СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

13 ДЕКАБРЯ 2020 Г.

1–2 КУРС

1. Пусть дана непрерывная функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ на её графике можно выбрать конечное число точек $(x_i, y_i)_{i=0}^n$ так что
$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$$
и
$$\sum_{i=1}^{n} \left((x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2\right) < \varepsilon.$$

Решение. Сначала разобьём отрезок на отрезки длиной $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m < \varepsilon/2$, тогда очевидно будет выполняться
$$\sum_{i=1}^{m} \Delta x_i^2 < \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{2}$$
и то же самое неравенство будет выполняться при дальнейшем разбиении по оси $0x$.

Пусть теперь сумма квадратов приращений значений функции по нашим отрезкам
$$\sum_{i=1}^{m} |\Delta y_i|^2 = M.$$
Заметим, что одно разбиение отрезка $[a,b]$ на два точкой x, в которой значение $f(x)$ равно среднему значению $(f(a)+f(b))/2$, превращает сумму квадратов приращений значений функции по отрезкам разбиения из $(f(b)-f(a))^2$ (на одном отрезке) в $(f(b)-f(a))^2/2$ (на двух отрезках в сумме), то есть делит сумму квадратов приращений на два. Проделывая такую операцию одновременно во всех отрезках некоторого разбиения нашего исходного отрезка $[0,1]$, в которых приращение значений функции было ненулевым, мы будем получать новое разбиение, в котором сумма квадратов приращений значений функции меньше ровно в два раза.

После k таких операций будем иметь разбиение на не более $n = 2^k m$ отрезков и
$$\sum_{i=1}^{n} |\Delta y_i|^2 = \frac{M}{2^k},$$
что меньше $\varepsilon/2$ при достаточно большом k. В целом же сумма квадратов приращений x и приращений y будет меньше ε, что и требовалось доказать.

2. В d-мерном векторном пространстве над полем из двух элементов дано множество из $d+3$ векторов $v_1, \dots, v_{d+3}$. Докажите, что в нём можно выбрать три непустых попарно не пересекающихся подмножества, так что все три суммы векторов в подмножествах одинаковые.

Решение. Пусть векторы $v_1, \dots, v_r$ образуют базис в линейной оболочке данной системы векторов, тогда $r \le d$. В три множества запишем по одному вектору $\{v_{d+1}\}, \{v_{d+2}\}, \{v_{d+3}\}$ (не входящие в базис) и будем эти множества увеличивать за счёт базисных векторов.

Рассмотрим координату i (в данном базисе) у трёх векторов $v_{d+1}, v_{d+2}, v_{d+3}$. Если она одна и та же, то вектор базиса v_i никуда не добавляем. Если же эта координата трёх векторов принимает какое-то значение один раз на векторе v_{d+j} (а другое — два раза на двух других v_{d+k}), то добавляем v_i к множеству, содержащему v_{d+j}. Так мы выравниваем суммы подмножеств по i-й координате и в итоге выравняем все суммы.

3. Докажите, что из любого покрытия интервала отрезками ненулевой длины можно выбрать не более чем счётное подпокрытие.

   Решение. Пусть интервал I покрыт отрезками S_α, где индекс α лежит в некотором множестве A. Тогда внутренности отрезков $\operatorname{int} S_\alpha$ покрывают некоторое открытое $U \subseteq I$. Множество U разбивается на компоненты связности — интервалы, которых не более чем счётное число, так как каждый из них содержит какое-то рациональное число и эти рациональные числа различны. Тогда можно написать $U = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} U_n$, где U_n — компоненты связности.

   Каждый интервал U_n можно представить в виде счётного объединения возрастающей последовательности отрезков $U_n = \bigcup_k \Sigma_{n,k}$. Для покрытия $\Sigma_{n,k}$ интервалами $\operatorname{int} S_\alpha$ можно применить компактность и заключить, что всякий $\Sigma_{n,k}$ покрывается конечным подпокрытием $\{S_\alpha\}$, и их объединение, множество U, покрывается не более чем счётным подпокрытием $\{S_\alpha\}$.

   Осталось покрыть точки $I \setminus U$. Каждая из них накрыта каким-то отрезком S_α, но не накрыта его внутренностью. Следовательно, она является его концом, а также является концом некоторой компоненты U_n. Но компонент U_n не более чем счётное количество и, следовательно, $I \setminus U$ не более чем счётно. Поэтому для его покрытия не более чем счётным подсемейством $\{S_\alpha\}$ достаточно выбрать один покрывающий отрезок для каждой его точки.

   Замечание. Легко заметить, что если рассматривать отрезки нулевой длины, то есть точки, утверждение будет неверно.

4. Найдите максимальную площадь ортогональной проекции правильного октаэдра с единичным расстоянием от вершин до центра на плоскость.

   Ответ: 2.

   Решение. Для всякой грани октаэдра рассмотрим вектор $\bar{A}$, торчащий наружу из грани и имеющий длину, равную площади грани. Площадь проекции грани на плоскость α равна тогда длине проекции $\bar{A}$ на прямую $\ell \perp \alpha$.

   Заметим, что площадь проекции октаэдра на α равна половине суммы площадей проекций граней октаэдра на α, так как почти все точки проекции принимают на себя две точки с граней октаэдра. Следовательно, мы просто ищем максимум суммы длин проекций $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_8$ на прямую ℓ. Заметим теперь, что в стандартном связанном с октаэдром базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ векторы $\bar{A}_i$ с точностью до константы равны $\pm\bar{e}_1 \pm \bar{e}_2 \pm \bar{e}_3$ (с всевозможными комбинациями знаков). Исследуем сначала не сумму длин их проекций на ℓ, а сумму квадратов длин проекций на ℓ. Обозначив единичны направляющий вектор ℓ за $\bar{v}$, мы видим, что квадрат проекции равен

$$((\pm\bar{e}_1 \pm \bar{e}_2 \pm \bar{e}_3) \cdot \bar{v})^2 = (\pm c_1 \pm c_2 \pm c_3)^2,$$

где мы обозначили $c_i = \bar{e}_i \cdot \bar{v}$. Сумма таких квадратов по всевозможным комбинациям знаков равна

$$\sum_{\pm,\pm,\pm} (\pm c_1 \pm c_2 \pm c_3)^2 = 8c_1^2 + 8c_2^2 + 8c_3^2 = 8,$$

так как $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = |\bar{v}|^2 = 1$. А если сумма квадратов длин проекций фиксирована, то сумма самих длин, по неравенству между средним арифметическим и средним квадратичным, максимальна при условии их равенства. Очевидно, что равенство проекций граней имеет место при проекции октаэдра на любую координатную плоскость и при этом площадь проекции равна 2.

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
13 ДЕКАБРЯ 2020 Г.

3–6 КУРС

1. В d-мерном векторном пространстве над полем из двух элементов дано множество из $d+3$ векторов $v_1, \dots, v_{d+3}$. Докажите, что в нём можно выбрать три непустых попарно не пересекающихся подмножества, так что все три суммы векторов в подмножествах одинаковые.

   Решение. Пусть векторы $v_1, \dots, v_r$ образуют базис в линейной оболочке данной системы векторов, тогда $r \leq d$. В три множества запишем по одному вектору $\{v_{d+1}\}, \{v_{d+2}\}, \{v_{d+3}\}$ (не входящие в базис) и будем эти множества увеличивать за счёт базисных векторов.

   Рассмотрим координату i (в данном базисе) у трёх векторов $v_{d+1}, v_{d+2}, v_{d+3}$. Если она одна и та же, то вектор базиса v_i никуда не добавляем. Если же эта координата трёх векторов принимает какое-то значение один раз на векторе v_{d+j} (а другое — два раза на двух других v_{d+k}), то добавляем v_i к множеству, содержащему v_{d+j}. Так мы выравниваем суммы подмножеств по i-й координате и в итоге выравняем все суммы.

2. Докажите, что из любого покрытия интервала отрезками ненулевой длины можно выбрать не более чем счётное подпокрытие.

   Решение. Пусть интервал I покрыт отрезками S_α, где индекс α лежит в некотором множестве A. Тогда внутренности отрезков $\operatorname{int} S_\alpha$ покрывают некоторое открытое $U \subseteq I$. Множество U разбивается на компоненты связности — интервалы, которых не более чем счётное число, так как каждый из них содержит какое-то рациональное число и эти рациональные числа различны. Тогда можно написать $U = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} U_n$, где U_n — компоненты связности.

   Каждый интервал U_n можно представить в виде счётного объединения возрастающей последовательности отрезков $U_n = \bigcup_k \Sigma_{n,k}$. Для покрытия $\Sigma_{n,k}$ интервалами $\operatorname{int} S_\alpha$ можно применить компактность и заключить, что всякий $\Sigma_{n,k}$ покрывается конечным подпокрытием $\{S_\alpha\}$, и их объединение, множество U, покрывается не более чем счётным подпокрытием $\{S_\alpha\}$.

   Осталось покрыть точки $I \setminus U$. Каждая из них накрыта каким-то отрезком S_α, но не накрыта его внутренностью. Следовательно, она является его концом, а также является концом некоторой компоненты U_n. Но компонент U_n не более чем счётное количество и, следовательно, $I \setminus U$ не более чем счётно. Поэтому для его покрытия не более чем счётным подсемейством $\{S_\alpha\}$ достаточно выбрать один покрывающий отрезок для каждой его точки.

   Замечание. Легко заметить, что если рассматривать отрезки нулевой длины, то есть точки, утверждение будет неверно.

3. Предположим, что точки $z_1, \dots, z_n \in D$ (открытый единичный диск) можно отобразить в точки $w_1, \dots, w_n \in D$ соответственно аналитической функцией $f : D \to D$. Докажите, что эрмитова форма

$$\left(\frac{1 - w_k \bar{w}_\ell}{1 - z_k \bar{z}_\ell}\right)_{k,\ell=1}^{n}$$

положительно полуопределена.

Решение. При конформном преобразовании D на себя (как в образе, так и в прообразе) утверждение переходит в себя. Действительно, все такие преобразования мы знаем, и для них это несложно проверяется; скажем, если мы делаем замену $z \mapsto (z - a)/(\bar{a}z - 1)$, где $|a| < 1$, то знаменатели умножаются на $1 - |a|^2$, а числители умножаются на $(1 - \bar{a}z_k)(1 - a\bar{z}_\ell)$, то есть просто переменные соответствующей квадратичной формы домножаются на $(1 - \bar{a}z_k)$. Аналогичное преобразование получается при замене $w \mapsto (w - a)/(\bar{a}w - 1)$.

Будем рассуждать по индукции, база $n = 1$ очевидна.

При $n > 1$ после конформных преобразований можно считать, что $z_n = w_n = 0$, то есть последняя строка и последний столбец матрицы состоят из единиц. Тогда наша аналитическая функция делится на z, и частное тоже отображает $D \to D$ (по лемме Шварца). К частному можно применить предположение индукции — получим полуопределённую матрицу вида

$$\left(\frac{z_k \bar{z}_\ell - w_k \bar{w}_\ell}{1 - z_k \bar{z}_\ell}\right)_{k,\ell=1}^{n-1}$$

(опять же после домножения переменных на z_k). Но эта же матрица получится в левом верхнем углу исходной матрицы, если в ней вычесть из всех строк последнюю и после этого из всех столбцов вычесть последний. В последней строке и в последнем столбце тогда окажутся нули, кроме углового элемента. По предположению индукции такая матрица неотрицательно определена, а сделанное нами вычитание последней строки и последнего столбца соответствует замене переменных в эрмитовой форме, сохраняющей полуопределённость. Шаг индукции сделан.

4. Найдите максимально возможный $(n-1)$-мерный объём ортогональной проекции правильного кросcполитопа

$$C_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid |x_1| + \dots + |x_n| \le 1\}$$

на гиперплоскость.

Ответ: $2^{n-1}/(n-1)! = \operatorname{vol}_{n-1} C_{n-1}$.

Решение. Для всякой гиперграни кросcполитопа рассмотрим вектор $\bar{A}$, торчащий наружу из гиперграни и имеющий длину, равную $(n-1)$-мерному объёму гиперграни. Площадь проекции гиперграни на гиперплоскость α равна тогда длине проекции вектора $\bar{A}$ на прямую $\ell \perp \alpha$.

Заметим, что объём проекции C_n на α равен половине суммы объёмов проекций гиперграней C_n на α, так как почти все точки проекции принимают на себя две точки с разных гиперграней C_n. Следовательно, мы просто ищем максимум суммы длин проекций $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_{2^n}$ на прямую ℓ.

Заметим теперь, что в стандартном базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ векторы $\bar{A}_i$ с точностью до зависящей только от размерности константы равны $\pm\bar{e}_1 \pm \bar{e}_2 \pm \dots \pm \bar{e}_n$ (с всевозможными комбинациями знаков). Исследуем сначала не сумму длин их проекций на ℓ, а сумму квадратов длин проекций на ℓ. Обозначив единичный направляющий вектор ℓ за $\bar{v}$, мы видим, что квадрат проекции равен

$$((\pm\bar{e}_1 \pm \bar{e}_2 \pm \dots \pm \bar{e}_n) \cdot \bar{v})^2 = (\pm v_1 \pm v_2 \pm \dots \pm v_n)^2,$$

где мы обозначили компоненты вектора $v_i = \bar{e}_i \cdot \bar{v}$. После раскрытия скобок и суммирования по всевозможным комбинациям знаков слагаемые типа $v_i v_j$ с $i \neq j$ сократятся, и получится

$$\sum_{\pm,\dots,\pm} (\pm v_1 \pm v_2 \pm \dots \pm v_n)^2 = 2^n (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2) = 2^n,$$

так как $v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = |\bar{v}|^2 = 1$. А если сумма квадратов длин проекций фиксирована, то сумма самих длин, по неравенству между средним арифметическим и средним квадратичным, максимальна при условии их равенства. Очевидно, что равенство длин всех проекций имеет место при проекции кросспολитопа на любую координатную гиперплоскость. Тогда проекция C_n оказывается просто C_{n-1}.