СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

13 ДЕКАБРЯ 2020 Г.

1–2 КУРС

1. Пусть дана непрерывная функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ на её графике можно выбрать конечное число точек $(x_i, y_i)_{i=0}^n$ так что
$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$$
и
$$\sum_{i=1}^{n} \big((x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2\big) < \varepsilon.$$

2. В d-мерном векторном пространстве над полем из двух элементов дано множество из $d+3$ векторов $v_1, \ldots, v_{d+3}$. Докажите, что в нём можно выбрать три непустых попарно не пересекающихся подмножества, так что все три суммы векторов в подмножествах одинаковые.

3. Докажите, что из любого покрытия интервала отрезками ненулевой длины можно выбрать не более чем счётное подпокрытие.

4. Найдите максимальную площадь ортогональной проекции правильного октаэдра с единичным расстоянием от вершин до центра на плоскость.

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

13 ДЕКАБРЯ 2020 Г.

3–6 КУРС

1. В d-мерном векторном пространстве над полем из двух элементов дано множество из $d+3$ векторов $v_1, \dots, v_{d+3}$. Докажите, что в нём можно выбрать три непустых попарно не пересекающихся подмножества, так что все три суммы векторов в подмножествах одинаковые.

2. Докажите, что из любого покрытия интервала отрезками ненулевой длины можно выбрать не более чем счётное подпокрытие.

3. Предположим, что точки $z_1, \dots, z_n \in D$ (открытый единичный диск) можно отобразить в точки $w_1, \dots, w_n \in D$ соответственно аналитической функцией $f : D \to D$. Докажите, что эрмитова форма

$$\left(\frac{1 - w_k \bar{w}_\ell}{1 - z_k \bar{z}_\ell}\right)^n_{k,\ell=1}$$

положительно полуопределена.

4. Найдите максимально возможный $(n-1)$-мерный объём ортогональной проекции правильного кроссполитопа

$$C_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid |x_1| + \dots + |x_n| \le 1\}$$

на гиперплоскость.