

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
11 МАЯ 2025 ГОДА

1. Пусть $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема и $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = 0$. Верно ли, что существует конечный или бесконечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$?

Ответ: верно.

Решение. Найдём предел с помощью правила Лопиталя

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)'e^x + f(x)e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)' + f(x)) = 0.$$

2. Пусть в квадратной матрице A внедиагональные элементы неположительные, а сумма элементов в каждой строке положительная. Докажите, что:

а) матрица A обратима;

б) в обратной матрице A^{-1} в каждом столбце диагональный элемент — самый большой по модулю.

Решение. Если матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ вырождена, то $Ax = 0$ для некоторого ненулевого вектора x . Пусть x_i максимально по модулю среди элементов вектора x , домножив вектор на ненулевое число, можно считать, что $x_i = 1$. Тогда

$$\sum_j a_{ij}x_j = a_{ii}x_i + \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j = a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j.$$

Последняя сумма в силу неположительности a_{ij} и положительности их суммы с a_{ii} по модулю оценивается как

$$\left| \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < a_{ii}.$$

Получается, что i -я координата Ax не может быть нулевой. Это противоречие с предположением о вырожденности A доказывает пункт (а).

Для доказательства пункта (б) заметим, что i -й столбец обратной матрицы x удовлетворяет равенству $Ax = e_i$, где e_i — i -й базисный столбец. Если максимальный по модулю элемент x обнаружился на месте $j \neq i$, то рассуждение выше показывает, что j -я координата Ax не равна нулю. Так что x_i должен быть единственным максимальным по модулю элементом вектора x .

3. Пусть f и g — две ограниченные 2π -периодические функции α и β — два числа. Предположим, что функция $f(t) - f(t + \alpha) + g(t) - g(t + \beta)$ оказалась интегрируемой по Риману на любом конечном отрезке. Найдите возможные значения её интеграла по отрезку $[0, 2\pi]$.

Ответ: 0.

Решение. Пусть функции f и g ограничены числом M . Ясно, что выписанная функция ограничена числом $4M$, так что её интеграл по периоду $[0, 2\pi]$ является конечным числом I . Кроме того, любая функция

$$h_{n,m}(t) = f(t + n\alpha + m\beta) - f(t + (n+1)\alpha + m\beta) + g(t + n\alpha + m\beta) - g(t + n\alpha + (m+1)\beta)$$

отличается от данной функции только сдвигом, а значит имеет тот же интеграл Римана I по периоду. Предположим, что $I \neq 0$, тогда сумма

$$S(t) = \sum_{n,m=0}^{N-1} h_{n,m}(t)$$

имеет интеграл IN^2 . С другой стороны, в этой сумме многие слагаемые сокращаются, а остаётся только

$$S(t) = \sum_{m=0}^{N-1} (f(t + m\beta) - f(t + N\alpha + m\beta)) + \sum_{n=0}^{N-1} (g(t + n\alpha) - g(t + n\alpha + N\beta)),$$

что по модулю не более $4MN$. Так что интеграл $S(t)$ по периоду по модулю не более $8\pi MN$, что меньше IN^2 при достаточно больших N — противоречие.

В качестве примера возможности значения 0 достаточно рассмотреть функции f и g тождественно равные нулю.

4. Предположим, что круг разрезан на $m > 2$ замкнутых выпуклых частей равного периметра, и имеющих равную длину пересечения с границей круга, окружностью. Верно ли, что все части являются одинаковыми секторами?

Ответ: верно.

Решение. Пусть круг D единичный с центром в точке o . Пусть $p_m = 2 + 2\pi/m$ — периметр сектора стандартного деления круга D на m равных секторов. Пусть часть нашего разбиения Q содержит центр o . Рассмотрев два случая, мы покажем, что её периметр удовлетворяет неравенству $p(Q) \geq p_m$.

Случай 1: внешняя часть $\partial Q \cap \partial D$ содержится в дуге A окружности ∂D длины $\leq \pi$. Рассмотрев минимальную такую дугу A , мы можем считать, что её концы x и y лежат в Q . Пусть Q' — это выпуклая оболочка $\partial Q \cap \partial D$ и o , тогда отрезки xo и oy являются частью её границы. Периметр Q' не менее длины $\partial Q \cap \partial D$ (что равно $2\pi/m$ по предположению задачи) плюс сумма длин отрезков xo и oy . В сумме это не менее p_m . Так как периметр является монотонной функцией выпуклой фигуры, $p(Q) \geq p(Q') \geq p_m$ следует из включения $Q \supseteq Q'$.

Случай 2: внешняя часть $\partial Q \cap \partial D$ не содержится ни в какой дуге окружности ∂D длины $\leq \pi$. Суммарная длина внешней части периметра равна $2\pi/m$. Пусть её дополнение в ∂D состоит из дуг длин $0 < \beta_i < \pi$. Тогда внутренняя часть периметра Q , длина $\partial Q \setminus \partial D$, оценивается снизу суммой длин соответствующих хорд

$$\sum_i 2 \sin \beta_i / 2.$$

Так как $\sin$ вогнутый на рассматриваемом промежутке, минимизация суммы при условии $\sum_i \beta_i = 2\pi - 2\pi/m$ заставляет сделать все β_i кроме может быть одного

равными 0 или π . Если один из углов β_i равен π , то длина внутренней части не менее $2 = p_m - 2\pi/m$ и мы получаем требуемое. Если все кроме одного β_i равны нулю, то единственный ненулевой β_i равен $2\pi - 2\pi/m > \pi$, то есть такого в наших предположениях не бывает.

Пусть теперь дуга дополнения $\partial D \setminus \partial Q$ разбита на части, принадлежащие меняющимся частям разбиения точками $x_0, x_1, \dots, x_n$ в порядке против часовой стрелки, так что x_0 и x_n лежат в Q . Пусть дуга $x_{i-1}x_i$ принадлежит части разбиения $Q_{j(i)}$, и пусть v_{i-1} и w_i — направления вдоль $\partial Q_{j(i)}$ во внутрь D в точках x_{i-1} и x_i соответственно.

Так как Q содержит центр o и, следовательно, отрезок x_0o , v_0 направлено (не строго) справа от направления из x_0 в центр o . Если w_1 (не строго) слева от направления на центр из x_1 , то $Q_{j(1)}$ (из его выпуклости) содержится в секторе $x_{j-1}x_j * o$. Тогда $p(Q_{j(1)})$ не более периметра этого сектора. А так как длина дуги x_0x_1 не более $2\pi/m$, то $p(Q_{j(1)}) \leq p_m$.

Иначе w_1 строго справа от направления на центр из x_1 , и то же относится к v_1 . Рассуждая таким же образом, мы либо обнаруживаем $p(Q_{j(i)}) \leq p_m$ для некоторого i , либо в конце приходим к тому, что w_n строго справа от направления на центр из x_n , что противоречит $x_nc \subset Q$.

Мы установили, что $p(Q) \geq p_m$ и $p(Q_j) \leq p_m$ для некоторой другой части Q_j разбиения. Следовательно, общее значение периметра равно p_m . Рассмотрим $Q \ni o$ снова. Случай равенства $p(Q) = p_m$ в рассуждениях выше (с учётом строгой монотонности периметра по включению) возможен, только если $\partial Q \cap \partial D$ является одной дугой длины $2\pi/m$ и Q само является стандартным сектором периметра p_m .

Пусть $k < m$ из частей содержат центр o , тогда все они являются стандартными секторами. Рассматривая ситуацию в любой окрестности o , мы видим, что ещё какая-то часть разбиения должна содержать o . В итоге все части разбиения содержат o и являются стандартными секторами.