

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
11 МАЯ 2025 ГОДА

1. Пусть $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема и $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = 0$. Верно ли, что существует конечный или бесконечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$?
2. Пусть в квадратной матрице A внедиагональные элементы неположительные, а сумма элементов в каждой строке положительная. Докажите, что:
 - а) матрица A обратима;
 - б) в обратной матрице A^{-1} в каждом столбце диагональный элемент — самый большой по модулю.
3. Пусть f и g — две ограниченные 2π -периодические функции α и β — два числа. Предположим, что функция $f(t) - f(t + \alpha) + g(t) - g(t + \beta)$ оказалась интегрируемой по Риману на любом конечном отрезке. Найдите возможные значения её интеграла по отрезку $[0, 2\pi]$.
4. Предположим, что круг разрезан на $m > 2$ замкнутых выпуклых частей равного периметра, и имеющих равную длину пересечения с границей круга, окружностью. Верно ли, что все части являются одинаковыми секторами?