

**СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ**  
16 МАЯ 2021 ГОДА

1. Пусть матрица  $A$  квадратная, состоит из нулей и единиц, и кроме того, в каждой строке между любыми двумя единицами стоят только единицы. Докажите, что  $|\det A| \leq 1$ .
2. Пусть  $(f_n)$  — равномерно ограниченная последовательность монотонных функций на отрезке  $[a, b]$ . Докажите, что из неё можно выбрать поточечно сходящуюся подпоследовательность.
3. Найдите минимальное число  $c_n$  (зависящее от натурального  $n$ ) со следующим свойством. Для любого выпуклого (замкнутого) тела  $K \subset \mathbb{R}^n$  с центром симметрии в начале координат, которое содержит ровно  $m$  точек с целыми координатами, любой параллельный перенос тела  $K$  содержит не более  $c_n m$  точек с целыми координатами.
4. Пусть  $\{v_j\}_{j=1}^m \subset \mathbb{R}^n$  — некоторый набор единичных векторов. Докажите, что матрица с компонентами  $(n(v_i \cdot v_j)^2 - 1)_{i,j=1}^m$  является положительно полуопределённой.