на два: по множеству, где функции отличаются и по множеству, где они не отличаются.]]

Задача 8.3. Проверьте, что если выпуклой функции разрешено принимать значение $+\infty$, то множество точек, на котором значения этой функции конечны, является выпуклым.

Задача 8.4. Докажите, что если в семействе функций $f_\alpha : V \to \mathbb{R}$, $\alpha \in A$, все функции выпуклые, то

$$f(x) = \sup\{f_\alpha(x) \mid \alpha \in A\}$$

тоже выпуклая, если разрешить в определении выпуклости значение $+\infty$.

[[Заметьте, что супремум суммы не превосходит суммы супремумов. Или заметьте, что выпуклость функции нескольких переменных по определению означает выпуклость всех её ограничений на прямые, а значит утверждения типа этой леммы достаточно проверить для функций одной переменной, например, нарисовав для себя убедительный рисунок.]]

Задача 8.5. Докажите, что для измеримых функций и чисел $p, q > 0$, таких что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, имеет место формула

$$\|f\|_p = \sup\left\{\int_X |fh|\,dx \;\middle|\; \|h\|_q \leqslant 1\right\}, \tag{8.1}$$

Задача 8.6. Выведите неравенство Минковского из задач 8.4 и 8.5.

Задача 8.7. Сформулируйте достаточное условие выпуклости дважды непрерывно дифференцируемой функции нескольких переменных.

[[Вспомните про ограничение функции на прямые.]]

Задача 8.8. Пусть $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — возрастающая выпуклая функция. Докажите, что функция $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, заданная формулой $f_n(x) = f(|x|)$, тоже выпуклая.

[[Начните с выпуклости функции $|x|$ на $\mathbb{R}^n$.]]

Задача 8.9 (Неравенство Йенсена для конечных сумм). Докажите, что если функция $f : V \to \mathbb{R}$ на некотором векторном пространстве V выпуклая, то для любого набора $v_1, \dots, v_N \in V$ и неотрицательных коэффициентов $t_1, \dots, t_N$, таких что $t_1 + t_2 + \dots + t_N = 1$, выполняется

$$f(t_1v_1 + \dots + t_Nv_N) \leqslant t_1f(v_1) + \dots + t_Nf(v_N).$$

[[Используйте индукцию по N.]]

Задача 8.10. Докажите, что если функция f определена на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^n$ и выпукла, то она непрерывна на U.

[[Рассмотрите точку $x_0 \in U$ и докажите ограниченность сверху f в её окрестности с помощью неравенства Йенсена. Далее примените определение выпуклости для доказательства ограниченности снизу и равномерной непрерывности f в меньшей окрестности x_0.]]

Задача 8.11. Докажите, что если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выпукла, то она представляется в виде супремума некоторого семейства линейных функций.

[[Обратите внимание, что при $x_- < x_0 < x_+$ выполняется неравенство $\frac{f(x_0)-f(x_-)}{x_0-x_-} \leqslant \frac{f(x_+)-f(x_0)}{x_+-x_0}$. Выведите из этого, что существует линейная функция $\ell(x)$, такая что $f(x) \geqslant \ell(x)$ везде и равенство выполняется при $x = x_0$.]]

Задача 8.12. Докажите, что если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выпукла, а $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ абсолютно интегрируема, то выполняется неравенство

$$\int_0^1 f(g(x))\,dx \geqslant f\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right).$$

[[Представьте f в виде супремума семейства линейных функций и обратите внимание, что интеграл супремума не менее супремума интегралов.]]

Задача 8.13. Положительная функция на выпуклом множестве C называется *логарифмически выпуклой*, если её логарифм выпуклый, то есть

$$f((1-t)x + ty) \leqslant f(x)^{1-t} \cdot f(y)^t$$

при любых $x, y \in C$, $t \in (0,1)$. Докажите, что сумма логарифмически выпуклых функций логарифмически выпукла и что по сути это утверждение эквивалентно неравенству Гёльдера.

[[Заметьте, что достаточно рассматривать функции одной переменной на промежутке. Проверьте, что функция логарифмически выпукла тогда и только тогда, когда она является супремумом семейства функций вида ab^x. Для сумм функций такого вида неравенство логарифмической выпуклости является неравенством Гёльдера.]]

Задача 8.14. Докажите, что функция $\operatorname{tr} e^A$ логарифмически выпукла на множестве симметричных линейных операторов $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

[[Можно заметить, что при прибавлении к A скалярного оператора λI_n рассматриваемая функция умножается на константу. Это позволяет свести вопрос к положительно определённым A, после этого логарифмическую выпуклость можно проверять на прямой $(1-t)A + tB$ с положительно определёнными A и B, приведя их одновременно к диагональному виду.]]

8.2. **Полнота пространств L_p.**

Задача 8.15. Покажите на примере, что сходимость в $L_p(X)$ может не означать поточечной сходимости ни в одной точке.

[[Рассмотрите последовательность ступенек высоты 1, у которых мера основания стремится к нулю, но при этом ступеньки бесконечно много раз пробегают по множеству X.]]

Задача 8.16. Пусть последовательность (f_n) сходится в $L_p(X)$ к функции $f : X \to \mathbb{R}$ и одновременно сходится поточечно к функции $g : X \to \mathbb{R}$. Докажите, что $f = g$ почти всюду.

[[Обратите внимание, что в доказательстве теоремы **??** установлено, что некоторая подпоследовательность (f_{n_k}) сходится к f не только в $L_p(X)$, но и почти всюду.]]

8.3. **Приближения функций в L_p ступенчатыми и бесконечно гладкими.**

Задача 8.17. Докажите, что если измеримое множество $X \subset \mathbb{R}^n$ ограничено, то любую $f \in L_p(X)$ можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить ограниченным на X многочленом.

[[Используйте теорему Стоуна–Вейерштрасса.]]

Задача 8.18 (Непрерывность сдвига в пространстве L_p). Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Докажите, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)|^p \, dx \to 0 \text{ при } |t| \to 0.$$

[[Сначала докажите утверждение для гладкой функции с компактным носителем, используя её равномерную непрерывность. Потом приблизьте произвольную функцию $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ гладкой с компактным носителем и воспользуйтесь неравенством Минковского.]]

8.4. **Ограниченная вариация.**

Задача 8.19. Докажите неравенство треугольника $\|f+g\|_B \leqslant \|f\|_B + \|g\|_B$ для функций на отрезке.

Задача 8.20. Докажите, что если функция ограниченной вариации непрерывна в точке x_0 (а в других точках может быть и разрывна), то функции u и d из приведённого выше доказательства тоже непрерывны в точке x_0.

[[Посмотрите внимательно на доказательство теоремы **??**.]]

Задача 8.21. Докажите, что если функция имеет ограниченную вариацию на интервале (a,b), то она имеет конечные пределы $f(a+0)$ и $f(b-0)$, и после доопределения на концах интервала по непрерывности будет иметь ту же вариацию на $[a,b]$.

[[Используйте критерий Коши.]]

Задача 8.22. Докажите, что функция ограниченной вариации на отрезке интегрируема по Риману.

[[Можно воспользоваться разложением в сумму монотонных, или можно напрямую оценить взвешенную сумму колебаний.]]

Задача 8.23. Докажите, что если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию на всей прямой, то для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)| \, dx \leqslant \|f\|_B \cdot |t|.$$

[[Можно воспользоваться разложением в сумму монотонных, или можно разбить интеграл на интегралы по отрезкам длины $|t|$ и применить определение вариации.]]

Задача 8.24. Докажите, что если функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ является равномерным пределом последовательности функций (f_n), то $\|f\|_B \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|f_n\|_B$. Приведите пример, когда неравенство строгое.

[[Используйте определение вариации для доказательства неравенства. Для построения примера строгого неравенства используйте приближение слабо колеблющейся функции сильно колеблющимися.]]

Задача 8.25. Докажите предыдущую формулу для оценки интеграла $\int_a^b f(x)g(x)\, dx$.

[[Вычтите из g значение $g(a)$, оставшееся разложите на возрастающую и убывающую части.]]

8.5. **Абсолютная непрерывность, обобщённая формула Ньютона–Лейбница и обобщённое интегрирование по частям.**

Задача 8.26. Докажите, что абсолютно непрерывная на отрезке функция имеет на нём ограниченную вариацию.

[[Проверьте, что на любом отрезке длины δ вариация функции будет не более ε (δ и ε взяты из определения), потом вспомните про аддитивность вариации (лемма **??**).]]

Задача 8.27. Докажите, что функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна тогда и только тогда, когда она может быть сколь угодно близко в B-норме приближена кусочно-линейными функциями.

[[Переформулируйте это в терминах производных.]]

Задача 8.28. * Докажите, что если определённая на отрезке непрерывная функция f почти всюду имеет неотрицательную производную, а в оставшемся множестве меры нуль имеет конечную нижнюю производную, то она возрастает.

[[Действуя аналогично доказательству теоремы **??** с помощью леммы Безиковича, для любого натурального n на любом отрезке $[a, b]$, на котором $f(b) < f(a)$, найдите подотрезок $[c, d] \subseteq [a, b]$, такой что $f(d) - f(c) < -n(d - c)$. Предположив отсутствие возрастания f, сконструируйте последовательность вложенных отрезков $[c_n, d_n]$ с растущими числами n в предыдущем неравенстве. Покажите, что тогда в общей точке этих отрезков нижняя производная функции f равна $-\infty$.]]

Задача 8.29. * Докажите, что если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ имеет производную в каждой точке (в обычном смысле) и $f' \in L_1[a, b]$, то f абсолютно непрерывна и выполняется формула Ньютона–Лейбница $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\ dx$.

[[Достаточно доказать неравенство $f(b) - f(a) \geqslant \int_a^b f'(x)\ dx$ и применить его к $-f(x)$ тоже. Для этого можно функцию $g(x) = f'(x)$ обрезать сверху по числу M, получив g_M, доказать неравенство $f(b) - f(a) \geqslant \int_a^b g_M(x)\ dx$, и перейти к пределу $M \to +\infty$ по теореме о монотонной сходимости. Для доказательства последнего неравенства попробуйте применить результат предыдущей задачи к функции $f(x) - \int_a^x g_M(t)\ dt$.]]

8.6. **Борелевские меры на отрезках, интеграл Лебега–Стилтьеса.**

Задача 8.30. Проверьте, что определение меры μ_g с промежутков корректно распространяется до конечно-аддитивной меры на всех элементарных подмножествах отрезка.

[[Проверьте, что происходит с этой мерой при разбиении одного промежутка на несколько.]]

Задача 8.31. Докажите, что описанной мере, сосредоточенной на канторовом множестве, соответствует функция распределения, решающая задачу 5.75.

Задача 8.32. * Докажите, что для g ограниченной вариации

$$\left| \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leqslant \|g\|_B \cdot \|f\|_C.$$

Задача 8.33. Докажите, что последовательность функций $g_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, которые равномерно ограничены и имеют равномерно ограниченную вариацию, имеет поточечно сходящуюся подпоследовательность.

[[По лемме **??** достаточно рассматривать монотонные функции g_n. Переходом к подпоследовательности нетрудно добиться сходимости в одной точке, с помощью достаточно аккуратных рассуждений можно добиться сходимости в счётном множестве точек, например во всех рациональных точках отрезка. Это позволяет идентифицировать предельную функцию с точностью до значений в счётном множестве точек, далее надо ещё раз сделать переход к подпоследовательности.]]

Задача 8.34. * Докажите, что в условиях предыдущей задачи невозможно утверждать, что переход к некоторой подпоследовательности (g_{n_k}) позволит добиться сходимости последовательности интегралов

$$\int_a^b f dg_{n_k}$$

для любой ограниченной борелевской f.

[[Контрпример можно построить на возрастающих функциях распределения g_n, принимающих только значения 0 и 1.]]

8.7. **Осцилляция и убывание коэффициентов Фурье.**

Задача 8.35. Можно было доказать лемму об осцилляции другим способом, с помощью приближения функции элементарно ступенчатой. Проверьте, что для элементарно ступенчатой функции g выполняется $c_g(y) = O(1/y)$.

[[Проверьте это для одной ступеньки.]]

Задача 8.36. Проверьте, что функция ограниченной вариации на всей прямой $\mathbb{R}$ имеет конечные пределы на бесконечности.

[[Используйте аддитивность вариации и критерий Коши существования конечного предела.]]

Задача 8.37. Докажите, что если у 2π-периодической функции ограниченной вариации есть ненулевое конечное число разрывов и она кусочно абсолютно непрерывна, то оценка $O(1/n)$ для её коэффициентов Фурье неулучшаема.

[[Интегрированием по частям получите формулу (с суммой по точкам разрыва f)

$$c_n(f) = \frac{1}{in}\left(c_n(f') + \frac{1}{2\pi}\sum_{x_i}(f(x_i+0) - f(x_i-0))e^{-inx_i}\right)$$

и докажите, что сумма в скобках не стремится к нулю при $n \to \infty$. Последнее удобнее доказывать, сведя к случаю, когда один из x_i равен нулю.]]

Задача 8.38. * Постройте пример непрерывной 2π-периодической функции ограниченной вариации, у которой оценка $O(1/n)$ на коэффициенты Фурье неулучшаема.

[[Модифицируйте подходящим образом функцию распределения меры из задачи 8.31. В выражении для коэффициента Фурье перейдите к интегрированию e^{-inx} по соответствующей борелевской мере на отрезке и, используя самоподобие меры, докажите, что некоторое ненулевое значение коэффициента Фурье этой меры (интеграла от e^{-inx} по мере) повторяется бесконечно много раз.]]

Задача 8.39. Найдите порядок убывания коэффициентов Фурье функции $f(x) = \sqrt{|x|}$ на $[-\pi, \pi]$.

[[Запишите выражения для коэффициента Фурье в явном виде и замените nx на новую переменную, потом проинтегрируйте по частям.]]

8.8. **Сходимость ряда Фурье в среднеквадратичном.**

8.9. **Равномерная и поточечная сходимость тригонометрического ряда Фурье.**

Задача 8.40. Получите формулы для коэффициентов Фурье $a_n(f), b_n(f)$ для разложения по вещественным тригонометрическим функциям $1, \sin x, \cos x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$

[[Должно получиться

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \\ a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \\ b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \end{aligned}$$

]]

Задача 8.41. Выразите коэффициенты Фурье 2π-периодической функции $c_n(f)$ через $a_n(f), b_n(f)$ и наоборот.

Задача 8.42 (Признак Дирихле сходимости ряда Фурье в точке). Докажите, что если абсолютно интегрируемая 2π-периодическая функция непрерывна в точке x и имеет ограниченную вариацию в окрестности x, то её ряд Фурье сходится к её значению в x.

[[Заметьте, что по результату задачи 8.20 при представлении функции в виде суммы монотонных полученные монотонные функции тоже будут непрерывны в точке x. Далее заметьте, что непрерывности в одной точке достаточно для анализа сходимости ряда Фурье именно в этой точке.]]

Задача 8.43 (Признак Липшица сходимости ряда Фурье в точке). Докажите, что если абсолютно интегрируемая 2π-периодическая функция f удовлетворяет условию Гёльдера в точке x, то есть выполняется $|f(x+t) - f(x)| \leqslant C|t|^{\alpha}$ для достаточно малых t и фиксированных положительных C и α, то её ряд Фурье сходится к её значению в x.

[[Заметьте, что приведённое выше доказательство равномерного варианта работает.]]

Задача 8.44 (Признак Дини сходимости ряда Фурье в точке). Докажите сходимость ряда Фурье к значению функции в точке x, если интеграл

$$\int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|\,dt$$

сходится.

[[Замените $\sin t/2$ на t в знаменателе интеграла в свёртке с ядром Дирихле с помощью второй теоремы о среднем.]]

Задача 8.45 (Сходимость ряда Фурье в точке при наличии разрывов первого рода). Проверьте, что если 2π-периодическая и абсолютно интегрируемая на отрезке $[-\pi,\pi]$ функция имеет конечные пределы $f(x-0)$ и $f(x+0)$ в некоторой точке x, то верна формула:

$$T_n(f,x) - \frac{1}{2}\left(f(x-0)+f(x+0)\right) = \\ = \int_0^{\pi}(f(x-t)-f(x-0))D_n(t)\,dt + \int_0^{\pi}(f(x+t)-f(x+0))D_n(t)\,dt.$$

Выведите из этого варианты признаков Липшица, Дирихле и Дини для сходимости ряда Фурье в точке x к значению $\frac{1}{2}\left(f(x-0)+f(x+0)\right)$.

[[В признаке Липшица условие Гёльдера в виде $|f(x \pm t) - f(x \pm 0)| \leqslant C|t|^\alpha$ можно применить точно так же, как в непрерывном случае. В признаке Дирихле достаточно предположить ограниченную вариацию в окрестности x и по отдельности разложить выражения $f(x+t)-f(x+0)$ и $f(x-t)-f(x-0)$ в суммы монотонных функций, стремящихся к нулю при $t \to +0$, а потом вынести монотонные функции за интеграл с помощью второй теоремы о среднем. В признаке Дини интегрируемость выражений $\int\limits_0^\delta \frac{|f(x\pm t)-f(x\pm 0)|}{|t|}\,dt$ вместе с леммой об осцилляции сразу даст нужный результат.]]

8.10. **Интегрирование ряда Фурье, разложение котангенса и косеканса на элементарные дроби и формула дополнения для бета-функции.**

Задача 8.46. Докажите, что если две функции $f, g \in L_1[-\pi, \pi]$ имеют одинаковые коэффициенты Фурье по тригонометрической системе, то они почти всюду равны.

[[Попробуйте интегрировать разность $f - g$.]]

Задача 8.47. Предположим, что последовательность (a_n) убывает и стремится к нулю. Докажите, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

равномерно сходится на отрезке $[\delta, 2\pi - \delta]$ для любого положительного δ. Приведите пример, когда нет равномерной сходимости на всём периоде $[-\pi, \pi]$.

[[Напишите $\cos nx = \frac{\sin(n+1/2)x - \sin(n-1/2)x}{2\sin x/2}$ и примените признак Дирихле равномерной сходимости ряда **??**. Пример достаточно привести с расходимостью в нуле.]]

Задача 8.48. Предположим, что последовательность (b_n) убывает и стремится к нулю. Докажите, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

равномерно сходится на отрезке $[\delta, 2\pi - \delta]$ для любого положительного δ. Приведите пример, когда нет равномерной сходимости на $[-\pi, \pi]$.

[[Напишите $\sin nx = \frac{\cos(n-1/2)x - \cos(n+1/2)x}{2\sin x/2}$ и примените признак Дирихле равномерной сходимости ряда **??**. При построении примера неравномерной сходимости примените критерий Коши равномерной сходимости ряда.]]

Задача 8.49. Докажите, что выражение

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

не является рядом Фурье никакой $f \in L_1[-\pi, \pi]$.

[[Что будет, если мы его проинтегрируем?]]

Задача 8.50. * Докажите, что выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$$

при $\alpha > 0$ является рядом Фурье некоторой $f \in L_1[-\pi, \pi]$.

[[Проверьте, что ряд сходится поточечно к некоторой 2π-периодической f по признаку Дирихле. Разбив его на две суммы, $n \leqslant 1/x$ и $n > 1/x$, убедитесь, что его частичные суммы ограничены по модулю некоторой неотрицательной функцией $g \in L_1[-\pi, \pi]$. Примените теорему об ограниченной сходимости для обоснования того, что $f \in L_1[\pi, \pi]$, и что исходное выражение является рядом Фурье f.]]

Задача 8.51. Разложите функцию, заданную формулой $\cos ax$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ при $a \notin \mathbb{Z}$, в ряд Фурье. Выведите из полученного выражения формулы:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} x &= v.p. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x - \pi k} \\ \frac{1}{\sin x} &= v.p. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x - \pi k} \\ \sin x &= x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right). \end{aligned}$$

Задача 8.52. Докажите *формулу дополнения* для бета-функции при $p \in (0, 1)$:

$$B(p, 1-p) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{-p}\,dt = \frac{\pi}{\sin \pi p}.$$

[[С помощью замены переменной напишите

$$B(p, 1-p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{-p}}{1+x}\,dx.$$

Разложите в сумму $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ и переставьте сумму с интегралом по теореме о монотонной сходимости (это можно, если считать бесконечную сумму пределом частичных сумм с чётным количеством слагаемых). Потом воспользуйтесь одним из равенств в предыдущей задаче. Другое доказательство этой формулы см. в разделе ??.]]

Задача 8.53. Докажите формулу для $0 < |x| < \pi$

$$\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x = \sum_{n,k \geqslant 1} \frac{2x^{2k-1}}{\pi^{2k} n^{2k}},$$

выведите из неё значения сумм $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

[[Используйте разложение котангенса на элементарные дроби из задачи 8.51.]]

Задача 8.54. Найдите интеграл

$$\int_0^1 \ln \Gamma(p)\,dp.$$

[[Используйте формулу дополнения.]]

8.11. **Суммирование тригонометрических рядов по Фейеру.**

Задача 8.55. * Докажите, что для $f \in L_1[-\pi, \pi]$

$$S_n(f, x) \to f(x)$$

в смысле сходимости в $L_1[-\pi, \pi]$ (то есть в смысле сходимости в среднем).

[[Запишите интеграл от $|S_n(f, x) - f|$ и оцените его с помощью непрерывности сдвига в L_1-норме. Или заметьте, что L_1-норма суммы Фейера $S_n(f, x)$ не более L_1-нормы самой f, и это позволяет использовать приближения f в среднем непрерывными функциями.]]

Задача 8.56. Посчитайте сумму для $r \in [0, 1)$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} e^{ikx}.$$

[[Вспомните про сумму геометрической прогрессии.]]

Задача 8.57. * Пусть последовательность $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ положительных чисел убывает, стремится к нулю и выпукла (в смысле $a_{n-1} - 2a_n + a_{n+1} \geqslant 0$ при $n \geqslant 1$). Докажите, что сумма

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

неотрицательна (в некоторых точках может быть $+\infty$).

[[Воспользуйтесь преобразованием Абеля для рядов и обнаружьте ядро Фейера.]]

8.12. **Интеграл Фурье и вычисление интеграла Дирихле.**

Задача 8.58. Выведите формулу для интеграла Дирихле из того, что для ядра Дирихле ряда Фурье $D_n(x)$ при любом $\delta > 0$ выполняется (частный случай принципа локализации)

$$\int_{-\delta}^{\delta} D_n(x)\, dx \to 1, \quad n \to \infty.$$

[[Вынесите из интеграла близкое к единице выражение $\frac{x}{2\sin x/2}$ по второй теореме о среднем и замените переменную $y = (n + 1/2)x$.]]

8.13. **Равномерная сходимость несобственного интеграла.**

Задача 8.59 (Непрерывность равномерно сходящегося интеграла по параметру). Докажите, что равномерно сходящийся несобственный интеграл (**??**) непрерывен по параметру y, если подынтегральная функция $f(x, y)$ непрерывна по переменной y и ограничена не зависящей от y функцией $g(x)$, $|f(x, y)| \leqslant g(x)$, имеющей конечные интегралы на всех отрезках $[a, \beta] \subset [a, b)$.

[[До перехода к пределу в определении несобственного интеграла примените теорему об ограниченной сходимости, во время перехода к пределу $\beta \to b - 0$ примените теорему **??**.]]

Задача 8.60 (Дифференцирование равномерно сходящегося интеграла по параметру). Пусть интеграл

$$I(y) = \int_a^{*b} f(x, y)\, dx$$

сходится хотя бы в одной точке $y \in (c, d)$, а интеграл

$$J(y) = \int_a^{*b} f'_y(x, y)\, dx$$

сходится равномерно по $y \in (c, d)$. Предположим также, что выполняется неравенство $|f'_y(x, y)| \leqslant g(x)$ для некоторой функции g, имеющей конечные интегралы на всех отрезках $[a, \beta] \subset [a, b)$. Докажите, что тогда $I(y)$ сходится равномерно по $y \in (c, d)$ и $I'(y) = J(y)$.

[[Выберите последовательность $\beta_n \to b - 0$, рассмотрите соответствующие собственные интегралы $I_n(y)$ и $J_n(y)$, примените к ним дифференцирование интеграла Лебега и теорему **??** при $n \to \infty$.]]

Задача 8.61 (Признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла). Пусть найдётся константа M, такая что при любом $\beta \in (a, b)$ и $y \in Y$

$$\left| \int_a^\beta f(x, y)\ dx \right| \leqslant M,$$

а функция g монотонно стремится к нулю при $x \to b - 0$ равномерно по $y \in Y$. Докажите, что

$$\int_a^{*b} f(x, y) g(x, y)\ dx$$

сходится равномерно по $y \in Y$.

[[Проверьте, что доказательство «неравномерного» варианта ?? через вторую теорему о среднем работает и в этом случае.]]

Задача 8.62 (Признак Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла). Пусть интеграл

$$\int_a^{*b} f(x, y)\ dx$$

сходится равномерно по $y \in Y$, а функция g монотонна по x и ограничена некоторой константой, $|g(x, y)| \leqslant M$, для любых $x \in (a, b)$ и $y \in Y$. Докажите, что

$$\int_a^{*b} f(x, y) g(x, y)\ dx$$

сходится равномерно по $y \in Y$.

[[Проверьте, что доказательство «неравномерного» варианта ?? через вторую теорему о среднем работает и в этом случае.]]

Задача 8.63. Сведите вычисление интеграла Дирихле через интеграл

$$I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-yx} \sin x}{x}\ dx$$

к результатам предыдущих задач.

8.14. **Сходимость интеграла Фурье, преобразование Фурье и его свойства.**

Задача 8.64. Докажите, что если коэффициент Фурье $c_f(y)$ лежит в $L_1(\mathbb{R})$ как функция от y, то интеграл Фурье $T_h(f, x)$ сходится равномерно по $x \in \mathbb{R}$ при $h \to +\infty$.

[[Оцените разность $T_h(f, x) - T_{+\infty}(f, x)$ с помощью непрерывности интеграла Фурье.]]

Задача 8.65. Приведите пример функции $f \in L_1(\mathbb{R})$, у которой преобразование Фурье $\hat{f}$ не лежит в $L_1(\mathbb{R})$.

[[Попробуйте характеристическую функцию отрезка.]]

Задача 8.66. Установите, как преобразуется $\hat{f}$, если f преобразуется сдвигом

$$(T_t^* f)(x) = f(x + t).$$

Задача 8.67. Установите, как преобразуется $\hat{f}$, если f преобразуется гомотетией

$$(H_k^* f)(x) = f(kx).$$

Задача 8.68. Как отличить преобразование Фурье $\hat{f}$ действительнозначной функции f от преобразований Фурье комплекснозначных функций, при условии выполнения формулы обращения для преобразования Фурье?

Задача 8.69. Докажите, что функция вида $P(x)e^{-x^2/2}$, где $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, при преобразовании Фурье переходит в функцию того же вида, причём степень многочлена не повышается.

[[Используйте производную преобразования Фурье.]]

8.15. Пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ и преобразование Фурье.

Задача 8.70. Проверьте, что функция $e^{-x^2/2}$ лежит в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Задача 8.71. Проверьте, что указанные полунормы $\|\cdot\|_{n,k}$ в ограничении на пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ являются нормами, то есть из равенства нулю одной такой нормы для некоторой функции следует равенство нулю функции.

Задача 8.72. Проверьте по определению, что пересечение конечного числа открытых подмножеств $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ является открытым.

Задача 8.73. Проверьте, что любая базовая открытая окрестность $f_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ является открытым множеством по определению.

[[Обоснуйте и используйте неравенство треугольника для полунорм. Полезно также с помощью результата предыдущей задачи свести вопрос к предбазовой окрестности.]]

Задача 8.74. Проверьте непрерывность преобразования Фурье на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ по Коши — что для любой базовой окрестности $U \ni F[f_0]$ найдётся базовая окрестность $V \ni f_0$, такая что $F(V) \subseteq U$.

[[Сначала убедитесь, что достаточно доказать непрерывность для случая, когда U — предбазовая окрестность.]]

Задача 8.75 (Формула суммирования Пуассона). Докажите для функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ формулу

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

[[Рассмотрите 2π-периодическую функцию

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2\pi n),$$

разложите её в ряд Фурье, обоснуйте его сходимость к g и примените соответствующее равенство.]]

8.16. Унитарность преобразования Фурье и его продолжение на L_2.

Задача 8.76. Посчитайте следующие интегралы с помощью унитарности преобразования Фурье:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx.$$

Задача 8.77 (Соотношение неопределённостей для преобразования Фурье). Докажите, что для любой функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ и любых двух чисел $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\|(x - x_0)f(x)\|_2 \cdot \|(y - y_0)\hat{f}(y)\|_2 \geqslant \frac{1}{2}\|f\|_2^2.$$

Выясните, в каком случае выполняется равенство.

[[Сдвигом функции на $-x_0$ сведите к случаю $x_0 = 0$, проверив, что происходит при сдвиге f с её преобразованием Фурье. Сдвигом $\hat{f}(y)$ на $-y_0$ сведите к случаю $y_0 = 0$. В этом частном случае с помощью теоремы **??** перепишите неравенство в виде

$$\|xf(x)\|_2 \cdot \|f'\|_2 \geqslant \frac{1}{2}\|f\|_2^2$$

и докажите его с помощью неравенства Коши–Буняковского. Для анализа случая равенства вспомните условия равенства в неравенстве Коши–Буняковского.]]

Задача 8.78. Докажите, что для любой монотонной функции $\omega : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, такой что $\lim_{t\to+0} \omega(t) = 0$, найдётся функция $f \in L_2(\mathbb{R})$, такая что

$$\varlimsup_{h\to 0} \frac{\|T_h f - f\|_2}{\omega(|h|)} = +\infty,$$

где $T_h f(x) = f(x - h)$ — оператор сдвига.

[[Посмотрите, какая операция соответствует операции сдвига T_h для образа f при преобразовании Фурье.]]

8.17. Ряд и интеграл Фурье в точках разрыва 1-го рода и явление Гиббса.

Задача 8.79. Докажите, что при суммировании ряда Фурье по Фейеру явление Гиббса отсутствует, то есть при нахождении значений функции в выпуклом компакте $Y \subset \mathbb{C}$ значения её сумм Фейера не выходят за пределы Y.

[[Используйте неотрицательность ядра Фейера.]]

8.18. Многомерный интеграл Фурье и гауссовы плотности.

Задача 8.80 (Многомерная лемма Римана об осцилляции). Докажите, что если $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то интегралы

$$c_f(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot y}\, dx$$

стремятся к нулю при $|y| \to +\infty$.

[[Аналогично одномерному случаю, приблизьте функцию в среднем гладкой функцией с компактным носителем. Для гладкой функции с компактным носителем воспользуйтесь формулой

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot y}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} df_x(y) \frac{e^{-ix\cdot y}}{i|y|^2}\, dx.$$

]]

Задача 8.81. Докажите, что если $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ имеет частную производную $g = \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то для коэффициентов Фурье этих двух функций выполняется соотношение

$$c_g(y) = iy_i c_f(y).$$

[[Для начала заметьте, что по теореме Фубини у любой функции из $L_1(\mathbb{R}^n)$ ограничения на почти каждую прямую, параллельную оси $0x_i$, лежат в $L_1(\mathbb{R})$. Применив это наблюдение к f и g одновременно, можно с помощью результата задачи 8.29 интегрировать по частям выражение для коэффициента Фурье g по переменной x_i для почти всех значений оставшихся переменных, а потом интегрировать результат по оставшимся переменным.]]

Задача 8.82. Докажите, что существование у f частных производных до $n+1$ порядка включительно, лежащих в $L_1(\mathbb{R}^n)$, достаточно для абсолютной интегрируемости её коэффициента Фурье.

[[Используя результат предыдущей задачи, выведите из существования $(n+1)$-ых производных у f тот факт, что $P(y)c_f(y)$ стремится к нулю на бесконечности для любого многочлена $P(y)$ степени не более $n+1$. Выведите отсюда оценку вида

$$|c_f(y)| \leqslant \frac{C}{1 + (|x_1| + \dots + |x_n|)^{n+1}}$$

и конечность интеграла от $|c_f(y)|$.]]

8.19. **Пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и преобразование Фурье.**

Задача 8.83. Найдите преобразование Фурье функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f = e^{-Q(x)}$, где $Q(x)$ — положительно определённая квадратичная форма.

[[Аккуратно сделайте замену переменных $x = S'x$ и вспомните, какая замена переменной y будет ей соответствовать.]]

Задача 8.84. * Найдите преобразование Фурье функции $e^{-|x|}$ на $\mathbb{R}^n$.

[[Рассмотрите меры с плотностями $\rho_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\rho_n(x) = \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{n+1}{2}}$. Заметьте, что при проекции мер $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ (то есть при интегрировании плотностей по одной координате) плотность ρ_n преобразуется в $B(1/2, n/2)\rho_{n-1} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\rho_{n-1}$. Это позволит заключить, что преобразование Фурье ρ_n с точностью до некоторой явной константы можно выразить через одномерное преобразование Фурье функции $\rho_1 = \frac{1}{1+x^2}$. Найдите это одномерное преобразование Фурье и используйте многомерную формулу обращения Фурье.]]

Задача 8.85. Докажите, что преобразование Фурье функции из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ можно представить как композицию преобразований Фурье по каждой переменной.

[[Заметьте, что быстрое убывание функций из $\mathcal{S}$ гарантирует их абсолютную интергрируемость по любому набору переменных. Интегрируйте в определении преобразования Фурье последовательно по переменным x_i.]]

Задача 8.86. Докажите, что преобразование Фурье переводит $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в себя.

[[Заметьте, что быстрое убывание функций из $\mathcal{S}$ гарантирует их абсолютную интегрируемость по любому набору переменных. Посчитайте производную преобразования Фурье в многомерном случае и используйте утверждение задачи 8.81 о преобразовании Фурье производной. Используйте эти формулы аналогично доказательству теоремы **??**.]]

Задача 8.87. Докажите, что преобразование Фурье $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ продолжается до унитарного оператора $F : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$.

[[Установите унитарность на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ как в одномерном случае. Заметьте, что $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L_2(\mathbb{R}^n)$ и продолжите операцию F с помощью фундаментальных в норме $\|\cdot\|_2$ последовательностей элементов $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.]]

Задача 8.88. Докажите, что при подходящем определении «частичного преобразования Фурье» с интегрированием по ограниченным подмножествам $\mathbb{R}^n$ частичные преобразования Фурье функции $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ сходятся в L_2-норме к её преобразованию Фурье, определённому в предыдущей задаче.

[[Проверьте работу рассуждений в доказательстве теоремы **??** в случае функций нескольких переменных.]]

8.20. **Свёртка и преобразование Фурье.**

Задача 8.89. Найдите преобразование Фурье функции одной переменной

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1 + x, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 0; \\ 0, & \text{если } |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

[[Заметьте, что $f = g * g$, где

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| \leqslant 1/2; \\ 0, & \text{если } |x| > 1/2. \end{cases}$$

]]

Задача 8.90. Докажите, что если преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ равно нулю, то f равна нулю почти всюду.

[[Заметьте, что для гладких функций в $L_1(\mathbb{R}^n)$ утверждение следует из обращения преобразования Фурье $f = F^{-1}[F[f]]$. Далее с помощью теоремы **??** приближайте произвольную $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ гладкими функциями $f * \varphi_k$ в среднем, проверив с помощью теоремы **??**, что $F[f * \varphi_k] = 0$.]]

Задача 8.91. Существует ли функция $f \in L_1(\mathbb{R})$, такая что для любой $g \in L_1(\mathbb{R})$ выполняется равенство $f * g = g$?

[[Посмотрите на преобразование Фурье.]]

Задача 8.92. Докажите, что для двух функций $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ свёртка $h = f * g$ определена, и $h(x)$ стремится к нулю при $x \to \infty$.

[[Используйте неравенство Коши–Буняковского и приближение функций в $L_2(\mathbb{R})$ бесконечно гладкими с компактными носителями.]]

Задача 8.93. Пусть функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на всей прямой. Докажите, что свёртка $\underbrace{f * \dots * f}_{k+2}$ будет k раз непрерывно дифференцируема.

[[Посмотрите на порядок убывания коэффициентов Фурье свёртки.]]

Задача 8.94 (Теорема Бохнера в одну сторону). Пусть преобразование Фурье функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ действительно и неотрицательно. Докажите, что для любого набора точек $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ матрица с элементами $a_{ij} = f(p_i - p_j)$ эрмитова и неотрицательно определена.

[[Заметьте, про преобразование Фурье $\hat{f}$ неотрицательно тогда и только тогда, когда оно является квадратом некоторой неотрицательной функции, и проверьте неотрицательную определённость a_{ij} по определению.]]

Задача 8.95. *(Теорема Бохнера в другую сторону) Докажите в обратную сторону, что если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ такова, что для любого набора точек $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ матрица с элементами $a_{ij} = f(p_i - p_j)$ эрмитова и неотрицательно определена, то преобразование Фурье $\hat{f}$ действительно и неотрицательно.

[[Переформулируйте свойство f в терминах её преобразования Фурье, потом используйте приближение функций тригонометрическими многочленами.]]

Задача 8.96. Пусть M — ориентированное многообразие, $\nu \in \Omega^n_c(M)$ — некоторая форма с компактным носителем, а $\varphi \in C^\infty(M)$ — фазовая функция. Докажите, что интеграл с параметром

$$\int_M e^{it\varphi(x)}\nu$$

при $t \to +\infty$ с точностью до быстро убывающих (быстрее любой степени t) слагаемых определяется значениями подинтегрального выражения в произвольно малой окрестности множества критических точек φ, то есть точек, где $d\varphi_x = 0$.

[[Для окрестности V множества критических точек φ рассмотрите компакт и сделайте разбиение единицы для $\operatorname{supp} \nu \setminus V$, $\rho_1 + \dots + \rho_N \equiv 1$ так, чтобы в окрестности носителя каждой ρ_i функцию φ можно было бы выбрать за одну из координат. Потом по теореме Фубини начните интегрирование слагаемого $\rho_i e^{it\varphi}\nu$ с этой координаты и в интеграле по этой координате сделайте преобразования типа:

$$\int a(\varphi)e^{it\varphi}\, d\varphi = \frac{i}{t}\int a'(\varphi)e^{it\varphi}\, d\varphi = \frac{i^2}{t^2}\int a''(\varphi)e^{it\varphi}\, d\varphi = \dots.$$

]]

Задача 8.97. ** В том же интеграле с параметром

$$\int_M e^{it\varphi(x)}\nu$$

получите выражение для вклада невырожденной критической точки φ с точностью до быстро убывающих слагаемых при $t \to +\infty$.

[[Примените лемму Морса 6.18 к φ, потом в соответствующих координатах рассмотрите $e^{it\varphi}$ как элемент $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, примените к нему преобразование Фурье и разложите по степеням $\frac{1}{t}$.]]

9. Функциональные пространства и распределения

9.1. **Банаховы пространства и теорема Бэра.**

Задача 9.1. Докажите, что свойства нормированного пространства (над полем $\mathbb{R}$) можно переформулировать в терминах единичного шара $B_0(1)$ так: единичный шар является центрально симметричным выпуклым множеством и пересекает любую проходящую через начало координат прямую по невырожденному отрезку.

Задача 9.2. Докажите, что свойства нормированного пространства (над полем $\mathbb{C}$) можно переформулировать в терминах единичного шара $B_0(1)$ так: единичный шар является центрально симметричным выпуклым множеством и пересекает любую проходящую через начало координат комплексную прямую по невырожденному кругу.

Задача 9.3. Докажите, что пространство $C[a,b]$ с нормой $\|\cdot\|_2$ не является полным.

[[Вспомните о приближениях любой функции в $L_2[a,b]$ по норме $\|\cdot\|_2$ непрерывными.]]

Задача 9.4. Докажите, что в конечномерном нормированном пространстве все нормы определяют одну и ту же топологию.

[[Докажите для двух норм $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ в конечномерном пространстве V неравенства

$$c\|v\|' \leqslant \|v\|'' \leqslant C\|v\|'$$

для любого $v \in V$ и фиксированных констант $c, C > 0$.]]

Задача 9.5. Докажите, что в любом бесконечномерном нормированном пространстве E найдётся последовательность (v_k), такая что $\|v_k\| = 1$ для любого k и $\|v_i - v_j\| \geqslant 1$ для любых $i \neq j$.

[[Возьмите флаг конечномерных подпространств $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$ и ищите $v_k \in V_k$ в параллельном V_{k-1} аффинном подпространстве на единичном расстоянии от V_{k-1}.]]

Задача 9.6. Докажите, что пространство функций ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$ с нормой $|f(a)| + \|f\|_B$ банахово.

[[Для начала обоснуйте, почему $|f(a)| + \|f\|_B$ является нормой. Далее проверьте наличие равномерного предела у любой фундаментальной в этой норме последовательности, проверьте что равномерный предел является пределом в данной норме, и что этот предел сам имеет ограниченную вариацию.]]

9.2. **Двойственное пространство, его норма и принцип равномерной ограниченности.**

Задача 9.7 (Явный пример расходимости ряда Фурье в точке). Докажите, что ряд Фурье непрерывной 2π-периодической функции

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin |2^{k^3} x|$$

расходится в нуле.

[[Выпишите коэффициенты Фурье по косинусам (в силу чётности функции надо рассматривать только их) и оцените их сумму, то есть значение суммы ряда Фурье в нуле. Обоснуйте и используйте то, что для функции вида $\sin m|x|$ значение суммы Фурье в нуле неотрицательно.]]

Задача 9.8. Существует ли непрерывная 2π-периодическая функция, суммы Фурье которой в точке 0 стремятся к ∞?

[[В случае бесконечности со знаком, вспомните про суммы Фейера. В случае бесконечности без знака, ограничьте слагаемые в ряде Фурье.]]

9.3. **Линейные отображения между банаховыми пространствами.**

Задача 9.9. Докажите, что для двух линейных отображений нормированных векторных пространств $f : E \to F$ и $g : F \to G$ и их композиции верно

$$\|g \circ f\| \leqslant \|g\| \cdot \|f\|.$$

[[Действуйте по определению нормы линейного отображения.]]

Задача 9.10. Докажите, что естественные вложения $C[a, b] \to L_2[a, b]$ и $L_2[a, b] \to L_1[a, b]$ непрерывны.

[[Установите соответствующие неравенства между нормами.]]

Задача 9.11. Докажите, что образ вложения $C[a, b] \to L_2[a, b]$ не замкнут.

[[Проверьте, что образ плотен в $L_2[a, b]$. Приведите пример функции в $L_2[a, b]$, которая не равна почти всюду никакой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции.]]

Задача 9.12. Проверьте, что без предположения о замкнутости $G \subset E$ на E/G возникает полунорма.

Задача 9.13. Докажите использованное неявно в доказательстве теоремы об изоморфизме утверждение о том, что замыкание выпуклого подмножества банахова пространства выпукло.

Задача 9.14. Докажите, что замкнутое подпространство V в банаховом пространстве E имеет замкнутое дополнение W, такое что $E = V \oplus W$ тогда и только тогда, когда существует непрерывная линейная проекция $P : E \to E$, такая что $P^2 = P$ и $P(E) = V$.

[[В одну сторону положите $V = \ker P$, проверьте замкнутость и свойство дополнения. В обратную сторону примените теорему об изоморфизме к композиции вложения $V \to E$ и проекции на факторпространство $E \to E/W$.]]

Задача 9.15. Докажите, что любое конечномерное подпространство V в банаховом пространстве E замкнуто.

[[Выведите полноту V из результата задачи 9.4. Докажите, что из полноты V следует его замкнутость в E.]]

Задача 9.16. Докажите, что если замкнутое подпространство V в банаховом пространстве E имеет конечную коразмерность (конечную размерность E/V), то существует линейная непрерывная проекция $P : E \to V$ на него.

[[Постройте дополнение к V и воспользуйтесь результатами задач 9.14 и 9.15.]]

Задача 9.17. Докажите, что пространство непрерывных линейных отображений $E \to F$ (обозначаемое $\mathcal{L}(E, F)$) является банаховым пространством с введённой здесь нормой. Проверьте, что для этого нужна полнота F, но не нужна полнота E.

[[Рассуждения аналогичны доказательству теоремы **??**.]]

Задача 9.18. Докажите, что изоморфизмы образуют открытое подмножество в $\mathcal{L}(E, F)$.

[[Заметьте, что умножение элементов $\mathcal{L}(E, F)$ на изоморфизмы $A : D \to E$ слева или $B : F \to G$ справа даёт изоморфизмы $L_A : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{L}(D, F)$ и $R_B : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{L}(E, G)$. Если множество изоморфизмов в $\mathcal{L}(E, F)$ не пусто, то сведите с помощью умножений задачу к утверждению, что окрестность тождественного изоморфизма $\mathrm{id}_E : E \to E$ состоит из изоморфизмов. Для элементов окрестности id_E вида $\mathrm{id}_E + B$ постройте обратные с помощью степенного ряда — геометрической прогрессии.]]

Задача 9.19 (Теорема Банаха–Штейнгауза для линейных отображений). Пусть семейство линейных отображений $Y \subset \mathcal{L}(E, F)$ между банаховыми пространствами ограничено в любой точке банахова пространства E, то есть для любого $x \in E$ множество чисел

$$\{\|A(x)\| \mid A \in Y\}$$

ограничено. Докажите, что тогда Y ограничено в смысле нормы в $\mathcal{L}(E, F)$.

[[Проверьте, что доказательство (теоремы **??**) для $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ проходит и в этом случае с небольшими изменениями.]]

Задача 9.20 (Расходимость ряда Фурье в среднем). Докажите, что существует функция $f \in L_1[-\pi, \pi]$, ряд Фурье которой расходится в норме L_1.

[[Докажите, что норма линейного отображения $L_1[-\pi, \pi] \to L_1[-\pi, \pi]$, заданного как $f \mapsto T_n(f, x)$, равна $\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt$. Далее примените теорему Банаха–Штейнгауза для линейных отображений.]]

Задача 9.21 (Теорема Мазура–Улама об изометрии). Докажите, что если сюръективное отображение банаховых пространств $f : E \to F$ сохраняет расстояния, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$, то оно является аффинным, то есть линейным после композиции со сдвигом.

[[Сначала докажите, что для центрально-симметричного замкнутого множества X в банаховом пространстве можно определить центр симметрии только в терминах расстояния, работая с банаховым пространством как с метрическим. А именно, определите $C(X)$ как множество точек $x \in X$, таких что $\|x - y\| \leqslant 1/2 \operatorname{diam} X$ для любой $y \in X$. Проверьте, что $C(X)$ замкнуто, $\operatorname{diam} C(X) \leqslant 1/2 \operatorname{diam} X$, и $C(X)$ содержит центр X, если X центрально симметрично. Тогда последовательность итераций $C(\dots(X)\dots)$ должна сходиться к центру X, если он есть.

После этого станет ясно, что центр симметрии X переходит в центр симметрии $f(X)$ при отображении f. Проверьте, что середина отрезка $1/2(x + y)$ между двумя точками может быть описана как центр симметрии множества $B_x(\|x-y\|/2) \cap B_y(\|x-y\|/2)$, а значит, $f(1/2(x+y)) = 1/2(f(x)+f(y))$. После композиции f со сдвигом можно считать, что $f(0) = 0$, тогда из свойства середин отрезков можно вывести $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Из этого можно вывести линейность f относительно умножения на рациональные числа, а по непрерывности — и относительно умножения на действительные числа.]]

Задача 9.22. Докажите, что существует не аффинное отображение банаховых пространств $f : E \to F$, которые сохраняет расстояния, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

[[Если нет требования сюръективности, то нетрудно сделать пример уже в случае $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, если в $\mathbb{R}^2$ взять норму $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$.]]

9.4. **Гильбертовы пространства и их базисы.**

Задача 9.23. Докажите что вещественное банахово пространство E является гильбертовым тогда и только тогда, когда для любых двух $x, y \in E$ выполняется тождество

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

[[Для гильбертова пространства тождество проверяется непосредственно. Для доказательства в другую сторону для начала объясните, почему утверждение достаточно доказать для двумерных банаховых пространств.]]

Задача 9.24. Проверьте, что ортогонализация Грама–Шмидта не меняет полноту и замкнутость системы векторов.

Задача 9.25 (Многочлены Лежандра с точностью до константы). Проверьте, что многочлены

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n,$$

$n \in \mathbb{Z}^+$, составляют ортогональную систему в $L_2[-1, 1]$. Докажите, что эта система полна в $L_2[-1, 1]$.

[[Проинтегрируйте произведение двух таких многочленов по частям для доказательства ортогональности. Для доказательства полноты объясните, почему любой другой многочлен можно выразить как линейную комбинацию многочленов Лежандра.]]

Задача 9.26. Докажите, что система функций $x^n e^{-x^2/2}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, полна в $L_2(\mathbb{R})$.

[[Достаточно проверить замкнутость системы и рассмотреть ситуацию, когда для некоторой $f \in L_2(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) x^n e^{-x^2/2}\, dx = 0$$

при всех n. Проверьте, что равенство

$$e^{iyx - x^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} x^n e^{-x^2/2}$$

можно рассматривать как верное в $L_2(\mathbb{R})$ для функций от x. Выведите отсюда, что преобразование Фурье функции $g(x) = f(x)e^{-x^2/2}$ всюду равно нулю, и что f и g почти всюду равны нулю, используя результат задачи 8.90.]]

Задача 9.27 (Многочлены Эрмита с точностью до константы). Проверьте, что если определить многочлены по формуле

$$H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$$

то функции Эрмита $H_n e^{-x^2/2}$ будут составлять ортогональную систему в $L_2(\mathbb{R})$.

[[Используйте интегрирование по частям для доказательства ортогональности или заметьте, что функции Эрмита являются собственными для некоторого самосопряжённого дифференциального оператора.]]

Задача 9.28. Существует ли бесконечно дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такая что для любого многочлена $P \in \mathbb{R}[x]$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)f(x)\, dx$$

конечен и равен нулю.

[[Посмотрите на преобразование Фурье функции f.]]

Задача 9.29. *(Безусловная сходимость) Докажите, что сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ элементов банахова пространства $v_k \in E$ существует и не зависит от порядка суммирования тогда и только тогда, когда для любой последовательности ε_k из ± 1 сумма $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k v_k$ сходится в E.

[[Аккуратно используйте критерий Коши для сходимости переставленных вариантов исходного ряда и ряда со знаками $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k v_k$.]]

Задача 9.30. Докажите, что ряды Фурье по ортогональным системам в гильбертовом пространстве сходятся безусловно в смысле предыдущей задачи.

[[Проверьте явно, меняются ли условия в теореме **??** при перестановке элементов ортогональной системы. Или используйте результат предыдущей задачи, если вы её решили.]]

Задача 9.31. Приведите пример, когда безусловная сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ элементов банахова пространства $v_k \in E$ не означает абсолютной сходимости, то есть $\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\| = +\infty$.

[[Может помочь результат предыдущей задачи.]]

Задача 9.32. *(Теорема Мюнца для L_2) Пусть (n_k) — строго возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел. Докажите, что система функций $\{x^{n_k} \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$ полна в $L_2[0,1]$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n_k} = +\infty$.

[[Выпишите расстояние от не входящей в систему функции x^n до линейной оболочки векторов $\langle x^{n_1}, \dots, x^{n_k}\rangle$ через определители матриц Грама систем $(x^{n_1}, \dots, x^{n_k})$ и $(x^n, x^{n_1}, \dots, x^{n_k})$. Получите формулу

$$\det\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{i,j=1}^{n} = \frac{\prod_{i<j}(a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod_{i,j}(a_i + b_j)}$$

через делимость многочленов от нескольких переменных или посчитав определитель по индукции. Применив выписанную формулу для определителя, убедитесь, что стремление расстояния от x^n до линейной оболочки $\langle x^{n_1}, \dots, x^{n_k}\rangle$ к нулю при $k \to \infty$ эквивалентно приведённой в условии задачи расходимости суммы.]]

Задача 9.33 (Теорема Мюнца для C). Пусть (n_k) — строго возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел. Докажите, что система функций $\{x^{n_k} \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$ полна в $C[0,1]$ тогда и только тогда, когда $n_1 = 0$ и $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n_k} = +\infty$.

[[Сведите к предыдущей задаче. Полнота в C очевидно влечёт полноту в L_2. Из полноты в L_2 данной системы функций выведите полноту системы первообразных данных функций в подпространстве $C[0,1]$, заданном условием $f(0) = 0$.]]

Задача 9.34. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие полноты системы функций вида $\{x^{n_k} \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$ в $C[-1,1]$, где (n_k) — возрастающая последовательность целых неотрицательных чисел.

[[Разложите функцию в сумму чётной и нечётной и приближайте их по отдельности.]]

9.5. **Изометричность гильбертовых пространств.**

Задача 9.35. Рассмотрим линейные операторы $A : H \to H$ в гильбертовом пространстве, которые сохраняют скалярное произведение, то есть для любых $x, y \in H$ оказывается $(Ax, Ay) = (x, y)$. Приведите пример, показывающий, что такой оператор не обязан быть обратимым.

[[Удобно построить такой оператор в пространстве ℓ_2.]]

Задача 9.36. * Приведите пример двух линейных подпространств V и W гильбертова пространства H, которые замкнуты, но их сумма $V + W$ не замкнута.

[[Постройте замкнутые линейные $V, W \subseteq H$, такие что $V \cap W = 0$, $V + W$ плотно в H, но не совпадает с H. Удобно отождествить H с ℓ_2, а его замкнутые подпространства — задавать счётными суммами векторов ортонормированного базиса с коэффициентами из ℓ_2. При доказательстве от противного может помочь наблюдение, что если $H = V + W$, то H по теореме **??** изоморфно (как банахово пространство) ортогональной прямой сумме $V \oplus W$, которая определена как гильбертово пространство со скалярным произведением $(v \oplus w, v' \oplus w') = (v, v') + (w, w')$.]]

9.6. **Метрическая проекция и двойственное к гильбертову пространству.**

Задача 9.37. Приведите пример, когда метрическая проекция на замкнутое линейное подпространство банахова пространства определена однозначно, но не является линейной.

[[Пример можно построить уже для проекции на прямую в трёхмерном банаховом пространстве.]]

Задача 9.38. Приведите пример, когда метрическая проекция на замкнутое линейное подпространство банахова пространства определена однозначно, линейна, но её норма больше единицы

[[Пример можно построить уже для проекции на прямую в двумерном банаховом пространстве.]]

Задача 9.39. Пусть непрерывное линейное отображение $P : E \to E$ банахова пространства в себя обладает свойством $P^2 = P$. Докажите, что его образ замкнут.

[[Проверьте, что образ P совпадает с ядром $\mathrm{id}_E - P$.]]

Задача 9.40. Проверьте, что факторпространство гильбертова пространства H по его замкнутому подпространству $G \subset H$ является гильбертовым.

[[Докажите, что ограничение проекции $\pi : H \to H/G$ на ортогональное дополнение к G является изометрией.]]

Задача 9.41. Докажите, что в гильбертовом пространстве метрическая проекция на любое замкнутое выпуклое множество определена и 1-липшицева.

[[Существование доказывается также, как в теореме **??**. Для доказательства липшицевости рассмотрите две точки x, y и их проекции $P(x), P(y)$. Докажите, что угол между отрезком $[P(x), P(y)]$ и любым из отрезков $[x, P(x)]$ и $[y, P(y)]$ тупой.]]

Задача 9.42. Проверьте, что построенное отождествление $C : H \to H'$ для гильбертова пространства с комплексным полем скаляров будет комплексно-антилинейным, то есть $H' \cong \bar{H}$, если $\bar{H}$ обозначает то же пространство H, но с изменённым способом умножения вектора на комплексное число. А именно, если умножение на комплексное число в H обозначать символом $\cdot$, а в $\bar{H}$ — символом $\bar{\cdot}$, то верно соотношение

$$a \mathbin{\bar{\cdot}} x = \bar{a} \cdot x.$$

Задача 9.43. Выведите существование и единственность метрической проекции в банаховом пространстве с равномерно выпуклой нормой.

[[Докажите фундаментальность последовательности, возникающей в определении расстояния. Содержательная часть рассуждения фактически будет происходить в двумерном банаховом пространстве.]]

Задача 9.44. *(Неравенство Ханнера) Если $p > 2$, $f, g \in L_p(X)$, то

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \geqslant 2\|f\|_p^p + 2\|g\|_p^p.$$

[[Проверьте, что для чисел выполняется $|a+b|^p + |a-b|^p \geqslant 2|a|^p + 2|b|^p$ и проинтегрируйте.]]

Задача 9.45. Если $p > 2$, $f, g \in L_p(X)$, то

$$2^{p-1}\|f\|_p^p + 2^{p-1}\|g\|_p^p \geqslant \|f-g\|_p^p + \|f+g\|_p^p.$$

[[Подставьте в предыдущее неравенство $f-g$ и $f+g$ вместо f и g.]]

Задача 9.46. *(Неравенство Ханнера) Если $1 < p < 2$, $f, g \in L_p(X)$, то

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \geqslant (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\|f\|_p - \|g\|_p|^p.$$

[[Проверьте, что функция $\zeta(a,b) = (a^{1/p} + b^{1/p})^p + |a^{1/p} - b^{1/p}|^p$ является выпуклой 1-однородной функцией от неотрицательных чисел, то есть для любых двух точек $A, B \in [0, +\infty)^2$ и положительных коэффициентов u, v получается $\zeta(uA + vB) \leqslant u\zeta(A) + v\zeta(B)$. Выведите отсюда по индукции неравенство Йенсена для положительных комбинаций точек

$$\zeta(u_1 A_1 + \dots + u_N A_N) \leqslant u_1\zeta(A_1) + \dots + u_N\zeta(A_N),$$

а предельным переходом получите неравенство Йенсена для интегралов от функций $A : X \to [0, +\infty)^2$

$$\zeta\left(\int_X A(x)\,dx\right) \leqslant \int_X \zeta(A(x))\,dx.$$

Распишите последнее неравенство покоординатно

$$\zeta\left(\int_X a(x)\,dx, \int_X b(x)\,dx\right) \leqslant \int_X \zeta(a(x), b(x))\,dx$$

и подставьте в него $a(x) = |f(x)|^p, b(x) = |g(x)|^p$.]]

Задача 9.47. Если $1 < p < 2$, $f, g \in L_p(X)$, то

$$2^p\|f\|_p^p + 2^p\|g\|_p^p \geqslant (\|f-g\|_p + \|f+g\|_p)^p + |\|f-g\|_p - \|f+g\|_p|^p.$$

[[Подставьте в предыдущее неравенство $f-g$ и $f+g$ вместо f и g.]]

Задача 9.48. Докажите существование и единственность метрической проекции на замкнутое подпространство в пространствах L_p при $1 < p < +\infty$.

[[Заметьте, что доказанные в предыдущих задачах неравенства дают равеномерную выпуклость L_p.]]

Задача 9.49. Выясните устройство непрерывных линейных функционалов в L_p при $1 < p < +\infty$.

[[Действуйте аналогично доказательству для гильбертова пространства, найдя среди

$$\{f \mid \lambda(f) = 1\}$$

элемент минимальной нормы, проверьте, что $g(x) = |f(x)|^{p-1}\operatorname{sgn} f(x)$ обладает свойством

$$\forall h \in L_p(X), \int_X h(x)g(x)\,dx = \lambda(h)\|f\|_p^p$$

и лежит в L_q, $1/p + 1/q = 1$, так что с точностью до константы g реализует функционал λ.]]

9.7. **Компактные подмножества в банаховых пространствах.**

Задача 9.50. Докажите, что в определении вполне ограниченности не обязательно требовать включения $N \subseteq X$, вариант определения без этого требования равносилен исходному.

Задача 9.51. Докажите, что в бесконечномерном банаховом пространстве E единичный шар не является вполне ограниченным.

[[Можно использовать множество векторов из задачи 9.5.]]

Задача 9.52. Докажите, для никакое бесконечномерное банахово пространство E не является образом непрерывной кривой $\gamma : \mathbb{R} \to E$.

[[Используйте некомпактность шаров в E и теорему Бэра.]]

Задача 9.53. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, а функция $K : X \times X \to \mathbb{R}$ непрерывна. Докажите, что интегральный оператор $I : C(X) \to C(X)$, заданный по формуле

$$I[f](x) = \int_X K(x, y) f(y)\, dy$$

отображает единичный шар $C(X)$ в предкомпактное множество в $C(X)$.

[[Докажите равностепенную непрерывность образа единичного шара при этом операторе через равномерную непрерывность K.]]

Задача 9.54. Докажите, что любое компактное метрическое пространство M можно изометрично (с сохранением расстояний) вложить в банахово пространство $C(M)$.

[[Используйте функцию расстояния и неравенство треугольника.]]

9.8. **Теорема Хана–Банаха.**

Задача 9.55. Проверьте, что если F есть (необязательно замкнутое) линейное подпространство банахова пространства E, то F' есть (как банахово пространство) факторпространство E' по подпространству $F^\perp \subseteq E'$, состоящему из функционалов $\lambda \in E'$, таких что $\lambda|_F = 0$.

[[Используйте теорему Хана–Банаха. Не забудьте проверить равенство норм линейного функционала как элемента F' и как элемента факторпространства $E'/F^\perp$.]]

Задача 9.56. Докажите, что для гильбертова пространства H отображение $H \to H''$ является биекцией (то есть изометрией).

[[Используйте теорему **??**.]]

Задача 9.57. Докажите, что любое конечномерное подпространство V в банаховом пространстве E имеет замкнутое дополнение $W \subseteq E$, такое что $E = V \oplus W$.

[[С помощью теоремы Хана–Банаха продолжите изоморфизм $V \to \mathbb{R}^k$ до непрерывного отображения $E \to \mathbb{R}^k$ и рассмотрите его ядро (аналогично задаче 9.14).]]

Задача 9.58. Непрерывное линейное отображение банаховых пространств $A : E \to F$ называется *фредгольмовым*, если $\ker A$ и $F/A(E)$ конечномерны и $A(E)$ замкнуто. Пространство фредгольмовых отображений обозначим $\mathcal{F}(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$. Докажите, что оно открыто в $\mathcal{L}(E, F)$

[[Разложите $E = \ker A \oplus W$ и докажите, что для близких к A операторов A' образ $A'(W)$ всё ещё будет замкнутым и $F/A'(W)$ останется конечномерным. Применяйте теорему об изоморфизме **??** и решение задачи 9.18.]]

Задача 9.59. Для $A \in \mathcal{F}(E, F)$ положим

$$\operatorname{ind} A = \dim F/A(E) - \dim \ker A.$$

Докажите, что этот *индекс* локально постоянен на множестве $\mathcal{F}(E, F)$.

[[Более внимательно проанализируйте рассуждения в решении предыдущей задачи.]]

9.9. **Лемма Цорна, теорема Цермело и аксиома выбора.**

Задача 9.60. Проверьте, что множество $\mathbb{N}$ вполне упорядоченно своим естественным порядком, а $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ не являются вполне упорядоченными своим естественным порядком.

Задача 9.61. Докажите, что если подмножество $X \subseteq \mathbb{R}$ вполне упорядочено стандартным порядком на $\mathbb{R}$, то оно не более чем счётно.

[[Проверьте, что если $x \in X$, то найдётся интервал (x, y), не пересекающийся с X.]]

Задача 9.62. Обоснуйте возможность трансфинитной индукции, рассмотрев частичные определения f на начальных отрезках $T \subseteq S$.

[[Докажите, что любые два частичных определения f устроены так, что одно из них является продолжением другого. Потом объедините все частичные определения f и объясните, что получилось определение f на всём S.]]

Задача 9.63. Выведите теорему Цермело из аксиомы выбора напрямую.

[[Обоснуйте аксиомой выбора существование отображение $\varphi : 2^X \setminus \{X\} \to X$, такого что для любого $Y \subset X$ оказывается $\varphi(X) \notin X$. Определите *правильное подмножество* $S \subseteq X$ как подмножество, вполне упорядоченное некоторым отношением $<_S$, так что для любого $x \in S$

$$x = \varphi\left(\{y \in S \mid y <_S x\}\right).$$

Докажите (аналогично рассуждениям в выводе леммы Цорна выше), что из любых двух правильных подмножеств X одно является подмножеством другого и его начальным интервалом в смысле порядка. Докажите, что объединение всех правильных подмножеств X тоже является правильным подмножеством X и обязано совпадать с X.]]

Задача 9.64. Докажите, что общий вариант леммы Цорна следует из варианта для систем подмножеств некоторого множества с отношением порядка, заданным включением.

[[Любому $x \in X$ сопоставьте $I_x = \{y \in X \mid y \preccurlyeq x\}$ и заметьте, что $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow I_x \subseteq I_y$. Переведите условия леммы Цорна для X в термины системы подмножеств $\{I_x\}$.]]

Задача 9.65. Докажите, что для любых двух множеств X и Y либо $|X| \leqslant |Y|$, либо $|Y| \leqslant |X|$.

[[Рассмотрите биекции $f : X' \to Y'$ между подмножествами $X' \subseteq X$ и $Y' \subseteq Y$. Введите на них отношение порядка

$$(f, X', Y') \preccurlyeq (g, X'', Y'') \quad \Leftrightarrow \quad X' \subseteq X'' \text{ и } Y' \subseteq Y'' \text{ и } g|_{X'} = f.$$

Покажите, что к таким частичным биекциям применима лемма Цорна и изучите свойства максимальной частичной биекции.]]

Задача 9.66. Докажите, что любое бесконечное множество X равномощно некоторому произведению $Y \times \mathbb{N}$.

[[Рассмотрите семейства попарно непересекающихся подмножеств X, каждое из которых (подмножеств) счётно. Примените к таким семействам, упорядоченным по включению, лемму Цорна. Заметьте, что максимальное из таких семейств покрывает всё множество X, кроме может быть конечного множества. Поправьте это семейство так, чтобы получилось разбиение X на счётные множества.]]

Задача 9.67. Докажите, что для любого бесконечного множества X множество $X \times \mathbb{N}$ равномощно X.

[[Используйте равномощность X и $Y \times \mathbb{N}$ и равномощность $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.]]

Задача 9.68. Докажите, что для любого бесконечного множества X множество $X \times X$ равномощно X.

[[Рассмотрите подмножества $Y \subseteq X$ и биекции $f : Y \to Y \times Y$. Введите на парах (Y, f) отношение порядка

$$(Y, j) \preccurlyeq (Z, g) \quad \Leftrightarrow \quad Y \subseteq Z \text{ и } g|_Y = f.$$

Покажите, что к такому частично упорядоченному множеству применима лемма Цорна. Для любой пары (Y, f) проверьте, что предположение $|Y| < |X|$ влечёт её немаксимальность в данном отношении порядка.]]

Задача 9.69. Докажите, что в любом гильбертовом пространстве H всегда существует ортонормированная система векторов, такая что любой элемент $x \in H$ представляется в виде сходящегося в H ряда

$$x = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha e_\alpha,$$

где не более чем счётное число коэффициентов c_α отлично от 0, при этом

$$c_\alpha = (x, e_\alpha), \quad \|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |c_\alpha|^2.$$

Проверьте, что если в такой системе множество индексов A несчётно, то в H нет полной счётной системы векторов.

[[Рассмотрите ортонормированные системы векторов в H и отношение включения между ними. Покажите, что к этим системам применима лемма Цорна. Изучите свойства максимальной по включению такой системы.]]

9.10. **Теорема Тихонова.**

Задача 9.70. Докажите секвенциальную компактность декартова произведения отрезка с самим собой в счётном количестве, $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. Проверьте, что топологии произведения будет соответствовать покоординатная сходимость последовательностей чисел — элементов этого произведения.

[[Примените теорему Больцано–Вейерштрасса по очереди ко всех координатам, получив последовательность вложенных подпоследовательностей (S_n) исходной последовательности точек (p_k). Потом выберите подпоследовательность (p_{k_ℓ}), у которой для любого фиксированного n при достаточно больших ℓ номер k_ℓ попадает в список номеров S_n.]]

Задача 9.71. Проверьте по определению топологии произведения и определению непрерывности отображения (*прообраз любого открытого множества открыт*), что отображение топологических пространств $f : Y \to \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все композиции $p_\beta \circ f : Y \to X_\beta$ с координатными проекциями $p_\beta : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_\beta$.

Задача 9.72. Докажите, что на счётномерном кубе $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ сдвиг координат на единицу, $x'_n = x_{n+1}$, является гомеоморфизмом куба.

[[Проверьте, что любое открытое множество при сдвиге переходит в открытое множество.]]

Задача 9.73. Докажите, что счётномерный *булев куб* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (произведение множества из двух элементов на себя) гомеоморфен канторову множеству $K \subset [0,1]$. С помощью некоторой биекции $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ опишите сдвиг из предыдущей задачи как гомеоморфизм канторова множества.

[[Вспомните про троичное разложение точек K и проверьте совпадение топологий.]]

Задача 9.74. * Докажите, что на счётномерном кубе $[0,1]^{\mathbb{N}}$ можно ввести метрику, задающую топологию декартова произведения.

[[Рассмотрите прямоугольный параллелепипед в гильбертовом пространстве, выбрав подходящие длины его сторон. Аккуратно проверьте совпадение топологии декартова произведения и топологии метрики в гильбертовом пространстве.]]

Задача 9.75. Докажите, что если множество A несчётно, то на кубе $[0,1]^A$ не может быть метрики, задающей его топологию декартова произведения.

[[Обратите внимание, что в топологии, порождённой метрикой, у каждой точки $x \in X$ должна найтись счётная система окрестностей $\mathcal{U}_x$, такая что любая окрестность $V \ni x$ содержит некоторую $U \in \mathcal{U}_x$. Проверьте это свойство для топологии прямого произведения.]]

Задача 9.76. * Функции на множестве $[0,1]^A$ можно рассматривать, как функции бесконечного числа действительных переменных $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, $x_\alpha \in [0,1]$. Докажите, что такая функция непрерывна в топологии декартова произведения тогда и только тогда, когда её можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленами от конечного числа из данного набора переменных.

[[Надо проверить, что для компактного топологического пространства работают теоремы, которые мы доказывали для компактных метрических пространств, непрерывность равномерного предела непрерывных функций и теорема Стоуна–Вейерштрасса, и применить их.]]

Задача 9.77. * Назовём *элементарным параллелепипедом* в $[0,1]^A$ произведение промежутков $\prod_{\alpha\in A} \Delta_\alpha \subset [0,1]^A$, из которых все, кроме конечного числа, совпадают с $[0,1]$. Введём меру элементарного параллелепипеда как (на самом деле конечное) произведение чисел $\prod_{\alpha\in A} |\Delta_\alpha|$. Назовём *элементарным множеством* объединение конечного числа таких попарно непересекающихся параллелепипедов, а меру определим как сумму мер составляющих его параллелепипедов. Докажите, что для такой меры элементарных множеств выполняется лемма **??**, и что она продолжается до счётно-аддитивной меры на борелевских подмножествах $[0,1]^A$.

[[Проверьте, что аддитивность такой меры по сути надо проверить в конечномерном случае, что уже было сделано. Также проверьте, что компактность, нужная в доказательстве леммы **??**, обеспечена теоремой Тихонова. Проследите остальные шаги построения внешней меры Лебега и собственно меры Лебега для этого случая.]]

9.11. $*$-слабая топология и компактность в двойственном пространстве.

Задача 9.78. Проверьте, что любое открытое множество $*$-слабой топологии E' является открытым и в сильной. Проверьте, что для бесконечномерного E некоторые открытые множества сильной топологии не являются открытыми в $*$-слабой топологии.

[[Первое утверждение достаточно проверить для множеств предбазы $*$-сильной топологии. Для примера в другую сторону рассмотрите открытый метрический шар в E'.]]

Задача 9.79. Проверьте утверждение из доказательства теоремы Банаха–Алаоглу: в любом компактном топологическом пространстве X любое замкнутое подмножество $Y \subset X$ тоже компактно.

[[От открытого покрытия $Y \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ перейдите к открытому покрытию $\mathcal{U} \cup \{X \setminus Y\}$ для всего X.]]

Задача 9.80. Докажите, что если в единичном шаре E есть счётное плотное множество, то секвенциальная компактность единичного шара E' в $*$-слабой топологии следует из решения задачи 9.70.

[[Добейтесь сходимости подпоследовательности (λ_n) в точках плотного $X \subset B$, потом докажите сходимость во всех точках, используя липшицевость всех $\lambda_n \in B'$.]]

Задача 9.81. Докажите, что если E' является двойственным к банахову пространству, то компактные в $*$-слабой топологии подмножества E' ограничены и замкнуты в сильной топологии.

[[Заметьте, что для любого $x \in E$ отображение $E' \mapsto \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto \lambda(x)$, непрерывно в $*$-слабой топологии и должно переводить компактное множество в компактное. Потом примените принцип равномерной ограниченности. Для доказательства замкнутости вспомните, что открытые в $*$-слабой топологии множества открыты и в сильной топологии.]]

Задача 9.82. Докажите, что если банахово пространство E бесконечномерно, то E' не будет локально компактным в $*$-слабой топологии. Топологическое пространство (см. также раздел ??) называется *локально компактным*, если у любой его точки есть предкомпактная окрестность.

[[Заметьте, что любая окрестность нуля содержит бесконечномерное линейное подпространство E'.]]

Задача 9.83. Докажите, что в двойственном к некоторому банахову пространству E' норма $\|\cdot\|$ полунепрерывна снизу в $*$-слабой топологии.

[[Надо доказать замкнутость множеств $\{\lambda \in E' \mid \|\lambda\| \leqslant c\}$ в слабой топологии, проверив, что в этой топологии компактность влечёт замкнутость.]]

Задача 9.84. * Докажите, что при условии $E = E''$ замкнутое в топологии нормы выпуклое множество $K \subseteq E'$ является замкнутым и в $*$-слабой топологии.

[[Пусть $x_0 \notin K$ и без ограничения общности $x_0 = 0$. Тогда по замкнутости K относительно нормы некоторый шар $B_0(r)$ положительного радиуса не пересекается с K. Рассуждая аналогично доказательству теорему Хана–Банаха по трансфинитной индукции, найдите линейный функционал, который не более 1 на $B_r(0)$ и не менее 1 на K и получите $*$-слабую окрестность нуля, не пересекающую K.]]

Задача 9.85. Докажите, что при условии $E = E''$ расстояние между точкой $x \in E'$ и выпуклым замкнутым в топологии нормы $K \subset E'$ достигается на некотором $y \in K$, то есть $\rho(x, y) = \operatorname{dist}(x, K)$.

[[Можно пересечь K с шаром, использовать компактность в $*$-слабой топологии и полунепрерывность снизу функции расстояния.]]

Задача 9.86. Докажите, что любая $*$-слабо сходящаяся последовательность в E' является ограниченной (в смысле нормы E').

[[Используйте принцип равномерной ограниченности (теорему ??).]]

Задача 9.87. Докажите, у любой ограниченной последовательности в E' есть точка сгущения (определяемая в любой топологии аналогично определению ??).

[[Примените теорему Банаха–Алаоглу (теорему ??).]]

Задача 9.88 (Теорема Болла о покрытии полосками). * Докажите, что если (v_k) — последовательность единичных векторов в комплексном гильбертовом пространстве H, (t_k) — последовательность неотрицательных чисел, такая что

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k^2 = R^2,$$

то найдётся вектор $z \in H$ длины не более R, такой что $|(z, v_k)| \geqslant t_k$ для всех k.

[[Рассмотрев, от противного, покрытие шара радиуса R полосками $\{z \in H \mid |(z, v_k)| < t_k\}$ и используя компактность единичного шара в слабой топологии, перейдите к конечному числу (n) полосок и конечномерному пространству. Далее, рассмотрите вектор z длины R, на котором выражение $f(z) = |(z, v_1)|^{t_1^2} \cdots |(z, v_n)|^{t_n^2}$ достигает максимума. Предположив, что $|(z, v_i)| < t_i$, перейдите в порождённое z и v_i двумерное подпространство, рассмотрите f как функцию на одномерном комплексном проективном пространстве и приведите к противоречию с помощью знаний из раздела **??**.
]]

Задача 9.89 (Теорема Кадеца в одну сторону). Пусть (x_k) — последовательность ненулевых единичных векторов в комплексном гильбертовом пространстве, такая что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x_k|^2} < +\infty.$$

Докажите, что в слабой топологии (x_n) не имеет нуль точкой сгущения.

[[Используйте теорему Болла, чтобы найти $z \in H$ и $\varepsilon > 0$, такие что $|(z, x_k)| \geqslant \varepsilon$ для любого k.]]

Задача 9.90 (Теорема Кадеца в другую сторону). * Пусть (a_k) — последовательность положительных чисел, такая что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k^2} = +\infty.$$

Постройте в гильбертовом пространстве последовательность векторов (x_k), такую что $|x_k| = a_k$ для всех k и нуль является точкой сгущения данной последовательности.

[[Рассмотрите попарно ортогональные векторы x_k и заметьте, что в качестве базы окрестностей нуля в слабой топологии можно брать эллиптические цилиндры вида $\left\{z \in H \mid (z, y_1)^2 + \cdots + (z, y_n)^2 < \varepsilon^2\right\}$ для всевозможных конечных наборов векторов $y_1, \dots, y_n \in H$. Проанализируйте неравенства, которые означают попадание x_k в такие базовые окрестности нуля.]]

Задача 9.91 (Теорема Кадеца, вещественный случай). Проверьте, что предыдущие две задачи про точку сгущения в слабой топологии гильбертова пространства работают и для вещественного гильбертова пространства.

[[Вложите вещественное гильбертово пространство в его комплексификацию $H \otimes C$.]]

9.12. **Борелевские меры со знаком на $\mathbb{R}^n$ и плотность меры.**

Задача 9.92. Представьте дельта-меру, сосредоточенную в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ с помощью функции распределения, как в разделе **??**.

Задача 9.93. Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется *атомом* борелевской меры μ, если $|\mu(\{x\})| > 0$. Докажите, что если μ имеет конечную вариацию, то количество её атомов не более чем счётно.

[[Для любого $\varepsilon > 0$ проанализируйте, сколько может быть точек x, таких что $|\mu(\{x\})| > \varepsilon$.]]

Задача 9.94. Проверьте утверждение о том, что абсолютно непрерывная функция является функцией распределения меры со знаком, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега.

[[В рассуждении удобно будет использовать свойство регулярности из теоремы **??**.]]

Задача 9.95 (Теорема Лебега о разложении). Докажите, что неотрицательная конечная борелевская мера ν на $\mathbb{R}^n$ раскладывается в сумму абсолютно непрерывной (относительно меры Лебега μ) меры ν_c и *сингулярной относительно меры Лебега* меры ν_s. Последнее означает, что существует множество $X \subseteq \mathbb{R}$, такое что $\nu_s(\mathbb{R}^n \setminus X) = 0$ и $\mu(X) = 0$.

[[Заметьте, что в доказательстве теоремы Радона–Никодима абсолютная непрерывность была нужна лишь на последнем шаге, который надо модифицировать для изучения сингулярной части меры.]]

9.13. **Двойственное к пространству непрерывных функций на отрезке.**

Задача 9.96. Докажите счётную субаддитивность такой меры $\mu(U)$ на открытых множествах.

[[Используйте компактность носителя в определении $\mu(U)$ и разбиение единицы.]]

Задача 9.97. Докажите, что для любого открытого множества U и положительного ε найдётся компактное множество $F \subseteq U$, такое что $\mu^*(F) > \mu(U) - \varepsilon$.

[[Найдите f из определения $\mu(U)$, для которой $\lambda(f) > \mu(U) - \varepsilon$, и положите $F = \operatorname{supp} f$. Для открытых $V \supseteq F$ подставьте f в определение $\mu(V)$, чтобы установить $\mu(V) \geqslant \lambda(f) > \mu(U) - \varepsilon$.]]

Задача 9.98. Докажите аддитивность μ^* на элементарных множествах отрезка.

[[С учётом очевидной субаддитивности достаточно доказать $\mu^*(I \cup J) \geqslant \mu^*(I) + \mu^*(J)$ для двух непересекающихся промежутков. Это нетривиально только для случая, когда границы промежутков имеют общую точку $c \in [a, b]$, тогда один из них можно накрыть открытым множеством U, не пересекающим другой промежуток, и применить результат предыдущей задачи, чтобы свести к случаю промежутков с непересекающимися окрестностями.]]

Задача 9.99. Докажите, что двойственное к двойственному к $C[a, b]$ не совпадает с $C[a, b]$.

[[Заметьте, что интегрировать по борелевской мере можно не только непрерывные функции.]]

Задача 9.100. Докажите, что $L_1[a, b]$ вкладывается в двойственное к $C[a, b]$ по формуле

$$g \mapsto \left(f \mapsto \int_a^b fg \, dx \right)$$

с сохранением нормы.

[[Оценка интеграла через произведение $\|f\|_C \cdot \|g\|_1$ очевидна, надо только доказать, что она почти достигается на некоторых f с любой точностью, для этого приблизьте $\operatorname{sgn} g$ непрерывными функциями в среднем (см. также доказательство леммы **??**).]]

Задача 9.101. Докажите, что слабая сходимость $\delta_{x_n} \to \delta_{x_0}$ эквивалентна обычной сходимости $x_n \to x_0$.

[[Примените определение слабой сходимости.]]

Задача 9.102. *(Описание слабой топологии без функций) Докажите, что на множестве вероятностных борелевских мер (неотрицательных с полной мерой 1) на отрезке $[a, b]$, $*$-слабая топология порождается открытыми множествами, соответствующими открытым $V \subseteq [a, b]$

$$U_{V,a} = \{\nu \mid \nu(V) > a\}.$$

[[В одну сторону, при условии $\nu(V) > a$ найдите непрерывную $f : [a, b] \to [0, 1]$, у которой $\operatorname{supp} f \subseteq V$ и

$$\int_a^b f(x) d\nu(x) > a.$$

В обратную сторону докажите, что последнее неравенство для фиксированной непрерывной функции гарантируется принадлежностью ν пересечению конечного набора множеств U_{V_i,a_i}.]]

Задача 9.103. Докажите, что множества вероятностных борелевских мер на отрезке вида $\{\nu \mid \nu(V) < a\}$ не открыты в слабой топологии для некоторых открытых V.

[[Сделайте контрпример из дельта-функций.]]

Задача 9.104. * Рассмотрим борелевскую меру со знаком μ ограниченной вариации на $(-\pi, \pi]$, которую можно рассмотреть как 2π-периодическую меру на прямой (с не обязательно ограниченной вариацией). Для неё можно определить коэффициенты Фурье

$$c_n(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{(-\pi,\pi]} e^{-ixn} \, d\mu,$$

соответствующие суммы Фурье и Фейера, рассматриваемые как плотности меры (со знаком). Докажите, что суммы Фейера меры сходятся к ней в $*$-слабой топологии. Обязаны ли слабо сходиться к мере её суммы Фурье?

[[Утверждение про суммы Фейера можно доказывать по определению слабой сходимости неотрицательных мер, используя неотрицательность ядра Фейера и регулярность меры из теоремы ??. Иначе, можно использовать описание меры из варианта теоремы Рисса для $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ и интерпретировать сумму Фейера $S_n(\mu)$ как функционал

$$S_n(\mu)(f) = \mu\left(S_n(f)\right).$$

При рассмотрении сумм Фурье можно написать аналогичные формулы, подставить $\mu = \delta_0$ и посмотреть, что получится.]]

9.14. Распределения (обобщённые функции) из $W^{-\infty,2}$ и $\mathcal{E}'$.

Задача 9.105. * Опишите преобразования Фурье функций из $W^{k,2}$.

[[Используйте преобразование Фурье производной, но действуйте аккуратно, так как $L_1(\mathbb{R}) \neq L_2(\mathbb{R})$.]]

Задача 9.106. Проверьте в обратную сторону, что формула (??) действительно задаёт распределение из $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

[[Докажите непрерывность данного линейного функционала с помощью неравенства типа (??).]]

Задача 9.107. С помощью вложения $W^{k+1,2}[-m,m] \to C^k[-m,m]$ докажите, что линейный функционал, удовлетворяющий условиям (**??**), оказывается также непрерывным линейным функционалом на $W^{k+1,2}[-m,m]$, и представляется в виде

$$\lambda(\varphi) = \int_{-m}^{m} \left(\varphi(x)\bar{f}(x) + \varphi'(x)\bar{f}'(x) + \dots + \varphi^{(k+1)}(x)\bar{f}^{(k+1)}(x) \right) \, dx$$

с некоторой $f \in W^{k+1,2}[-m,m]$.

[[Докажите непрерывность вложения $W^{k+1,2}[-m,m] \to C^k[-m,m]$, оценив C-нормы производных порядка $0, 1, \dots, k$ функции $f \in W^{k+1,2}[-m,m]$ через её норму в этом $W^{k+1,2}[-m,m]$. Докажите гильбертовость пространства Соболева $W^{k+1,2}[-m,m]$, применив полноту $L_2[-m,m]$ к (обобщённым) производным функций из некоторой фундаментальной последовательности в $W^{k+1,2}[-m,m]$. Имея в виду, что скалярное произведение в этом пространстве имеет вид

$$(f,g) = \int_{-m}^{m} \left(f\bar{g} + f'\bar{g}' + \dots + f^{(k+1)}\bar{g}^{(k+1)} \right) \, dx,$$

примените теорему **??**.]]

Задача 9.108. * Приведите пример топологического пространства X, в котором непрерывность функции $f : X \to \mathbb{R}$ по Гейне не влечёт непрерывность по Коши.

[[В качестве X удобно взять подпространство несчётного произведения $\{0,1\}^A$, состоящее из отображений $x : A \to \{0,1\}$, у которых либо $x^{-1}(0)$ не более чем счётно, либо $x^{-1}(1)$ не более чем счётно. В качестве функции можно взять функцию, принимающую значения 0 и 1 в зависимости от выполнения одной из альтернатив в определении множества X.]]

Задача 9.109. *(Теорема Бэра в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$) Докажите, что $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ нельзя представить в виде объединения счётного числа замкнутых подмножеств с пустыми внутренностями.

[[Как в доказательстве леммы **??**, найдите в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ убывающую по включению последовательность выпуклых окрестностей нуля (U_n), такую что любое открытое множество $U \ni 0$ содержит некоторое U_n. Потом повторите доказательство теоремы Бэра для открытых множеств, используя вместо стягивающейся последовательности шаров убывающую по включению последовательность множеств вида $t_nU_n + c_n$ с $t_n \leqslant 1$ и доказав фундаментальность (c_n).]]

Задача 9.110. *(Теорема Банаха–Штейнгауза в $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$) Предположим, что множество $Y \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ такое, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ множество чисел $\{\lambda(\varphi) \mid \lambda \in Y\}$ ограничено. Докажите, что существует константа C и конечный набор норм $\|\cdot\|_{K,0}, \dots, \|\cdot\|_{K,k}$ пространства $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, так что для любой функции $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ и любого $\lambda \in Y$ выполняется

$$|\lambda(\varphi)| \leqslant C \sup\{\|\varphi\|_{K,\ell} \mid 0 \leqslant \ell \leqslant k\}.$$

[[Проверьте, что доказательство теоремы Банаха–Штейнгауза для банаховых пространств проходит и здесь, только окрестности нуля надо задавать не одной нормой, а несколькими.]]

9.15. Распределения из $\mathcal{D}'$, регулярные и нерегулярные обобщённые функции.

Задача 9.111. При каком минимальном k можно утверждать, что $\delta_{x_0} \in W^{-k,2}$?

[[Проверьте определённость элемента $W^{k,2}$ в точке при разных k, потом аккуратно проверьте непрерывность (ограниченность) взятия значения в точке.]]

Задача 9.112. * Определим с помощью интегрирования в смысле главного значения

$$\lambda(\varphi) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \lim_{\delta \to +0} \left(\int_{-\infty}^{-\delta} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right).$$

Докажите, что это выражение всегда конечно и непрерывно зависит от φ в смысле сходимости в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Докажите, что определённый так функционал $\lambda = v.p.\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ не регулярный.

[[Для доказательства корректности определения удобно представить $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ на некотором конечном отрезке. Для доказательства нерегулярности проверьте, что при условии $\lambda_f = v.p.\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ равенство $f = \frac{1}{x}$ должно выполняться почти всюду. Для этого удобно применить рассуждения из доказательства леммы **??** на отрезках, не содержащих 0.]]

Задача 9.113. * Определим пространство $\mathcal{D}_m(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ как пространство бесконечно гладких функций с компактным носителем на отрезке $[-m, m]$. Топологию на $\mathcal{D}_m(\mathbb{R})$ зададим как индуцированную включением $\mathcal{D}_m(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R})$. В объединении

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{D}_m(\mathbb{R})$$

открытыми множествами объявим такие $U \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R})$, что пересечение $U \cap \mathcal{D}_m(\mathbb{R})$ открыто в $\mathcal{D}_m(\mathbb{R})$ для любого m. Докажите, что сходимость в этой топологии именно та, которая приведена выше как сходимость в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ по определению.

[[Проверьте что содержательная часть утверждения — это доказательство того, что сходящаяся в указанной топологии последовательность содержится полностью в некотором $\mathcal{D}_m(\mathbb{R})$. Так как сдвиг является гомеоморфизмом этой топологии, достаточно рассмотреть сходимость к нулю и предположить противное — что последовательность функций (φ_n) стремится к нулю, но объединение носителей этих функций неограничено. Обоснуйте, что перейдя к подпоследовательности, можно считать $\varphi_n(x_n) \neq 0$ для некоторой последовательности чисел $x_n \to \infty$. Проверьте по определению, что множество функций φ, заданное условием

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(x_n)}{|\varphi_n(x_n)|} < \varepsilon,$$

открыто в топологии $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ для любого $\varepsilon > 0$. Поставьте это множество в определение стремления к нулю последовательности (φ_n) в этой топологии.]]

9.16. **Производная распределения и топология в пространстве $\mathcal{D}'$.**

Задача 9.114. Найдите по определению производную регулярного распределения $\ln|x|$. Будет ли эта производная регулярной?

[[С помощью непрерывности интеграла Лебега рассмотрите интеграл от $-\ln|x|\varphi'(x)$ как предел интегралов по $\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)$ при $\delta \to +0$.]]

Задача 9.115. Докажите, что любое распределение $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ имеет первообразную, то есть такую $\mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, что

$$\mu' = \lambda$$

в смысле дифференцирования распределений. Докажите, что любые две первообразные одного и того же распределения отличаются на константу.

[[Обратите внимание, что взятие первообразной в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ определено не для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и опишите, для каких φ оно определено и как. Потом примените сопряжение для получения операции взятия первообразной распределения.]]

Задача 9.116. Аналогично рассуждению для операции взятия производной в $\mathcal{D}'$ докажите, что сопряжённое $A^* : \mathcal{Q}' \to \mathcal{T}'$ к любому непрерывному линейному отображению $A : \mathcal{T} \to \mathcal{Q}$ топологических векторных пространств непрерывно в $*$-слабой топологии.

[[Рассмотрите прообразы множества предбазы топологии $\{\lambda \in \mathcal{T}' \mid a < \lambda(\varphi) < b\}$ относительно A^*, равные $\{\lambda \in \mathcal{Q}' \mid a < \lambda(A(\varphi)) < b\}$]]

Задача 9.117. * Докажите, что если $A : E \to F$ является непрерывным линейным отображением банаховых пространств, то норма сопряжённого отображения A^* равна норме отображения A.

[[Неравенство $\|A^*\| \leqslant \|A\|$ следует из определения $A^*\lambda$ как композиции λ и A. Неравенство в обратную сторону потребует применения теоремы Хана–Банаха для ненулевого вектора $\|Ax\|$, для которого $\|Ax\| \geqslant (1-\varepsilon)\|A\| \cdot \|x\|$.]]

Задача 9.118. К чему в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ сходится последовательность регулярных функций

$$D_n(x) = \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin x/2}$$

при $n \to \infty$?

9.17. **Умножение распределения на функцию.**

Задача 9.119. Проверьте выполнение правила Лейбница для производной произведения $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$:

$$(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'.$$

[[Подействуйте распределением на $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и примените определение умножения и производной распределения.]]

Задача 9.120. Проверьте, что для умножения распределения $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ на две бесконечно гладкие функции f и g выполняется $\lambda \cdot (fg) = (\lambda f)g$.

Задача 9.121. Проверьте, что для корректности определения умножения $f\varphi$ для $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ и $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ со значением в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ достаточно, чтобы любая производная f росла не быстрее некоторой степени x при $x \to \infty$.

9.18. **Носитель распределения и $\mathcal{E}'$ как распределения с компактным носителем.**

Задача 9.122. Приведите пример распределения из $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, не являющегося производной (какого-то порядка) регулярного определения.

[[Теорема **??** намекает, что такое распределение не может иметь компактный носитель.]]

Задача 9.123. Докажите, что любое распределение λ с носителем в одной точке x_0 представляется в виде

$$\lambda = a_0\delta_{x_0} + a_1\delta'_{x_0} + \dots + a_n\delta^{(n)}_{x_0}$$

с некоторым $n \in \mathbb{Z}^+$.

[[Посмотрите, как теорема **??** работает в этом случае.]]

Задача 9.124. * Докажите, что если последовательность распределений $\lambda_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ стремится к λ, а последовательность $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ стремится к φ, то $\lambda_n(\varphi_n) \to \lambda(\varphi)$.

[[Сведите к случаю $\lambda = 0$ и $\varphi = 0$. Домножьте λ_n на функцию $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, тождественно равную единице в окрестности носителей всех φ_n, не меняя значения $\lambda_n(\varphi_n)$ и сведя таким образом вопрос к $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Примените после этого теорему Банаха–Штейнгауза для $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ (задачу 9.110) и оцените $\lambda_n(\varphi_n)$.]]

Задача 9.125. * Докажите, что если последовательность распределений $\lambda_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ такова, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ существует конечный предел $\lambda(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(\varphi)$, то λ является элементом $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

[[Надо доказать непрерывность λ, то есть доказать, что из сходимости $\varphi_n \to \varphi_0$ в $\mathcal{D}$ следует сходимость чисел $\lambda(\varphi_n) \to \lambda(\varphi_0)$; из очевидной линейности λ достаточно рассмотреть случай $\varphi_0 = 0$. Заметьте, что носители φ_n по определению сходимости $\mathcal{D}$ лежат на одном и том же отрезке; тогда домножив λ_n на некоторую $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, равную единице в окрестности этого отрезка, можно перейти к рассуждениям в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$. После этого можно применить теорему Банаха–Штейнгауза для $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ (задачу 9.110).]]

Задача 9.126. * Пусть $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неотрицательная бесконечно гладкая функция, отличная от нуля только при $|x| \leqslant 1$ и пусть $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ dx = 1$. Положим

$$\varphi_k(x) = k\varphi(kx),$$

эти функции тоже имеют единичные интегралы и φ_k отлична от нуля только при $|x| \leqslant 1/k$. Для любого распределения $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ определим свёртку $\lambda * \varphi_k$ как регулярное распределение, соответствующее функции

$$f_k(x) = \langle \lambda, \varphi_k(y - x) \rangle,$$

где в правой части мы применяем λ к функции от y. Докажите, что функции f_k гладкие и $f_k \to \lambda$ в смысле сходимости в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

[[Докажите, что $\langle f_k, \psi \rangle = \langle \lambda, \varphi_k * \psi \rangle$ для любой функции $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, если для функций свёртка определена стандартным образом $(\varphi_k * \psi)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(y - x)\psi(x)\ dx$. Для этого заметьте, что последняя свёртка является пределом в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ линейных комбинаций сдвигов φ_k, соответствующих суммам Римана для интеграла в определении свёртки. Потом вспомните теоремы **??** и **??**.]]

Задача 9.127. * Докажите, что любое распределение $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ можно приблизить линейными комбинациями дельта-функций в смысле сходимости $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$.

[[Вспомните, что интеграл непрерывной функции на отрезке можно приблизить суммами Римана и покажите, что производную дельта-функции можно приблизить линейными комбинациями дельта-функций.]]

Задача 9.128. * Докажите, что любое линейное отображение $\xi : \mathcal{E}'(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, непрерывное в смысле топологии $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, представляется в виде $\xi(\lambda) = \lambda(\varphi)$ для некоторой $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$.

[[Определите $\varphi(x) = \xi(\delta_x)$ и продолжите формулу $\lambda(\varphi) = \xi(\lambda)$ с дельта-функций на все $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$.]]

Задача 9.129. * Распределение $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ называется *неотрицательным*, если $\lambda(\varphi) \geqslant 0$ для любой всюду неотрицательной $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Докажите, что у неотрицательного распределения есть регулярная первообразная.

[[Перейдите к распределениям с компактным носителем с помощью умножения на неотрицательную гладкую функцию с компактным носителем. После этого, используя монотонность λ и конечность $\lambda(1)$, ограничьте $\lambda(\varphi)$через $\|\varphi\|_C$. Далее примените теорему Рисса.]]

9.19. **Распределения из $\mathcal{S}'$ и преобразование Фурье.**

Задача 9.130. Докажите, что если $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и преобразование Фурье $F[f] \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, то $f \equiv 0$.

[[Установите, что преобразование Фурье функции с компактным носителем раскладывается в ряд Тейлора с бесконечным радиусом сходимости.]]

Задача 9.131. Докажите, что $\lambda_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ корректно определено, если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ локально интегрируема и функция $F(x) = \int_0^x |f(t)|\,dt$ ограничена некоторым многочленом.

[[Проинтегрируйте выражение $\lambda_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\varphi\,dx$ по частям и используйте лемму **??**.]]

Задача 9.132. Проверьте, что для любой $f \in L_2(\mathbb{R})$ распределение $\lambda_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ корректно определено.

[[Используйте предыдущую задачу.]]

Задача 9.133. Проверьте, что на регулярных λ_f, соответствующих $f \in L_2(\mathbb{R})$, преобразование Фурье λ_f соответствует преобразованию Фурье f.

[[Используйте теорему **??** и следствие **??**.]]

Задача 9.134. Найдите преобразование Фурье функции e^{ix} как элемента $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

[[Обратите внимание, что при попытке найти такое преобразование Фурье как преобразование Фурье функции получатся расходящиеся интегралы. Поэтому надо работать с e^{ix} сразу как с распределением.]]

Задача 9.135. Найдите преобразование Фурье функции

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0; \\ 1, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

как элемента $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

[[Представьте ϑ как предел в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ характеристических функций отрезка $[0, m]$ или как предел функций

$$\vartheta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0; \\ e^{-\varepsilon x}, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

при $\varepsilon \to +0$.]]

Задача 9.136. Докажите, что если у функции $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ производная любого порядка ограничена по модулю некоторым многочленом на всей прямой, то умножение на f является непрерывным отображением $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

[[Примените формулу Лейбница в определении $\mathcal{S}$-норм.]]

Задача 9.137. Проверьте равенство $F[\lambda x] = \pm i\frac{\partial\hat{\lambda}}{\partial y}$ для $\lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ и определите знак в этом выражении.

[[Заметьте, что преобразование Фурье, умножение на x и взятие производной определены (почти что) как сопряжённые к соответствующим операциям с функциями $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.]]

Задача 9.138. Докажите, что преобразование Фурье в $\mathcal{S}'$ переводит распределение

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{2\pi n} \quad \text{в распределение} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n.$$

[[Вспомните формулу суммирования Пуассона из задачи 8.75.]]

Задача 9.139. Докажите, что преобразования Фурье элементов $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ являются аналитическими функциями.

[[Заметьте, что для $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ оказывается $\hat{\lambda}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda(e^{-iyx})$, а $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ должно переводить сходящиеся в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ ряды функций в сходящиеся ряды чисел.]]

Задача 9.140. Пусть для функции $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ можно указать такое целое N, что для любого целого $k \geqslant 0$

$$f^{(k)}(x) = O(|x|^{N-k}), \quad x \to \infty.$$

Докажите, что f можно считать элементом из $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, а преобразование Фурье $\hat{f}(y)$ при $y \neq 0$ тоже можно считать регулярной функцией от y при $y \neq 0$, и при любом $M \geqslant 0$

$$\hat{f}(y) = o(|y|^{-M}), \quad y \to \infty.$$

[[Заметьте, что $f^{(k)}$ при достаточно большом k оказывается обычной функцией, для которой преобразование Фурье определено стандартно.]]

9.20. **Многомерные распределения и распределения на многообразиях.**

Задача 9.141. Докажите, что любой элемент $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ определяет непрерывное линейное отображение $f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

[[Используйте формулу $f(\varphi)(\psi) = \Lambda(\varphi \otimes \psi)$, где функция двух переменных $\varphi \otimes \psi$ определена на паре (x, y) как $\varphi(x)\psi(y)$. Докажите непрерывность определённого так отображения f.]]

Задача 9.142. Для любого включения открытых множеств $U \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$ имеют место включение $\mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}(V)$ (с помощью продолжения нулём) и отображение ограничения $\mathcal{E}(V) \to \mathcal{E}(U)$. Определите по сопряжению соответствующие отображения

$$\mathcal{D}'(V) \to \mathcal{D}'(U), \quad \mathcal{E}'(U) \to \mathcal{E}'(V).$$

Проверьте, что есть проблемы с определением отображений в другую сторону

$$\mathcal{D}'(V) \leftarrow \mathcal{D}'(U), \quad \mathcal{E}'(U) \leftarrow \mathcal{E}'(V).$$

Задача 9.143. Пусть M покрыто своими координатными картами $\{U_\alpha\}$. Докажите, что $\lambda \in \mathcal{D}'_k(M)$ однозначно определяется ограничениями $\lambda|_{U_\alpha}$.

[[Если нет, и у $\mu \in \mathcal{D}'_k(M)$ все ограничения те же, то у разности $\lambda - \mu$ все ограничения нулевые. Далее используйте рассуждения из леммы **??**.]]

Задача 9.144. Пусть M покрыто своими координатными картами $\{U_\alpha\}$. Докажите, что набор $\lambda_\alpha \in \mathcal{D}'_k(U_\alpha)$, такой что на любом пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$ ограничения $\lambda_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ и $\lambda_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ совпадают, определяет однозначно некоторый элемент $\lambda \in \mathcal{D}'_k(M)$.

[[Единственность доказана в предыдущей задаче. Рассмотрите разбиение единицы $\sum_\alpha \rho_\alpha \equiv 1$, подчинённое покрытию $\{U_\alpha\}$, и докажите, что $\sum_\alpha \lambda_\alpha \rho_\alpha$ (если эту формулу правильно понимать), даст элемент $\mathcal{D}'_k(M)$, ограничение которого на каждую U_α даст соответствующий λ_α.]]

9.21. **Конечно-аддитивные меры и ультрафильтры.**

Задача 9.145. Проверьте, что $(\ell_1)' = \ell_\infty$.

[[Содержательная часть утверждения — доказать, что если последовательность (b_n) неограничена, то для какой-то $(a_n) \in \ell_1$ сумма $\sum_n a_n b_n$ расходится. Это можно доказать вручную, а можно применить принцип равномерной ограниченности.]]

Задача 9.146. Докажите, что на конечном множестве S все ультрафильтры главные.

[[Можно рассуждать непосредственно комбинаторно, а можно использовать развиваемую далее небольшую теорию.]]

Задача 9.147. * Постройте пример топологического пространства, в котором не эквивалентны следующие определения: 1) частичный предел — некоторая подпоследовательность (x_n) стремится к x_∞; 2) точка сгущения — в каждой окрестности x_∞ лежит бесконечно много элементов последовательности (x_n). Сравните с леммами **??** и **??**.

[[Достаточно в качестве топологического пространства рассматривать $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, где $\mathbb{N}$ представляет из себя последовательность, а ∞ — её предполагаемую предельную точку. Возьмите меру m, соответствующую неглавному ультрафильтру, и определите окрестности ∞ как $U \cup \{\infty\}$ для всех $U \subseteq \mathbb{N}$ с $mU = 1$. Тогда любая окрестность ∞ бесконечна и выполняется определение (2). Проверьте с помощью свойств меры m, что для любой подпоследовательности (то есть бесконечного подмножества) $X \subseteq \mathbb{N}$ найдётся окрестность U, такая что множество $X \setminus U$ бесконечно. Выведите из этого, что ∞ не является пределом подпоследовательности X.]]

Задача 9.148. Докажите, что для любой последовательности действительных чисел (x_n) и любого её частичного предела a существует ультрафильтр, предел x_n по которому равен a.

[[Начните с определения по (x_n) и a подходящего фильтра на $\mathbb{N}$ и примените теорему **??**.]]

Задача 9.149. Докажите, что если мера m на S соответствует ультрафильтру, то интеграл ограниченных функций $f, g : S \to \mathbb{R}$ по ней обладает не только свойством аддитивности, но и свойством мультипликативности:

$$\int_S fg\ dm = \left(\int_S f\ dm\right) \cdot \left(\int_S g\ dm\right).$$

[[Интерпретируйте неравенство $a < \int_S f\ dm < b$ как $m\{x \in S \mid a < f(x) < b\} = 1$. И заметьте, что в данных условиях пересечение множеств меры 1 обязательно имеет меру 1.]]

Задача 9.150. * Опишите все гомоморфизмы алгебры ограниченных функций на множестве S (с поточечным умножением) в $\mathbb{R}$.

[[Заметьте, что если функция принимает значения в $\{0, 1\}$, то гомоморфизм отправляет её в 0 или 1. Считая такие функции характеристическими функциями подмножеств S сравните это с определением ультрафильтра. Для рассмотрения произвольных функций обратите внимание, что неотрицательная функция является квадратом другой функции и следовательно при гомоморфизме в $\mathbb{R}$ переходит в неотрицательное число; это устанавливает монотонность любого такого гомоморфизма.]]

Задача 9.151. Зафиксируем некоторый ультрафильтр на $\mathbb{N}$. Рассмотрим последовательности действительных чисел и определим для них отношение эквивалентности $(a_n) \sim (b_n)$, если $a_n = b_n$ для множества натуральных чисел n меры 1 относительно выбранного ультрафильтра. Проверьте, что в фактормножестве ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^\mathbb{N}/\sim$ корректно определены сложение, умножение, деление на ненулевой элемент и отношение порядка.

[[Удобно переформулировать $(a_n) \sim (b_n)$ как «$a_n \neq b_n$ на множестве меры нуль». Для определения сравнения заметьте, что либо $a_n < b_n$ на множестве меры 1, либо $a_n > b_n$ на множестве меры 1, либо $a_n = b_n$ на множестве меры 1.]]

Задача 9.152. * Верно ли, что поточечный предел равномерно ограниченной последовательности измеримых по Лебегу функций на $\mathbb{R}$ по некоторому ультрафильтру обязан быть измеримым по Лебегу?

[[Рассмотрите в качестве последовательности функций (f_n) как-то занумерованные все многочлены с рациональными коэффициентами, значения которых обрезаны отрезком $[-1, 1]$. Докажите, что замыкание множества $\{f_n\}$ в топологии декартова произведения $[-1, 1]^\mathbb{R}$ совпадает со всем $[-1, 1]^\mathbb{R}$, и в частности содержит какую-то неизмеримую по Лебегу функцию $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$. Рассматривая всевозможные окрестности $U \ni f$ в топологии декартова произведения, покажите, что множества $X_U = \{n \in \mathbb{N} \mid f_n \notin U\}$ образуют фильтр и погрузите его в некоторый ультрафильтр. Проверьте, чему равен предел f_n по этому ультрафильтру.]]

Задача 9.153. * Докажите, что ультрафильтров на $\mathbb{N}$ столько же, сколько элементов в множестве $2^{2^{\mathbb{N}}}$.

[[Любой ультрафильтр — это элемент $2^{2^{\mathbb{N}}}$ по определению. В силу результата задачи 1.64, остаётся оценить мощность множества ультрафильтров снизу. В этом помогает рассуждение из доказательства предыдущей задачи, сопоставляющее ультрафильтру на $\mathbb{N}$ функцию $\mathbb{R} \to [-1, 1]$.]]

Задача 9.154. Продемонстрируйте, что предел по ультрафильтру может поменяться, если у последовательности отбросить первый элемент, сдвинув нумерацию на единицу.

[[Посмотрите, какие числа предпочитает ультрафильтр — чётные или нечётные.]]

Задача 9.155. Проверьте конечную аддитивность построенной так меры.

Задача 9.156. Постройте единичную конечно-аддитивную и инвариантную относительно сдвигов меру на группе целочисленных векторов $\mathbb{Z}^n$.

[[Модифицируйте описанную выше конструкцию.]]

Задача 9.157. Постройте единичную конечно-аддитивную и инвариантную относительно сдвигов меру на рациональных числах $\mathbb{Q}$.

[[Представьте группу $\mathbb{Q}$ по сложению в виде объединения групп, изоморфных $\mathbb{Z}$, переходя к пределу по ультрафильтру.]]

Задача 9.158. * Постройте единичную конечно-аддитивную и инвариантную относительно сдвигов меру на действительных числах $\mathbb{R}$.

[[Рассматривайте $\mathbb{R}$ как $\mathbb{Q}$-векторное пространство со вполне упорядоченным базисом. Докажите утверждение для его подпространств, соответствующих начальным интервалам базиса, с помощью трансфинитной индукции. Шаг индукции выполняется либо с помощью предела мер по ультрафильтру на вполне упорядоченном множестве, содержащему все его собственные начальные интервалы, либо с помощью прямого умножения $\mathbb{Q}$-векторного пространства на $\mathbb{Q}$, что можно свести к умножению на $\mathbb{Z}$ и переходу к пределу по ультрафильтрам, как в предыдущих задачах.]]

Задача 9.159. * Докажите, что $\mathbb{R}^2$ нельзя разрезать на конечное число частей и сдвинуть их параллельными переносами так, чтобы каждая точка покрывалась сдвинутыми частями не менее двух раз.

[[Используйте утверждение, аналогичное утверждению предыдущей задачи, для плоскости вместо прямой.]]

Задача 9.160. ** Докажите, что сферу $\mathbb{S}^2$ можно разрезать на конечное число частей и повернуть их так, чтобы каждая точка покрывалась повёрнутыми частями не менее двух раз.

[[Используйте результат задачи 10.50, представляя себе свободную группу из двух элементов в виде бесконечного дерева.]]

9.22. **Мера Хаара.**

Задача 9.161. Докажите, что в хаусдорфовой топологической группе G для любых двух $g \neq h \in G$ найдётся окрестность нуля U, такая что $gU \cap hU = \emptyset$.

[[Рассмотрите непересекающиеся окрестности g и h в силу хаусдорфовости, левым сдвигом на g и h сделайте их окрестностями нуля, возьмите их пересечение.]]

Задача 9.162. Является ли локально компактной группой группа действительных чисел по сложению? Группа рациональных чисел по сложению? Группа векторов гильбертова пространства по сложению?

Задача 9.163. Проверьте, что множество $E \subset S$ с $\mu^* E = 0$ измеримо по Каратеодори.

Задача 9.164. Пусть $f : G \to \mathbb{R}$ — борелевская функция на локально компактной хаусдорфовой топологической группе G. Пусть для любого $g \in G$ для почти всех (относительно меры Хаара λ) $h \in G$ выполняется $f(gh) = f(h)$. Докажите, что f равна константе почти всюду.

[[Рассмотрите множество пар (g, h), для которых не выполняется $f(gh) = f(h)$ в произведении $G \times G$. Обоснуйте его борелевость и примените теорему Фубини.]]

Задача 9.165. Постройте меру Хаара иначе на топологических группах G, являющихся гладкими многообразиями с гладкими операциями умножения и взятия обратного, выбрав ненулевой левоинвариантный элемент $\nu \in \Omega^{\dim G}(G)$.

[[Достаточно определить ν на касательном пространстве $T_e G$, а далее распространить на остальные точки по левоинвариантности.]]

Задача 9.166. Пусть G — компактная группа с мерой Хаара μ, а $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ — измеримый гомоморфизм в группу комплексных чисел по умножению. Докажите, что либо $\chi \equiv 1$, либо $\int_G \chi(g) d\mu(g) = 0$.

[[Используйте инвариантность интеграла относительно сдвигов.]]

Задача 9.167. Докажите, что для элемента $\varphi \in L_1(G)$ левый сдвиг на $g \in G$, $\varphi \circ g$, непрерывно зависит от g как элемент $L_1(G)$.

[[Аналогично случаю $G = \mathbb{R}^n$ сведите вопрос к характеристической функции открытого множества U конечной меры Хаара. Найдите компактное $K \subset U$, так что $\mu U - \mu K \leqslant \mu U - \varkappa K < \varepsilon$ и сведите к доказательству утверждения для характеристической функции K. После этого примените лемму **??**.]]

Задача 9.168. Проверьте, что для p-адических чисел определено (и непрерывно) также умножение, превращающее их в кольцо.

[[Используйте умножение в $\mathbb{Z}/p^k$.]]

Задача 9.169. Для элемента $x \in \mathbb{Z}_p$ опишите множество $\langle x \rangle$ элементов $\mathbb{Z}_p$, делящихся на x. Найдите его меру Хаара.

[[Представьте $\mathbb{Z}_p$ в виде объединения сдвигов $\langle x \rangle$.]]

Задача 9.170. Постройте естественное вложение колец $\iota_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$. Взяв их произведение по всем простым числам, получим вложение

$$\iota : \mathbb{Z} \to \prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_p.$$

Докажите, что замыкание образа $\iota(\mathbb{Z})$ совпадает со всем кольцом $\prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_p$.

[[Вспомните китайскую теорему об остатках.]]

10. Комплексный анализ

10.1. **Дифференцируемость в комплексном смысле.**

Задача 10.1. Считая fdz комплекснозначной дифференциальной формой на $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, докажите, что из условия Коши–Римана $\bar{\partial} f = 0$ следует $d(fdz) = 0$.

Задача 10.2. Проверьте, что $\mathbb{C}$-линейный оператор $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ уже не обязательно сохраняет углы между векторами, определённые по отождествлению $\mathbb{C}^2$ с евклидовым пространством $\mathbb{R}^4$.

10.2. **Криволинейный интеграл функции комплексного переменного и интегральная теорема Коши.**

Задача 10.3. Докажите, что в необязательно выпуклом многоугольнике P, если он не треугольник, можно провести диагональ, которая соединяет две его вершины, находится в его внутренности вся, кроме своих концов.

[[Попробуйте провести из одной вершины и посмотрите, что может этому помешать.]]

Задача 10.4. Докажите, что необязательно выпуклый многоугольник P можно разрезать на треугольники.

[[Проводите диагонали до тех пор, пока это возможно.]]

Задача 10.5 (Лемма Жордана в общем случае). ** Докажите, что замкнутая кривая $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ без самопересечений делит плоскость на две части, внутреннюю и внешнюю.

[[Нужно приближать γ ломаной всё ближе и ближе и при этом очень аккуратно обходить технические сложности.]]

10.3. **Первообразная функции комплексного переменного и универсальное накрытие области.**

Задача 10.6. Докажите, что если для области $U \subset \mathbb{C}$ любая функция $\operatorname{Ln}(z-a)$ при $a \notin U$ допускает однозначное определение на U, то область U односвязна.

[[Предполагая неодносвязность, найдите в U простую замкнутую ломаную, которая не стягивается в U в точку, используйте лемму Жордана.]]

10.4. **Интегральная формула Коши и аналитичность.**

Задача 10.7. Докажите, что формула бинома Ньютона

$$(1+z)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$$

выполняется с радиусом сходимости не менее 1. Здесь для логарифма выбирается значение аргумента в пределах $(-\pi/2, \pi/2)$.

[[Это утверждение было тяжело доказать средствами действительного анализа, а в комплексном анализе достаточно проверить аналитичность левой части в круге радиуса 1.]]

Задача 10.8. Пусть аналитическая функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ такова, что $|f(z)| = O(|z|^N)$ при $|z| \to \infty$. Докажите, что она является многочленом от z степени не более N. В частности, ограниченная аналитическая на $\mathbb{C}$ функция является константой.

[[Посчитайте коэффициенты её ряд по степеням z по интегральной формуле, взяв интеграл по окружностям всё большего и большего радиуса.]]

Задача 10.9. Найдите значение условно сходящегося интеграла $\int_0^{+\infty} e^{iz^2}\, dz$.

[[Сначала докажите, что этот интеграл является пределом интегралов e^{iz^2} по лучам $\{re^{i\varphi} \mid r \geqslant 0\}$ при $\varphi \to +0$, используйте для этого признак равномерной сходимости Абеля. Потом докажите, что интеграл по лучу не зависит от выбора луча с $0 < \varphi < \pi/2$, используя интегральную теорему Коши для области, ограниченной двумя отрезками и дугой. Потом рассмотрите луч с $\varphi = \pi/4$.]]

Задача 10.10. Докажите, что если $f = u + iv$ аналитическая, то u и v являются *гармоническими*, то есть для оператора Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ выполняется

$$\Delta u = \Delta v = 0.$$

[[Используйте условия Коши–Римана.]]

Задача 10.11. Докажите, что любая дважды непрерывно дифференцируемая гармоническая функция $u : U \to \mathbb{R}$ в односвязном U является действительной частью некоторой аналитической в U функции.

[[Используйте условия Коши–Римана и достаточные условия наличия потенциала в односвязной области для нахождения подходящей v.]]

10.5. **Ряд Лорана и особенности функции в точке.**

Задача 10.12. Пусть функция f имеет лишь изолированные особенности и все они — полюса, в том числе и в бесконечности. Докажите, что f — рациональная функция.

[[Из компактности особенностей конечное число. Умножив f на многочлен, можно добиться исчезновения полюсов в конечных точках. Далее используйте задачу 10.8.]]

10.6. **Контурные интегралы и вычеты.**

Задача 10.13. Пусть многочлены P и Q таковы, что $\deg P + 2 \leqslant \deg Q = n$, а многочлен Q имеет n различных корней $z_1, \dots, z_n$. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} = 0.$$

[[Используйте формулу вычетов.]]

Задача 10.14. Пусть аналитическая функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ не имеет нулей. Докажите, что тогда она представляется в виде $f(z) = e^{g(z)}$ для некоторой аналитической $g(z)$.

[[Заметьте, что интеграл $d \operatorname{Ln} f(z)$ по любому контуру равен нулю.]]

Задача 10.15. Пусть f аналитическая в области U кроме может быть конечного количества полюсов и непрерывно продолжается на её кусочно-гладкую границу так, что на границе f не обращается в нуль. Докажите, что сумма k-х степеней корней уравнения $f(z) = 0$ с учётом кратностей будет равна

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} z^k d \operatorname{Ln} f(z).$$

[[Рассуждайте так же, как при доказательстве принципа аргумента.]]

10.7. **Аналитические продолжения функций.**

Задача 10.16. Найдите радиус сходимости ряда для $\operatorname{tg} z$ с центром в нуле.

[[Найдите ближайшую особенность.]]

Задача 10.17. Проверьте, что

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}\, dx$$

корректно определяет гамма-функцию при $\operatorname{Re} z > 0$ как аналитическую функцию, если мы считаем $x^{z-1} = e^{(z-1)\ln x}$. Докажите, что она продолжается до аналитической функции, определённой для всех комплексных чисел, кроме полюсов в неположительных целых числах.

[[Используйте верную при $\operatorname{Re} z > 0$ формулу $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$, чтобы последовательно строить продолжение на области $\operatorname{Re} z > -n$; или используйте формулу дополнения $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$.]]

Задача 10.18. Проверьте, что

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

корректно определяет дзета-функцию при $\operatorname{Re} z > 1$ как аналитическую функцию, если мы считаем $n^z = e^{z\ln n}$. Докажите, что её можно продолжить на область $\operatorname{Re} z > 0$ так, что у неё будет только один полюс в $z = 1$.

[[Рассмотрите разность $\zeta(z) - \int_1^{+\infty} x^{-z}\ dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{-z} - \int_n^{n+1} x^{-z}\, dx\right)$ и докажите, что она сходится к аналитической при $\operatorname{Re} z > 0$ функции.]]

Задача 10.19. Докажите, что если $f \in L_1(\mathbb{R})$ имеет компактный носитель, то её преобразование Фурье аналитически продолжается на $\mathbb{C}$.

[[Проверьте абсолютную сходимость и комплексную дифференцируемость для интеграла в определении преобразования Фурье.]]

Задача 10.20. Докажите, что если $f \in L_1(\mathbb{R})$ обращается в нуль при $x > 0$, то её преобразование Фурье даёт аналитическую в верхней полуплоскости $H = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ функцию, которая непрерывно продолжается до $\partial H = \mathbb{R}$ и стремится к нулю, когда $z \to \infty$.

[[Проверьте абсолютную сходимость и комплексную дифференцируемость для интеграла в определении преобразования Фурье, также вспомните лемму Римана об осцилляции.]]

10.8. **Открытость и принцип максимума.**

Задача 10.21. Докажите, что для аналитической $f : U \to \mathbb{C}$ локальный минимум $|f(z)|$ может достигаться только при $f(z) = 0$.

[[Действуйте аналогично доказательству принципа максимума.]]

Задача 10.22. Докажите, что для аналитической $f : U \to \mathbb{C}$ функция $|f(z)|$ *субгармоническая*, то есть для оператора Лапласа выполняется

$$\Delta|f(z)| \geqslant 0.$$

[[Можно заметить для начала, что $\ln|f(z)|$ является гармонической.]]

Задача 10.23. Пусть $f(z)$ аналитична в кольце $r < |z| < R$. Докажите, что функция действительного аргумента

$$g(x) = \ln\sup\{|f(z)| \mid |z| = e^x\}$$

выпукла на $(\ln r, \ln R)$.

[[Заметьте, что функция $\ln|z|^\alpha|f(z)|$ гармоническая и примените для неё принцип максимума при подходящих $\alpha \in \mathbb{R}$.]]

10.9. **Свойство компактности для аналитических функций.**

Задача 10.24. Докажите, что условие $f(z_0) = 0$ в формулировке теоремы не требуется.

[[Можно взять композицию f с конформным преобразованием круга $U_M(0)$, переводящим $f(z_0)$ в 0, см. раздел **??**.]]

10.10. **Конформные отображения.**

Задача 10.25. Докажите, что если аналитическая функция $f : U \to V$ биективна, то можно взять замкнутый контур $\gamma \subset V$ и на внутренности $f(\gamma)$ будет верна формула

$$f^{-1}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{zf'(z)}{f(z) - \zeta}\, dz,$$

[[Это на самом деле обобщение принципа аргумента для решения уравнений $f(z) = \zeta$; иначе эту формулу можно рассматривать как формулу Коши для f^{-1} с заменённой переменной.]]

Задача 10.26. Докажите, что конформные преобразования $f : S \to S$ могут перевести любую упорядоченную тройку попарно различных точек $\{a, b, c\} \subset S$ в любую другую упорядоченную тройку попарно различных точек $\{a', b', c'\} \subset S$, и что конформное преобразование $f : S \to S$ однозначно определяется упорядоченным набором

$$\{\{a, b, c\}, \{f(a), f(b), f(c)\}\}.$$

[[Переведите одну точку в нуль, другую в бесконечность, и посмотрите, что делать с оставшейся точкой, если нуль и бесконечность уже нельзя двигать.]]

Задача 10.27. Докажите, что конформные преобразования $f : S \to S$ сохраняют *двойное отношение* (*ангармоническое отношение*) упорядоченной четвёрки попарно различных точек

$$D(a, b, c, d) = \frac{(d - a)(b - c)}{(b - a)(d - c)}.$$

[[Заметьте, что это достаточно доказать для преобразований вида $z \mapsto az + b$ (выражение очевидно сохраняется) и отображения $z \mapsto 1/z$. Заметьте также, что $D(a, b, c, d) \in S$ по непрерывности можно определить для случаев $d = a$, $d = b$, $d = c$, если a, b, c остаются попарно различными.]]

Задача 10.28. Докажите, что при фиксированных попарно различных $a, b, c \in S$ условие

$$D(a, b, c, z) \in \mathbb{R}$$

определяет прямую или окружность, проходящую через a, b, c. Выведите, что конформные преобразования S переводят прямую или окружность в прямую или окружность.

[[Можно посчитать в координатах, а можно для начала перевести a, b, c на действительную прямую.]]

Задача 10.29. Пусть конформное отображение переводит кольцо $r < |z| < R$ в другое кольцо на комплексной плоскости и продолжается до непрерывного отображения границы кольца в границу нового кольца. Докажите, что отношение R/r при таком отображении сохраняется.

[[С помощью инверсий и теоремы о склеивании продолжите f на всю сферу Римана S.]]

Задача 10.30. Докажите, что найденные конформные отображения $D \to D$ сохраняют риманову метрику

$$g(X, Y) = \frac{(X, Y)}{(1 - |z|^2)^2},$$

если вектора X, Y находятся в точке z.

[[Выпишите производную дробно-линейного f и найдите её детерминант как действительно-двумерного линейного оператора.]]

Задача 10.31. * Пусть при конформном отображении $f : Q \to \mathbb{C}$ образ единичного квадрата Q (мы считаем отображение непрерывно продолженным на границу) имеет площадь S, и пусть I и J — две его противоположные стороны. Докажите, что $\operatorname{dist}(f(I), f(J)) \leqslant \sqrt{S}$

[[Заметьте, что за изменение длины кривой при конформном отображении отвечает $|f'(z)|$, а за изменение площади — $|f'(z)|^2$.]]

Задача 10.32. * Пусть f — аналитическая функция на единичном круге. Докажите, что длина кривой $\Gamma_r = \{f(re^{i\varphi})\}_{\varphi=0}^{2\pi}$ монотонно возрастает с ростом $r \in [0, 1)$.

[[Выпишете явную формулу для длины и заметьте, что $|f'(z)|$ является субгармонической.]]

10.11. **Теорема Римана об отображении.**

Задача 10.33. Найдите какое-нибудь конформное отображение $H \to D$, где H — верхняя полуплоскость $H = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.

[[Поищите среди дробно-линейных.]]

Задача 10.34. Найдите какое-нибудь конформное отображение для полукруга, $H \cap D \to D$.

[[Дробно-линейным образом превратите полукруг в квадрант $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0\}$. Примените $\sqrt{z}$ и далее действуйте дробно-линейно.]]

Задача 10.35. Докажите, что конформные преобразования верхней полуплоскости H имеют вид

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0.$$

[[Можно воспользоваться тем, что H конформно эквивалентна D.]]

10.12. **Накрытия многообразий и универсальное накрытие.**

Задача 10.36. В доказательстве предыдущей теоремы проверьте счётность базы топологии универсального накрытия, чтобы можно было считать его абстрактным многообразием.

[[С помощью какой-то римановой метрики покройте N счётным числом геодезически выпуклых открытых $\{U_i\}$. Заметьте, что их попарные пересечения тоже геодезически выпуклы или пусты. Потом аккуратно объясните, что всякий путь в N гомотопен конечной конкатенации геодезических (*ломаной*) в N, точки конкатенации (излома) при этом лежат в предписанном не более чем счётном множестве точек $P \subset N$, которые выбраны по одной в каждом U_i и в каждом непустом пересечении $U_i \cap U_j$.]]

Задача 10.37. Докажите, что для накрытия $\pi : M \to N$ при связном N кратность накрытия над всеми точками N одна и та же.

[[Постройте биекцию между $\pi^{-1}(p)$ и $\pi^{-1}(p')$ с помощью поднятия какого-то пути γ из p в p'.]]

10.13. **Фундаментальная группа многообразия.**

Задача 10.38. Докажите, что сфера $\mathbb{S}^n$ односвязна при $n \geqslant 2$. Что происходит при $n = 1$?

[[Приблизьте произвольную петлю гладкой, или даже ломаной, а потом стяните её.]]

Задача 10.39. Найдите фундаментальную группу проективного пространства $\mathbb{R}P^n$ при $n \geqslant 2$.

[[Вспомните его определение и накройте его сферой.]]

Задача 10.40. Пусть отображение групп Ли $\tau : H \to G$ имеет дискретное ядро K, $G = H/K$ и группа H односвязна. Пусть $\pi : \widetilde{G} \to G$ — универсальное накрытие. Докажите, что существует изоморфизм групп Ли $f : \widetilde{G} \to H$, такой что $\tau \circ f = \pi$.

[[Проверьте, что τ является накрытием, тогда гомеоморфизм (и диффеоморфизм) f даётся теоремой **??**. Остаётся проверить, что это будет гомоморфизм групп Ли. Полезно посмотреть на отображение $(g, h) \mapsto f(g)f(h)f(gh)^{-1}$ и его композицию с τ.]]

Задача 10.41. Докажите, что определённая выше групповая операция на ядре универсального накрытия $\widetilde{G} \to G$ связной группы Ли совпадает с групповой операцией на фундаментальной группе $\pi_1(G)$.

[[С помощью перепараметризации заметьте, что всякая петля $\gamma : [0, 1] \to G$ гомотопна петле $\gamma_0 : [0, 1] \to G$, такой что $\gamma_0 \equiv e$ на отрезке $[0, 1/2]$. И гомотопна петле $\gamma_1 : [0, 1] \to G$, такой что $\gamma_1 \equiv e$ на отрезке $[1/2, 1]$.]]

Задача 10.42. Докажите, что дискретная нормальная подгруппа K связной группы Ли G (в частности, ядро универсального накрытия $\widetilde{G} \to G$) лежит в центре G.

[[Попробуйте сопрягать K элементами группы G.]]

Задача 10.43. Найдите фундаментальную группу тора $T^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n}$.

[[Придумайте универсальное накрытие для тора.]]

Задача 10.44. * Докажите, что группа собственных вращений трёхмерного евклидова пространства $\mathrm{SO}(3)$ имеет фундаментальную группу $\pi_1(\mathrm{SO}(3))$ из двух элементов.

[[Рассмотрите группу единичных кватернионов

$$\mathrm{Sp}(1) = \{a + bi + cj + dk \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\},$$

умножение в которой определяется с помощью продолженных по линейности формул

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = k,\ jk = i,\ ki = j,\ ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j.$$

Заметьте, что $\mathrm{Sp}(1)$ односвязна и для $q \in \mathrm{Sp}(1)$ отображение $v \mapsto qvq^{-1}$ является собственным ортогональным вращением пространства мнимых кватернионов $\{xi + yj + zk\}$.]]

Задача 10.45. * Докажите, что группа собственных вращений четырёхмерного евклидова пространства $\mathrm{SO}(4)$ тоже имеет фундаментальную группу $\pi_1(\mathrm{SO}(4))$ из двух элементов.

[[Определите действие $\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)$ на всех кватернионах как $v \mapsto q_1 v q_2^{-1}$ и докажите, что так получаются все собственные четырёхмерные вращения. Определите неоднозначность такого представления вращений.]]

10.14. **Общая теорема Римана и теорема Пикара.**

Задача 10.46. * Докажите, что $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ можно непрерывно деформировать в «восьмёрку» E, которая является парой окружностей, склеенных по одной точке. Фундаментальная группа, являющаяся гомотопическим инвариантом, при этом не изменится, проверьте явно, что $\pi_1(E)$ описывается так, как мы описали свободную группу $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

[[Для описания $\pi_1(E)$ посмотрите, в каком порядке петля идёт по двум окружностям восьмёрки E, получив запись в виде строки типа (**??**). Проверьте, как может меняться этот порядок при гомотопии петли, получив из этого описанные выше преобразования строк и обратные к ним.]]

Задача 10.47. * Докажите, что $z \mapsto z+2$ и $z \mapsto \frac{z}{2z+1}$ порождают свободную группу из двух элементов.

[[Для этого достаточно описать какую-нибудь орбиту действия порождённой этими элементами группы.]]

Задача 10.48. * Докажите, что группа $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ не может вполне разрывно конформно действовать на D или H.

[[Классифицируйте конформные преобразования $H \to H$, которые не имеют неподвижных точек, потом опишите пары коммутирующих преобразований.]]

Задача 10.49. * Докажите, что любая комплексная структура на торе T^2 (декартовом произведении двух окружностей) происходит из комплексной структуры $\mathbb{C}$ после взятия фактора по некоторой решётке $L \subset \mathbb{C}$, то есть дискретной подгруппы, изоморфной $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

[[Заметьте, что $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ и выведите утверждение из общей теоремы Римана об отображении и предыдущей задачи.]]

Задача 10.50. ** Докажите, что группа $\mathrm{SO}(3)$ содержит свободную группу F_2.

[[Можно строить такую F_2 вручную, можно использовать рациональные кватернионы, можно заметить, что комплексификации $\mathrm{SO}(3)$ и $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ совпадают и поэтому в обеих группах нет нетривиальных соотношений на пару элементов.]]