СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

09 ДЕКАБРЯ 2018

1–2 КУРС

1. Докажите, что положительные числа a, b, c являются сторонами некоторого треугольника тогда и только тогда, когда

$$1 + 2\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c > \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{ch}^2 b + \operatorname{ch}^2 c.$$

Решение. Неравенство означает, что детерминант матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \operatorname{ch} a & \operatorname{ch} b \\ \operatorname{ch} a & 1 & \operatorname{ch} c \\ \operatorname{ch} b & \operatorname{ch} c & 1 \end{pmatrix}$$

положителен. Это также эквивалентно тому, что квадратичная форма, заданная этой матрицей, имеет сигнатуру $+, -, -$. А последнее эквивалентно тому, что a, b, c являются расстояниями между тремя точками гиперболической плоскости в модели гиперболоида. Но в гиперболической плоскости условием существования треугольника является то же неравенство треугольника, что и в евклидовой.

2. Докажите, что если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ трижды непрерывно дифференцируема и её третья производная ограничена по модулю числом $3C$, то выполняется неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^3$$

при условии $f'(x) = f'(y) = 0$.

Решение. Двумя интегрированиями по частям можно установить формулу

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\, dt = \int_x^y f'''(t) \frac{(t-x)(t-y)}{2}\, dt,$$

остаётся оценить в интеграле $|f'''(t)| \leq 3C$ и проинтегрировать оставшееся явное выражение, получив оценку $|f(x) - f(y)| \leq 1/4C|x - y|^3$, что сильнее требуемой в задаче.

3. Последовательность $a_0, a_1, \ldots$ задана так: $a_0 = 1$, $a_1 = e^2$,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n}, \quad n > 1.$$

Докажите, что $a_n \leq e^{2\sqrt{n}}$.

Решение. Сравним нашу последовательность с $(f(n))_{n=0}^{\infty}$, где $f(x) = e^{2\sqrt{x}}$. Заметим, что

$$f(n+1) - f(n) \geq \frac{e^{2\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \int_0^n \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx\right) \geq$$
$$\geq \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{f(1)}{\sqrt{1}} + \ldots + \frac{f(n-1)}{\sqrt{n-1}}\right) \geq \frac{f(0) + f(1) + \ldots + f(n-1)}{n}.$$

Первое неравенство здесь из формулы Лагранжа (и монотонности $\frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}, x \geq 1$), второе неравенство – из сравнения площади под графиком со ступенчатой суммой. При помощи этой формулы доказываем по индукции, что $a_n \leq f(n)$.

4. Существуют ли рациональные числа a, b, c, d, для которых

$$\sqrt[5]{2} = a + b\cos\frac{2\pi}{7} + c\cos\frac{4\pi}{7} + d\cos\frac{6\pi}{7}?$$

Ответ: нет.

Решение. Число $w = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ является корнем уравнения

$$w^6 + w^5 + \cdots + w + 1 = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$w^3 + w^2 + w + 1 + w^{-1} + w^{-2} + w^{-3} = 0.$$

Из этого следует, что

$$u = \cos\frac{2\pi}{7} = \frac{1}{2}\left(w + w^{-1}\right)$$

является корнем уравнения третьей степени с рациональными коэффициентами. Если $\sqrt[5]{2}$ рационально выражается через единицу, $w + w^{-1}$, $w^2 + w^{-2}$ и $w^3 + w^{-3}$, то оно рационально выражается через u, и тогда имеет место включение полей $\mathbb{Q}[\sqrt[5]{2}] \subseteq \mathbb{Q}[u]$. Но из неприводимости многочлена $x^5 - 2$ по критерию Эйзенштейна следует, что размерность первого поля над рациональными числами равна 5, а размерность второго по доказанному выше — не более трёх. Противоречие.

Элементарное решение. Предположим противное, тогда

$$\begin{gathered}
1 = 1, \\
\sqrt[5]{2} = a + b\cos\frac{2\pi}{7} + c\cos\frac{4\pi}{7} + d\cos\frac{6\pi}{7}, \\
\sqrt[5]{4} = a' + b'\cos\frac{2\pi}{7} + c'\cos\frac{4\pi}{7} + d'\cos\frac{6\pi}{7}, \\
\sqrt[5]{8} = a'' + b''\cos\frac{2\pi}{7} + c''\cos\frac{4\pi}{7} + d''\cos\frac{6\pi}{7}, \\
\sqrt[5]{16} = a''' + b'''\cos\frac{2\pi}{7} + c'''\cos\frac{4\pi}{7} + d'''\cos\frac{6\pi}{7}
\end{gathered}$$

для некоторых рациональных коэффициентов. Пять четырёхмерных векторов, образованных правыми частями этих равенств (т.е. $(1, 0, 0, 0), (a, b, c, d), \dots$) линейно зависимы с рациональными коэффициентами. Значит, существуют

$$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_4,$$

не все равные нулю, для которых

$$\lambda_0 + \lambda_1 \sqrt[5]{2} + \lambda_2 \sqrt[5]{4} + \lambda_3 \sqrt[5]{8} + \lambda_4 \sqrt[5]{16} = 0.$$

Получаем противоречие с неприводимостью многочлена $x^5 - 2$ над $\mathbb{Q}$ (по критерию Эйзенштейна).

5. При каких n пространство $\mathbb{R}^n$ можно разбить на единичные n-мерные кубы и покрасить кубы в $n + 1$ цвет так, чтобы (замкнутые) кубы одного и того же цвета не пересекались?

   Ответ: при любом.

   Решение. Приведём конструкцию по индукции. Случай $n = 1$ очевиден.

   Предположим, у нам есть разбиение $\mathbb{R}^{n-1}$ на кубы и присвоение каждому кубу P разбиения цвета $c_{n-1}(P) = 0, 1, \dots, n - 1$, так что условие задачи соблюдено. Над каждым кубом P построим цилиндр $Z = P \times \mathbb{R}$ и разобьём Z на кубы Q так, чтобы цвета кубов $c_n(Q)$ при возрастании последней «вертикальной» координаты шли в циклическом порядке $\dots, 0, 1, 2, \dots, n, 0, \dots$. При этом дно одного из кубов цвета $c_n(Q) = 0$ в этом цилиндре расположим в точке с вертикальной координатой $\frac{n+1}{n} c_{n-1}(P)$, а дальше продолжим циклически.

   При такой конструкции понятно, что кубы с $c_n(Q) = 0$ при касании их проекций на $\mathbb{R}^{n-1}$ имеют непересекающиеся проекции на вертикальное направление по предположению индукции для их оснований. Следовательно, все кубы нулевого цвета попарно не пересекаются. Любой другой цвет c получается из нулевого сдвигом в вертикальном направлении на вектор $(0, \dots, 0, c)$, поэтому кубы этого цвета тоже попарно не пересекаются.

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

09 ДЕКАБРЯ 2018

3–6 КУРС

1. Докажите, что положительные числа a, b, c являются сторонами некоторого треугольника тогда и только тогда, когда

$$1 + 2 \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c > \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{ch}^2 b + \operatorname{ch}^2 c.$$

Решение. Неравенство означает, что детерминант матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \operatorname{ch} a & \operatorname{ch} b \\ \operatorname{ch} a & 1 & \operatorname{ch} c \\ \operatorname{ch} b & \operatorname{ch} c & 1 \end{pmatrix}$$

положителен. Это также эквивалентно тому, что квадратичная форма, заданная этой матрицей, имеет сигнатуру $+, -, -$. А последнее эквивалентно тому, что a, b, c являются расстояниями между тремя точками гиперболической плоскости в модели гиперболоида. Но в гиперболической плоскости условием существования треугольника является то же неравенство треугольника, что и в евклидовой.

2. Пусть функция $f(z)$ аналитическая при $0 < |z| < 2$ и интеграл

$$\int_{0<|z|\le 1} |f(z)|^2 \, dxdy$$

сходится (здесь $x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z$). Докажите, что особенность $f(z)$ в нуле устранима.

Решение. Обозначим

$$A_r = \int_{0<|z|\le r} |f(z)|^2 \, dxdy,$$

по условию A_r стремится к нулю при $r \to +0$. Функция $|f(z)|^2$ субгармоническая, поэтому при $0 < |z| < 1$

$$|f(z)|^2 \le \frac{1}{\pi |z|^2} \int_{|\zeta - z| < |z|} |f(\zeta)|^2 \, dxdy \le \frac{A_r}{\pi |z|^2}.$$

Следовательно $|f(z)| = \frac{o(1)}{|z|}$ при $z \to 0$, отсюда по формуле Коши получаем, что коэффициенты Лорана при отрицательных степенях z равны нулю.

3. Существуют ли рациональные числа a, b, c, d, для которых

$$\sqrt[5]{2} = a + b \cos \frac{2\pi}{7} + c \cos \frac{4\pi}{7} + d \cos \frac{6\pi}{7}?$$

Ответ: нет.

Решение. Число $w = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ является корнем уравнения

$$w^6 + w^5 + \dots + w + 1 = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$w^3 + w^2 + w + 1 + w^{-1} + w^{-2} + w^{-3} = 0.$$

Из этого следует, что

$$u = \cos\frac{2\pi}{7} = \frac{1}{2}\left(w + w^{-1}\right)$$

является корнем уравнения третьей степени с рациональными коэффициентами. Если $\sqrt[5]{2}$ рационально выражается через единицу, $w + w^{-1}$, $w^2 + w^{-2}$ и $w^3 + w^{-3}$, то оно рационально выражается через u, и тогда имеет место включение полей $\mathbb{Q}[\sqrt[5]{2}] \subseteq \mathbb{Q}[u]$. Но из неприводимости многочлена $x^5 - 2$ по критерию Эйзенштейна следует, что размерность первого поля над рациональными числами равна 5, а размерность второго по доказанному выше — не более трёх. Противоречие.

Элементарное решение. Предположим противное, тогда

$$\begin{gathered}
1 = 1,\\
\sqrt[5]{2} = a + b\cos\frac{2\pi}{7} + c\cos\frac{4\pi}{7} + d\cos\frac{6\pi}{7},\\
\sqrt[5]{4} = a' + b'\cos\frac{2\pi}{7} + c'\cos\frac{4\pi}{7} + d'\cos\frac{6\pi}{7},\\
\sqrt[5]{8} = a'' + b''\cos\frac{2\pi}{7} + c''\cos\frac{4\pi}{7} + d''\cos\frac{6\pi}{7},\\
\sqrt[5]{16} = a''' + b'''\cos\frac{2\pi}{7} + c'''\cos\frac{4\pi}{7} + d'''\cos\frac{6\pi}{7}
\end{gathered}$$

для некоторых рациональных коэффициентов. Пять четырёхмерных векторов, образованных правыми частями этих равенств (т.е. $(1, 0, 0, 0), (a, b, c, d), \dots$) линейно зависимы с рациональными коэффициентами. Значит, существуют

$$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_4,$$

не все равные нулю, для которых

$$\lambda_0 + \lambda_1\sqrt[5]{2} + \lambda_2\sqrt[5]{4} + \lambda_3\sqrt[5]{8} + \lambda_4\sqrt[5]{16} = 0.$$

Получаем противоречие с неприводимостью многочлена $x^5 - 2$ над $\mathbb{Q}$ (по критерию Эйзенштейна).

4. При каких n пространство $\mathbb{R}^n$ можно разбить на единичные n-мерные кубы и покрасить кубы в $n + 1$ цвет так, чтобы (замкнутые) кубы одного и того же цвета не пересекались?

   Ответ: при любом.

Решение. Приведём конструкцию по индукции. Случай $n = 1$ очевиден.

Предположим, у нам есть разбиение $\mathbb{R}^{n-1}$ на кубы и присвоение каждому кубу P разбиения цвета $c_{n-1}(P) = 0, 1, \ldots, n-1$, так что условие задачи соблюдено. Над каждым кубом P построим цилиндр $Z = P \times \mathbb{R}$ и разобьём Z на кубы Q так, чтобы цвета кубов $c_n(Q)$ при возрастании последней «вертикальной» координаты шли в циклическом порядке $\ldots, 0, 1, 2, \ldots, n, 0, \ldots$. При этом дно одного из кубов цвета $c_n(Q) = 0$ в этом цилиндре расположим в точке с вертикальной координатой $\frac{n+1}{n} c_{n-1}(P)$, а дальше продолжим циклически.

При такой конструкции понятно, что кубы с $c_n(Q) = 0$ при касании их проекций на $\mathbb{R}^{n-1}$ имеют непересекающиеся проекции на вертикальное направление по предположению индукции для их оснований. Следовательно, все кубы нулевого цвета попарно не пересекаются. Любой другой цвет c получается из нулевого сдвигом в вертикальном направлении на вектор $(0, \ldots, 0, c)$, поэтому кубы этого цвета тоже попарно не пересекаются.

5. Пусть гладкая функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ имеет нулевой дифференциал (градиент) в каждой точке связного компактного множества $X \subset \mathbb{R}^2$. Докажите, что она постоянна на X.

Обратите внимание, что связное множество и линейно связное множество — разные вещи. Множество $X \subset \mathbb{R}^2$ называется несвязным, если его можно разбить на два непересекающихся непустых множества, каждое из которых является пересечением $X \cap U$ с открытым U.

Решение. Множество $f(X)$ компактно и связно из непрерывности f, то есть является отрезком. Так как каждая точка X по условию критическая, то $f(X)$ состоит из критических значений f и имеет меру нуль по теореме Сарда. Следовательно $f(X)$ состоит из одной точки.

Элементарное решение для двумерного случая. Пусть X содержится в некотором квадрате Q со стороной a, тогда мы можем считать производные f ограниченными. Нам понадобится такое следствие ограниченности её третьих производных:

Лемма 0.1. *Если $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ трижды непрерывно дифференцируема и её третья производная ограничена по модулю числом $12C$, то выполняется неравенство*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^3$$

при условии $df(x) = df(y) = 0$.

Доказательство. Вопрос сводится к рассмотрению функции одной переменной. Двумя интегрированиями по частям можно установить формулу

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\, dt = \int_x^y f'''(t) \frac{(t-x)(t-y)}{2}\, dt,$$

остаётся оценить в интеграле $|f'''(t)| \leq 12C$ и проинтегрировать оставшееся явное выражение. $\square$

Теперь разобьём Q на m^2 маленьких квадратиков и отметим те из них, которые пересекаются с X. Для любых двух точек $x, y \in X$ найдётся последовательность отмеченных квадратиков, в которой следующий граничит с предыдущим, первый содержит x, а последний содержит y; иначе множество X оказалось бы несвязным. Выберем в каждом из цепочки маленьких квадратиков по точке

$$x = x_0, x_1, \dots, x_n = y,$$

их количество будет не более m^2 и при этом будет выполняться

$$|x_i - x_{i-1}| \leq \frac{a2\sqrt{2}}{m}.$$

Тогда мы имеем неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}|^3 \leq \frac{a^3 16\sqrt{2}}{m},$$

из которого с учётом леммы и $df(x_i) = 0$ получаем неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq \sum_{i=1}^{n} C|x_i - x_{i-1}|^3 \leq C\frac{a^3 16\sqrt{2}}{m},$$

правую часть которого можно сделать сколь угодно малой выбором достаточно большого m. Это означает, что на самом деле $f(x) = f(y)$.