СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
21 МАЯ 2023 ГОДА

1. В $\mathbb{R}^n$ дан $n-1$ вектор, координаты каждого — целые числа с нулевой суммой. Докажите, что $(n-1)$-мерный объём $(n-1)$-мерного параллелепипеда P, натянутого на эти векторы, является произведением целого числа и $\sqrt{n}$.

Решение. Добавим к нашим векторам $v_1, \dots, v_{n-1}$ вектор базиса e_n. Тогда все векторы в этой системе целочисленные и объём полученного из них параллелепипеда $\bar{P}$ является целым числом. С другой стороны, по формуле объёма (или по формуле сведения кратного интеграла к повторному)

$$\operatorname{vol} \bar{P} = \operatorname{vol}_{n-1} P \cdot h,$$

где h — высота $\bar{P}$, то есть расстояние от вектора e_n до гиперплоскости $x_1 + \dots + x_n = 0$. Легко подсчитать, что $h = \frac{1}{\sqrt{n}}$, и тогда

$$\operatorname{vol}_{n-1} P = \operatorname{vol} \bar{P} \cdot \sqrt{n},$$

что и требовалось доказать.

Другое решение. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим сначала пример для векторов $\{b_i = e_i - e_n\}_{i=1}^{n-1}$, удовлетворяющих условию задачи. $(n-1)$-мерный объём параллелепипеда равен по определению

$$\operatorname{vol}_{n-1} P = \sqrt{\det(b_i, b_j)}.$$

При этом матрица Грама $G_b = (b_i, b_j)$ равна $I + J$, где I — единичная матрица $(n-1) \times (n-1)$, а J — матрица того же размера из одних единиц. Очевидно, что собственные значения матрицы J равны $n-1, 0, 0, \dots, 0$ (ненулевое соответствует вектору $(1, 1, \dots, 1)^T$). Значит собственные значения G_b равны $n, 1, 1, \dots, 1$ и её определитель равен n. То есть в данном случае

$$\operatorname{vol}_{n-1} P = \sqrt{n}.$$

Заметим, что если есть другой набор $(c_i)_{i=1}^{n-1}$ векторов с целыми координатами и нулевыми суммами координат, то

$$c_i = \sum_j a_{ij} b_j$$

для некоторой целочисленной матрицы $A = (a_{ij})$ размера $(n-1) \times (n-1)$. Тогда для матрицы Грамма получаем

$$G_c = A^T G_b A \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\det G_c} = |\det(A)| \sqrt{\det G_b} = |\det(A)| \sqrt{n},$$

что и требовалось доказать.

2. Пусть $A = (a_{ij})$ — симметричная матрица из действительных чисел. Докажите неравенство

$$\sum_i e^{a_{ii}} \le \operatorname{tr} e^A.$$

Решение. Пусть матрица A, как квадратичная форма, в некотором базисе имеет диагональный вид Λ со значениями на диагонали $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, тогда

$$\operatorname{tr} e^A = e^{\lambda_1} + \dots + e^{\lambda_n}.$$

Из матричной формулы $A = S^T \Lambda S$ с ортогональной матрицей $S = (s_{ij})$ мы выразим диагональные элементы A:

$$a_{ii} = \sum_j s_{ji} \lambda_j s_{ji} = \sum_j s_{ji}^2 \lambda_j.$$

Заметим, что $\sum_j s_{ji}^2 = 1$ из ортогональности S, а значит можно применить выпуклость экспоненты и оценить

$$e^{a_{ii}} \le \sum_j s_{ji}^2 e^{\lambda_j}.$$

Сложив такие неравенства по всем i и используя ещё раз ортогональность в виде $\sum_i s_{ji}^2 = 1$, получим требуемое в задаче неравенство

$$\sum_i e^{a_{ii}} \le \sum_j e^{\lambda_j}.$$

3. Докажите, что если множество $X \subset \mathbb{S}^n$ занимает больше половины риманова объёма единичной сферы $\mathbb{S}^n$, то множество всевозможных геодезических отрезков длины не более π с концами в множестве X покрывает всю сферу. *Геодезическая на сфере* $\mathbb{S}^n$ — это кривая, лежащая на некоторой окружности пересечения сферы $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ двумерным линейным подпространством $L \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Решение. По ошибке в условии было написано «не более π», что делает задачу тривиальной. Для решения в такой формулировке достаточно найти точки x и $-x$, одновременно лежащие в множестве X, и проводить через них всевозможные геодезические длины π. Далее приведено решение для варианта «менее π».

Предположим, что точка $p \in \mathbb{S}^n$ не принадлежит ни одному отрезку геодезической длины менее π с концами в X. В частности $p \notin X$. Возьмём геодезическую окружность $C \ni p$ и посмотрим геодезические дуги на ней.

Если на C нет содержащей p дуги длины менее π с концами в X, то это означает, что на C есть открытая дуга длины π без точек множества X вообще. Эту дугу можно определить как разность C и отрезка $[\sup X \cap C, \inf X \cap C]$ множества $C \setminus \{p\}$, рассматриваемого как интервал. Следовательно, для всех точек $x \in C$, кроме быть может двух, выполняется утверждение: из пары противоположных точек $x, -x$ не более одной принадлежит множеству X.

Рассматривая всевозможные $C \ni p$ и применяя теорему Фубини для множества меры нуль на произведении $S^{n-1} \times (0, \pi)$, диффеоморфном $S^n \setminus \{p, -p\}$, получаем, что для почти всех точек $x \in \mathbb{S}^n$ (кроме множества меры нуль) выполняется утверждение: из пары противоположных точек $x, -x$ не более одной принадлежит множеству X. Следовательно, X пересекается со своим антиподом $-X$ того же объёма по множеству меры нуль. Значит, риманов объём X не более половины объёма сферы — противоречие.

Из того, что X покрывает более половины окружности, не следует, что $C \cap X$ — это более половины окружности C при каком-то выборе $C \ni p$. Действительно, множество X может быть сосредоточено около экватора сферы, перпендикулярного точке p. В больших размерностях такое X может иметь половину объёма сферы при сколь угодно малом расстоянии его от экватора. Тогда все пересечения $C \cap X$ будут состоять из пары маленьких дуг около пересечения C с экватором.

4. Верно ли, что если два линейных подпространства V и W гильбертова пространства замкнуты, то их сумма $V + W$ тоже замкнута?

Ответ: нет.

Решение. Обозначим для краткости $L = \mathbb{R}^2$ и пусть наше гильбертово пространство H — это последовательности векторов из L с конечной суммой квадратов длин. Определим $v_n \in H$ как последовательность, у которой ненулевой элемент стоит только на n-м месте и равен $\left(1/n, \sqrt{1 - 1/n^2}\right)$. Аналогично определим w_n с формулой $\left(1/n, -\sqrt{1 - 1/n^2}\right)$.

Определим V_c как линейную оболочку системы $\{v_n\}$, а V — как замыкание V_c, равное в силу ортогональности системы (v_n) множеству сумм $\sum_n c_n v_n$ с конечной суммой $\sum_n |c_n|^2$. Аналогично определим W_c и W через $\{w_n\}$.

Сумма $V + W$ плотна в H, потому что в $V_c + W_c$ уже содержатся все векторы с конечным числом ненулевых компонент и $V_c + W_c$ уже плотна в H. Покажем, что сумма $V + W$ не совпадает с H и, следовательно, не замкнута.

Рассмотрим элемент $x \in H$, у которого (как у последовательности) на n-м месте стоит $(2/n, 0)$. Если $x = v + w$, $v = \sum_n c_n v_n \in V$, $w = \sum d_n w_n \in W$, то рассмотрение проекции $H \to L$ в координате номер n показывает $c_n = d_n = 1$. Но тогда суммы $\sum_n |c_n|^2$ и $\sum_n |d_n|^2$ бесконечны — противоречие.

Можно закончить рассуждение иначе. Если $V + W$ совпадает с H, то по теореме Банаха об изоморфизме H изоморфно прямой сумме $V \oplus W$. В частности, норма $v_n + w_n \in H$ должна быть порядка нормы в прямой сумме $\sqrt{\|v_n\|^2 + \|w_n\|^2} = \sqrt{2}$, что неверно.