СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

15 ДЕКАБРЯ 2019

1–2 КУРС

1. В пространстве $\mathbb{R}^3$ находится куб Q и несколько кубов, гомотетичных Q с коэффициентами гомотетии, меньшими единицы. Докажите, что если эти гомотетичные кубы покрыли куб Q, то сумма их коэффициентов гомотетии не менее 4.

2. Существует ли строго возрастающая $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая принимает только иррациональные значения?

3. Дано натуральное число n. При каком максимальном k можно придумать матрицу размера $k \times n$ с элементами ± 1, так что при любой расстановке вместо $+1$ и -1 соответственно положительных и отрицательных чисел в эту матрицу её ранг будет равен k?

4. Предположим, в единичном шаре некоторого евклидова пространства находятся $2m$ точек $x_1, \ldots, x_{2m}$. Докажите, что их можно разбить на два множества из m точек каждое таким образом, что центры масс этих двух множеств окажутся на расстоянии не более $\frac{2}{\sqrt{m}}$ друг от друга.

5. Докажите неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})^2 \geq 4 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n} x_k^2$$

для любой последовательности действительных чисел $x_0, \ldots, x_n$, в которой $x_0 = x_n = 0$.

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

15 ДЕКАБРЯ 2019

3–6 КУРС

1. В пространстве $\mathbb{R}^3$ находится куб Q и несколько кубов, гомотетичных Q с коэффициентами гомотетии, меньшими единицы. Докажите, что если эти гомотетичные кубы покрыли куб Q, то сумма их коэффициентов гомотетии не менее 4.

2. Петя и Вася играют в такую игру. Петя придумывает неотрицательную случайную величину ξ с математическим ожиданием $\mathsf{E}\xi = 1$, после этого Вася, зная распределение величины ξ, придумывает свою не зависящую от ξ неотрицательную случайную величину η с математическим ожиданием $\mathsf{E}\eta = 1$. Для какого минимального p Петя может придумать величину ξ так, чтобы при любом выборе величины η Васей выполнялось бы неравенство $\mathsf{P}(\eta \geq \xi) \leq p$?

3. Пусть A и B — прямоугольники на плоскости, а $f : A \to B$ — непрерывное отображение, которое конформно на внутренности A, отображает границу A гомеоморфно в границу B, отображая стороны прямоугольника A в соответствующие стороны прямоугольника B. Докажите, что f является преобразованием подобия.

4. Предположим, в единичном шаре некоторого евклидова пространства находятся $2m$ точек $x_1, \dots, x_{2m}$. Докажите, что их можно разбить на два множества из m точек каждое таким образом, что центры масс этих двух множеств окажутся на расстоянии не более $\frac{2}{\sqrt{m}}$ друг от друга.

5. Докажите неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})^2 \geq 4 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n} x_k^2$$

для любой последовательности действительных чисел $x_0, \dots, x_n$, в которой $x_0 = x_n = 0$.