СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

15 ДЕКАБРЯ 2019

1–2 КУРС

1. В пространстве $\mathbb{R}^3$ находится куб Q и несколько кубов, гомотетичных Q с коэффициентами гомотетии, меньшими единицы. Докажите, что если эти гомотетичные кубы покрыли куб Q, то сумма их коэффициентов гомотетии не менее 4.

   Решение. Пусть без ограничения общности куб Q единичный, а множество его рёбер обозначим за X. Каждый меньший куб с ребром a (это и есть его коэффициент гомотетии) накрывает не более $3a$ длины X, так как в каждом из трёх направлений рёбер он покрывает не более a по длине. Так как сумма дли рёбер Q равна 12, то мы получаем, что сумма коэффициентов гомотетии не менее 4.

2. Существует ли строго возрастающая $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая принимает только иррациональные значения?

   Ответ: да.

   Решение. Достаточно построить строго возрастающую функцию без рациональных значений, отображающую полуинтервал $[0, 1)$ в себя, а потом продолжить её на всю действительную прямую по формуле $f(x + 1) = f(x) + 1$.

   Зафиксируем иррациональное $\alpha \in (0, 1)$. Для всякого $x \in [0, 1)$ определим $f(x)$ как бесконечную десятичную дробь $0{,}d_1 d_2 d_3 \ldots$, в которой d_{2k} равно k-й после запятой цифре десятичной записи x, а d_{2k-1} — k-й после запятой цифре десятичной записи α. Иррациональность α (то есть непериодичность её десятичной записи) гарантирует иррациональность $f(x)$. Строгое возрастание гарантируется тем, что $x < y$ для чисел $x, y \in [0, 1)$ тогда и только тогда, когда десятичная дробь x лексикографически меньше десятичной дроби y, отображение f сохраняет лексикографический порядок, и в его образе нет дробей с нулями или девятками в периоде.

3. Дано натуральное число n. При каком максимальном k можно придумать матрицу размера $k \times n$ с элементами ± 1, так что при любой расстановке вместо $+1$ и -1 соответственно положительных и отрицательных чисел в эту матрицу её ранг будет равен k?

   Ответ: $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$.

   Решение. Приведём пример для случая, когда $n \geq 2^{k-1}$ (это соответствует формуле в ответе). Расставим знаки ± 1 так, чтобы среди столбцов можно было найти любую комбинацию из k знаков или обратную к ней.

   Пусть теперь есть расстановка чисел в соответствии с предписанными знаками. Если между строками есть линейная зависимость с коэффициентами $a_1, \ldots, a_k$, то а) либо найдётся столбец, знаки которого совпадают со знаками $\operatorname{sgn} a_1, \dots, \operatorname{sgn} a_k$ в тех позициях, где $\operatorname{sgn} a_i \neq 0$. Тогда очевидно, что в этом столбце комбинация с заданными коэффициентами будет положительной.

б) либо найдётся столбец, знаки которого совпадают со знаками $-\operatorname{sgn} a_1, \dots, -\operatorname{sgn} a_k$ в тех позициях, где $\operatorname{sgn} a_i \neq 0$. Тогда очевидно, что в этом столбце комбинация с заданными коэффициентами будет отрицательной.

Значит, линейной зависимости в таком случае быть не может.

Пусть теперь $n < 2^{k-1}$ и дана какая-то расстановка знаков. Тогда будем искать линейную зависимость между строками из чисел с заданными знаками и коэффициентами $a_i = \pm 1$. Сначала выберем набор $a_1, \dots, a_k$ из ± 1, который не совпадает ни с одним из столбцов матрицы и его обратный тоже не совпадает ни с одним из столбцов. Теперь для построения линейной зависимости нам надо перевернуть знаки в тех строках, где $a_i = -1$, и поставить в новую матрицу числа в соответствии со знаками так, чтобы суммы в столбцах были нулевые. В самом деле, это можно будет сделать, так как после замены знаков в каждом столбце встречаются как $+1$, так и -1.

4. Предположим, в единичном шаре некоторого евклидова пространства находятся $2m$ точек $x_1, \dots, x_{2m}$. Докажите, что их можно разбить на два множества из m точек каждое таким образом, что центры масс этих двух множеств окажутся на расстоянии не более $\frac{2}{\sqrt{m}}$ друг от друга.

   Решение. Задача тривиально сводится к доказательству того, что в сумме

$$S = \sum_{i=1}^{2m} \pm x_i$$

   можно так расставить знаки, что количество плюсов будет равно количеству минусов, а длина итогового вектора будет не более $2\sqrt{m}$. Чтобы гарантировать равенство количества плюсов количеству минусов, мы сузим поиск решений до сумм вида

$$T = \sum_{i=1}^{m} \pm (x_{2i} - x_{2i-1}).$$

   В последней сумме можно расставить $\pm$ случайным образом независимо в совокупности так, что вероятность плюса равна вероятности минуса. Тогда при возведении в квадрат, аналогично формуле для дисперсии суммы независимых случайных величин, мы узнаем, что

$$\mathsf{E}T^2 = \sum_{i=1}^{m} \mathsf{E}|x_{2i} - x_{2i-1}|^2 = \sum_{i=1}^{m} |x_{2i} - x_{2i-1}|^2 \le 4m.$$

   Следовательно, для некоторой конкретной расстановки знаков будет выполняться $T \le 2\sqrt{m}$.

   Другое решение. Сдвинем множество так, чтобы центр масс перешёл в начало координат. После этого нам нужно оценить сверху расстояние от центра масс некоторой половины точек до начала координат, и умножить эту оценку на два. После сдвига мы будем использовать лишь то, что диаметр множества $\{x_1, \dots, x_{2m}\}$ не более 2.

Не ограничивая общности, будем считать, что центр масс точек $x_1, \dots, x_m$ имеет минимальную длину из всех наборов половины точек. Обозначим этот центр масс

$$c = \frac{x_1 + \dots + x_m}{m}.$$

При замене в наборе $\{x_1, \dots, x_m\}$ вектора x_i на вектор x_{m+i}, центр масс набора сдвинется на вектор $y_i = \frac{x_{m+i} - x_i}{m}$. Из условия минимальности длины центра масс получаем

$$|c|^2 \le |c + y_i|^2 = |c|^2 + 2c \cdot y_i + |y_i|^2.$$

Суммируя такие неравенства по всем $i = 1, \dots, m$ и перенося скалярные произведения в левую часть, получаем

$$-2c \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} y_i \right) \le \sum_{i=1}^{m} |y_i|^2.$$

Заметим, что $|y_i| \le \frac{2}{m}$, так как диаметр множества точек не более двух. Из условия нахождения центра масс в нуле

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = \frac{x_{m+1} + \dots + x_{2m}}{m} - \frac{x_1 + \dots + x_m}{m} = -2c.$$

Откуда находим, что

$$4|c|^2 \le m \left(\frac{2}{m} \right)^2 \Rightarrow |c| \le \frac{1}{\sqrt{m}} \Rightarrow \left| \frac{x_{m+1} + \dots + x_{2m}}{m} - \frac{x_1 + \dots + x_m}{m} \right| \le \frac{2}{\sqrt{m}}.$$

5. Докажите неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})^2 \ge 4 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n} x_k^2$$

для любой последовательности действительных чисел $x_0, \dots, x_n$, в которой $x_0 = x_n = 0$.

Решение. Вопрос сводится к нахождению минимального собственного значения квадратичной формы Q, стоящей в левой части неравенства. Она очевидно неотрицательно определена и легко заметить, что

$$Q(x_0, x_1, \dots, x_n) + Q(x_0, -x_1, \dots, (-1)^n x_n) = 4(x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2),$$

а значит её собственные значения лежат от 0 до 4. Выписанное равенство и равенства, которые мы будем выписывать далее, верны при заданном в условии ограничении $x_0 = x_n = 0$.

Рассматривая Q как матрицу с 2 на главной диагонали и -1 на двух соседних диагоналях, для её собственных векторов с собственным значением λ получаем уравнение

$$x_{k+1} - (2-\lambda)x_k + x_{k-1} = 0,$$

которое с учётом замечания о диапазоне собственных значений можно переписать в виде

$$x_{k+1} - 2\cos\phi\, x_k + x_{k-1} = 0.$$

Решения этого линейно рекуррентного соотношения имеют вид

$$x_k = ae^{ik\phi} + be^{-ik\phi},$$

с учётом граничных условий $a + b = ae^{in\phi} + be^{-in\phi} = 0$ мы получаем, что $\phi = \frac{\pi\ell}{n}$,

$$\lambda = 2\left(1 - \cos\frac{\pi\ell}{n}\right) = 4\sin^2\frac{\pi\ell}{2n}, \quad x_k = \sin\frac{\pi\ell}{n}k.$$

Заметим, что собственный вектор по этой формуле оказывается нулевым при ℓ, кратном n, а при $\ell = 1, \dots, n-1$ мы получаем $n-1$ различный собственный вектор. Из этих допустимых вариантов минимальное собственное значение будет равно

$$\lambda_{min} = 4\sin^2\frac{\pi}{2n}.$$

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

15 ДЕКАБРЯ 2019

3–6 КУРС

1. В пространстве $\mathbb{R}^3$ находится куб Q и несколько кубов, гомотетичных Q с коэффициентами гомотетии, меньшими единицы. Докажите, что если эти гомотетичные кубы покрыли куб Q, то сумма их коэффициентов гомотетии не менее 4.

   Решение. Пусть без ограничения общности куб Q единичный, а множество его рёбер обозначим за X. Каждый меньший куб с ребром a (это и есть его коэффициент гомотетии) накрывает не более $3a$ длины X, так как в каждом из трёх направлений рёбер он покрывает не более a по длине. Так как сумма дли рёбер Q равна 12, то мы получаем, что сумма коэффициентов гомотетии не менее 4.

2. Петя и Вася играют в такую игру. Петя придумывает неотрицательную случайную величину ξ с математическим ожиданием $\mathsf{E}\xi = 1$, после этого Вася, зная распределение величины ξ, придумывает свою не зависящую от ξ неотрицательную случайную величину η с математическим ожиданием $\mathsf{E}\eta = 1$. Для какого минимального p Петя может придумать величину ξ так, чтобы при любом выборе величины η Васей выполнялось бы неравенство $\mathsf{P}(\eta \geq \xi) \leq p$?

   Ответ: 1/2.

   Решение. Вася может выбрать η, распределённую точно как ξ, тогда неравенство $\xi \geq \eta$ выполняется с вероятностью не менее 1/2. Значит, p нельзя сделать меньше 1/2.

   Покажем теперь, что величина x, равномерно распределённая на отрезке $[0, 2]$, и число $p = 1/2$ подходят Пете. Случайная величина Васи однозначно задаётся функцией
   $$F(x) = \mathsf{P}(\eta \geq x),$$
   которая на $[0, +\infty)$ убывает от 1 до нуля в пределе. Тогда интересующая нас вероятность записывается так:
   $$\mathsf{P}(\eta \geq \xi) = \frac{1}{2}\int_0^2 F(x)\,dx \leq \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} F(x)\,dx = \frac{-1}{2}\int_0^{+\infty} x\,dF(x) = \frac{1}{2}\mathsf{E}\eta = \frac{1}{2},$$
   где равенство посередине получается интегрированием по частям для непрерывно дифференцируемых F, а потом предельным переходом (в норме — вариации) для произвольных F.

3. Пусть A и B — прямоугольники на плоскости, а $f : A \to B$ — непрерывное отображение, которое конформно на внутренности A, отображает границу A гомеоморфно в границу B, отображая стороны прямоугольника A в соответствующие стороны прямоугольника B. Докажите, что f является преобразованием подобия.

Решение. Замостим всю плоскость $\mathbb{C}$ копиями A и копиями B очевидным способом. Продолжим отображение f на всю плоскость следующим образом: при пересечении стенки s_A замощения копиями A, берём соответствующую стенку s_B замощения копиями B. Рассматриваем симметрии σ_A и σ_B относительно s_A и s_B, и продолжаем f на соседнюю клетку замощения по формуле

$$\tilde{f} = \sigma_B \circ f \circ \sigma_A.$$

Легко проверить, что определение корректно, так как при обходе вершины копии A мы всегда получаем исходное отображение. По теоремам о склеивании конформных отображений (на рёбрах) и устранении особенностей (в вершинах) итоговое отображение $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ конформно и взаимно однозначно. Следовательно, $\tilde{f}$ — преобразование подобия, а значит и f — преобразование подобия.

4. Предположим, в единичном шаре некоторого евклидова пространства находятся $2m$ точек $x_1, \dots, x_{2m}$. Докажите, что их можно разбить на два множества из m точек каждое таким образом, что центры масс этих двух множеств окажутся на расстоянии не более $\frac{2}{\sqrt{m}}$ друг от друга.

Решение. Задача тривиально сводится к доказательству того, что в сумме

$$S = \sum_{i=1}^{2m} \pm x_i$$

можно так расставить знаки, что количество плюсов будет равно количеству минусов, а длина итогового вектора будет не более $2\sqrt{m}$. Чтобы гарантировать равенство количества плюсов количеству минусов, мы сузим поиск решений до сумм вида

$$T = \sum_{i=1}^{m} \pm(x_{2i} - x_{2i-1}).$$

В последней сумме можно расставить $\pm$ случайным образом независимо в совокупности так, что вероятность плюса равна вероятности минуса. Тогда при возведении в квадрат, аналогично формуле для дисперсии суммы независимых случайных величин, мы узнаем, что

$$\mathsf{E}T^2 = \sum_{i=1}^{m} \mathsf{E}|x_{2i} - x_{2i-1}|^2 = \sum_{i=1}^{m} |x_{2i} - x_{2i-1}|^2 \leq 4m.$$

Следовательно, для некоторой конкретной расстановки знаков будет выполняться $T \leq 2\sqrt{m}$.

Другое решение. Сдвинем множество так, чтобы центр масс перешёл в начало координат. После этого нам нужно оценить сверху расстояние от центра масс некоторой половины точек до начала координат, и умножить эту оценку на два. После сдвига мы будем использовать лишь то, что диаметр множества $\{x_1, \dots, x_{2m}\}$ не более 2.

Не ограничивая общности, будем считать, что центр масс точек $x_1, \dots, x_m$ имеет минимальную длину из всех наборов половины точек. Обозначим этот центр масс

$$c = \frac{x_1 + \dots + x_m}{m}.$$

При замене в наборе $\{x_1, \dots, x_m\}$ вектора x_i на вектор x_{m+i}, центр масс набора сдвинется на вектор $y_i = \frac{x_{m+i} - x_i}{m}$. Из условия минимальности длины центра масс получаем

$$|c|^2 \leq |c + y_i|^2 = |c|^2 + 2c \cdot y_i + |y_i|^2.$$

Суммируя такие неравенства по всем $i = 1, \dots, m$ и перенося скалярные произведения в левую часть, получаем

$$-2c \cdot \left(\sum_{i=1}^m y_i \right) \leq \sum_{i=1}^m |y_i|^2.$$

Заметим, что $|y_i| \leq \frac{2}{m}$, так как диаметр множества точек не более двух. Из условия нахождения центра масс в нуле

$$\sum_{i=1}^m y_i = \frac{x_{m+1} + \dots + x_{2m}}{m} - \frac{x_1 + \dots + x_m}{m} = -2c.$$

Откуда находим, что

$$4|c|^2 \leq m \left(\frac{2}{m} \right)^2 \Rightarrow |c| \leq \frac{1}{\sqrt{m}} \Rightarrow \left| \frac{x_{m+1} + \dots + x_{2m}}{m} - \frac{x_1 + \dots + x_m}{m} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{m}}.$$

5. Докажите неравенство

$$\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})^2 \geq 4 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \cdot \sum_{k=0}^n x_k^2$$

для любой последовательности действительных чисел $x_0, \dots, x_n$, в которой $x_0 = x_n = 0$.

Решение. Вопрос сводится к нахождению минимального собственного значения квадратичной формы Q, стоящей в левой части неравенства. Она очевидно неотрицательно определена и легко заметить, что

$$Q(x_0, x_1, \dots, x_n) + Q(x_0, -x_1, \dots, (-1)^n x_n) = 4(x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2),$$

а значит её собственные значения лежат от 0 до 4. Выписанное равенство и равенства, которые мы будем выписывать далее, верны при заданном в условии ограничении $x_0 = x_n = 0$.

Рассматривая Q как матрицу с 2 на главной диагонали и -1 на двух соседних диагоналях, для её собственных векторов с собственным значением λ получаем уравнение

$$x_{k+1} - (2 - \lambda) x_k + x_{k-1} = 0,$$

которое с учётом замечания о диапазоне собственных значений можно переписать в виде

$$x_{k+1} - 2\cos\phi\, x_k + x_{k-1} = 0.$$

Решения этого линейно рекуррентного соотношения имеют вид

$$x_k = ae^{ik\phi} + be^{-ik\phi},$$

с учётом граничных условий $a+b = ae^{in\phi} + be^{-in\phi} = 0$ мы получаем, что $\phi = \frac{\pi\ell}{n}$,

$$\lambda = 2\left(1 - \cos\frac{\pi\ell}{n}\right) = 4\sin^2\frac{\pi\ell}{2n}, \quad x_k = \sin\frac{\pi\ell}{n}k.$$

Заметим, что собственный вектор по этой формуле оказывается нулевым при ℓ, кратном n, а при $\ell = 1, \dots, n-1$ мы получаем $n-1$ различный собственный вектор. Из этих допустимых вариантов минимальное собственное значение будет равно

$$\lambda_{min} = 4\sin^2\frac{\pi}{2n}.$$