СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
19 МАЯ 2024 ГОДА

1. Найдите интеграл по кругу

$$\int_{x^2+y^2\le 1} e^x \cos y \, dxdy.$$

Ответ: π.

Решение. Функция гармоническая, поэтому среднее значение функции на круге равно её значению в центре круга.

Более элементарное объяснение. Можно обозначить $z = x + iy$ и заметить, что надо найти действительную часть интеграла $\int_{|z|\le 1} e^z \, dxdy$. Напрямую проверяется, что интеграл z^k по любой окружности $|z| = r$ равен нулю при $k \neq 0$, а значит и интеграл по кругу тоже. Тогда при разложении экспоненты в ряд Маклорена интегрировать придётся только единицу, что даёт ответ π. Переставить суммирование и интегрирование можно, так как на круге ряд Маклорена для экспоненты сходится равномерно по признаку Вейерштрасса.

2. Пусть матрица S ортогональна, а матрица $I - S$ обратима, где I — единичная матрица того же размера, что S. Докажите, что значение выражения $x^T(I - S)^{-1}x$ не зависит от действительного единичного вектора x и найдите это значение.

Ответ: $1/2$.

Решение. Заметим, что в силу тождества $(AB)^T = B^T A^T$ взятие обратной матрицы и транспонирование можно переставить. Тогда положим $Q = (I - S)^{-1}$ и напишем с учётом ортогональности S:

$$Q^T = \left((I-S)^{-1}\right)^T = (I - S^T)^{-1} = (SS^T - S^T)^{-1} = (S - I)^{-1}\left(S^T\right)^{-1} = -(I - S)^{-1}S.$$

Тогда

$$Q + Q^T = (I - S)^{-1} - (I - S)^{-1}S = (I - S)^{-1}(I - S) = I.$$

Заметив, что $x^T Q x = x^T Q^T x$, получаем

$$x^T Q x = \frac{1}{2}x^T(Q + Q^T)x = \frac{1}{2}x^T x.$$

3. Верно ли, что если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и принимает рациональные значения в рациональных точках, то хотя бы в одной точке она дифференцируема?

Ответ: нет.

Решение. Пусть функция φ является 1-периодической и равной $|x|$ на отрезке $[-1/2, 1/2]$. Зададим f рядом

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{4^k}\varphi(4^k x).$$

Это один из классических примеров непрерывной и нигде не дифференцируемой функции. Непрерывность следует из равномерной сходимости по признаку Вейерштрасса.

Отсутствие дифференцируемости f в точке x доказывается следующим образом. Для данного натурального n можно найти целое m и числа

$$x'_n = \frac{m}{4^{n+1}} \leq x \leq \frac{m+1}{4^{n+1}} = x''_n,$$

а потом посчитать отношение (в определении f ненулевой вклад дадут только члены с $0 \leq k \leq n$)

$$\frac{f(x''_n) - f(x'_n)}{x''_n - x'_n} = \pm 1 \pm 3 \pm \dots \pm 3^n,$$

где знаки $\pm$ мы не будем определять. Независимо от знаков, модуль этого выражения не менее

$$3^n - 1 - 3 - \dots - 3^{n-1} = 3^n - \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{3^n}{2} + \frac{1}{2} \to +\infty.$$

Так как $x'_n \to x - 0$ и $x''_n \to x + 0$, то полученное утверждение

$$\frac{f(x''_n) - f(x'_n)}{x''_n - x'_n} \to \infty$$

противоречит дифференцируемости f в точке x (которая заставила бы это выражение стремиться к $f'(x)$)

Пусть теперь x рационально. Тогда его запись в 4-ичной системе счисления периодична с некоторого момента и, следовательно, последовательность $\varphi(4^n x)$ является периодической с некоторого момента последовательностью рациональных чисел. Пусть её период равен N. Тогда сумма в определении f есть сумма рационального числа и суммы нескольких рациональных чисел, умноженных на $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{-kN}}{4^{-kN}}$. Последнее выражение тоже рационально в силу явной формулы геометрической прогрессии.

4. В некотором конечном наборе положительных чисел каждое число выражается как линейная комбинация остальных с рациональными неотрицательными коэффициентами. Докажите, что отношение каких-то двух чисел в наборе рационально.

Решение. Докажем утверждение индукцией по количеству n чисел $x_1, \dots, x_n > 0$. Случай $n = 2$ очевиден. Иначе рассмотрим существующие по условию задачи равенства

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i, \quad x_k = \sum_{1 \leq j \leq n,\ j \neq k} b_j x_j$$

с неотрицательными рациональными a_i и b_j. Подставим первое во второе

$$x_k = \sum_{1 \leq j \leq n-1,\ j \neq k} b_j x_i + \sum_{i=1}^{n-1} b_n a_i x_i.$$

В этом равенстве все слагаемые неотрицательные.

В правой части есть слагаемое $b_n a_k x_k$. Если выполняется равенство $b_n a_k = 1$, то все остальные слагаемые равны нулю, и выполняется равенство $x_k = b_n x_n$. Это то, что требуется в задаче. Иначе из неотрицательности всех слагаемых следует $b_n a_k < 1$. Тогда перенеся $b_n a_k x_k$ в левую часть и поделив на $(1 - b_n a_k)$, получим выражение

x_k в виде линейной комбинации x_j, $1 \le j \le n-1$, $j \ne k$, с неотрицательными рациональными коэффициентами.

Проведя эти рассуждения для всех $k = 1, \dots, n-1$ мы либо сразу получим требуемую в условии пару чисел, либо сведём задачу к случаю $n-1$ числа.

Более наукообразное решение. Рассмотрим $\mathbb{R}$ как векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$. Пусть наши числа $v_1, \dots, v_n$ порождают в нём конечномерное подпространство V. Естественное вложение $V \to \mathbb{R}$ есть линейное отображение $\lambda : V \to \mathbb{R}$, для которого $\lambda(v_i) > 0$ для любого i. Пусть для определённости $\lambda(v_i) > \varepsilon$.

Пусть после подходящей перенумерации $v_1, \dots, v_k$ составляют базис V, а остальные векторы v_i выражаются через базис с рациональными коэффициентами по модулю не большими некоторого $M \ge 1$. Поменяем значения λ на базисных векторах $v_1, \dots, v_k$ так, чтобы они изменились не более чем на $\frac{\varepsilon}{kM}$. Тогда значения λ на всех векторах v_i изменятся не более чем на ε, то есть останутся положительными. После этого λ можно будет считать линейным функционалом $\lambda : V \to \mathbb{Q}$, положительным на всех v_i.

Теперь мы можем работать с векторными пространствами и линейными функционалами над полем $\mathbb{Q}$. Мы должны доказать, что какие-то два вектора из v_i пропорциональны. Заменим их на $u_i = v_i/\lambda(v_i)$, тогда $\lambda(u_i) = 1$. В силу положительности $\lambda(v_i)$ и условия задачи мы знаем, что каждый вектор u_i является неотрицательной комбинацией остальных,

$$u_i = \sum_{j \ne i} c_{ij} u_j, \quad c_{ij} \ge 0.$$

Применяя к этому равенству λ, получаем

$$1 = \sum_{j \ne i} c_{ij},$$

Мы должны доказать, что какие-то два из векторов u_i совпадают. Дальнейшее рассуждение геометрически очевидно, но мы приведём его алгебраическое изложение.

Предположим противное, $u_i \ne u_j$ при $i \ne j$. Тогда множество линейных функционалов $\mu : V \to \mathbb{Q}$, таких что $\mu(u_i) = \mu(u_j)$, есть гиперплоскость в двойственном V^*. Так как V^* не является объединениям конечного числа гиперплоскостей, то для некоторого линейного функционала μ все числа $\mu(u_i)$ будут различны. Рассмотрим такой линейный функционал и максимальное из этих чисел — $\mu(u_m)$. По предположению,

$$u_m = \sum_{j \ne m} c_{mj} u_j, \quad \sum_{j \ne m} c_{mj} = 1.$$

Применяя к первому равенству μ и используя второе равенство, получаем

$$\mu(u_m) = \sum_{j \ne m} c_{mj} \mu(u_j) \le \sum_{j \ne m} c_{mj} \mu(u_m) = \mu(u_m).$$

Так как на самом деле получено равенство, то $\mu(u_j) = \mu(u_m)$ для тех $j \ne m$, для которых $c_{mj} > 0$. Так как это выполняется хотя бы один раз (сумма всех c_{mj} положительна), то мы получаем противоречие.