

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
19 МАЯ 2024 ГОДА

1. Найдите интеграл по кругу

$$\int_{x^2+y^2 \leq 1} e^x \cos y \, dx dy.$$

2. Пусть матрица S ортогональна, а матрица $I - S$ обратима, где I — единичная матрица того же размера, что S . Докажите, что значение выражения $x^T(I - S)^{-1}x$ не зависит от действительного единичного вектора x и найдите это значение.

3. Верно ли, что если функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и принимает рациональные значения в рациональных точках, то хотя бы в одной точке она дифференцируема?

4. В некотором конечном наборе положительных чисел каждое число выражается как линейная комбинация остальных с рациональными неотрицательными коэффициентами. Докажите, что отношение каких-то двух чисел в наборе рационально.