СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
13 МАЯ 2018 ГОДА

1. Докажите, что всякая вещественная квадратная матрица подобна матрице (a_{ij}), у которой $a_{ij} = -a_{ji}$ при $i \neq j$.

Решение. Положим $S = 1/2(A + A^T)$, $V = 1/2(A - A^T)$, тогда $A = S + V$, S является симметричной, а V — кососимметричной. Ортогональным преобразованием $S \mapsto O^T SO$ можно привести S к диагональному виду, а V при том же преобразовании $V \mapsto O^T VO$ останется кососимметричной. В итоге, матрица $O^T AO$ будет иметь требуемый вид.

2. Пусть m и n — нечётные натуральные числа. Определите знак выражения

$$I(y) = \int_0^\pi \sin^n x \cdot \sin^m(x + y)\, dx$$

в зависимости от параметра y.

Ответ: совпадает со знаком $\cos y$.

Решение. Сложим интеграл с самим собой, заменив переменную на $x \mapsto \pi - x$:

$$2I = \int_0^\pi \sin^n x \left(\sin^m(x + y) + \sin^m(\pi - x + y)\right)\, dx =$$
$$= \int_0^\pi \sin^n x \left(\sin^m(x + y) + \sin^m(x - y)\right)\, dx =$$
$$= \int_0^\pi \sin^n x \left(\sin(x + y) + \sin(x - y)\right) \left(\sin^{m-1}(x + y) - \cdots + \sin^{m-1}(x - y)\right)\, dx =$$
$$= \int_0^\pi 2 \sin^{n+1} x \cos y \left(\sin^{m-1}(x + y) - \sin^{m-2}(x + y) \sin(x - y) + \cdots + \sin^{m-1}(x - y)\right)\, dx.$$

Выражение в скобках положительно, чётная степень синуса — тоже, следовательно знак всего интеграла совпадает со знаком $\cos y$.

3. На проволочную единичную окружность паук натянул паутину. Паутина представляет из себя плоский граф с прямыми рёбрами в круге, ограниченном данной окружностью; из вершин графа, лежащих на окружности, ребро выходит внутрь окружности перпендикулярно ей; а в каждой вершине графа внутри круга сумма единичных исходящих касательных векторов к рёбрам графа нулевая. Докажите, что длина паутины равна количеству её вершин на окружности.

Решение. Будем сжимать паутину гомотетией к центру с коэффициентом t от 1 до 0. Те её части, которые были перпендикулярны окружности, оставляем перпендикулярными и после применения гомотетии продолжаем обратно до окружности, таким образом лежащие на окружности вершины не двигаются.

При таком движении паутины направления рёбер не меняются, производная длины всякого отрезка графа — это сумма по его концам величин $v \cdot \tau$, произведений скорости движения вершины на касательную к отрезку в вершине. Сумма производных длин по всем отрезкам графа преобразуется в сумму по вершинам и оказывается, что она равна нулю из данных в задаче условий на паутину. Следовательно, длина паутины при сжатии не меняется, а при $t \to +0$ паутина превратится в n радиусов окружности, где n — количество её вершин на окружности.

Замечание. Иначе можно объяснить это решение так: описанная конфигурация является критической точкой функционала длины паутины относительно произвольных перемещений внутренних вершин и перемещений граничных вершин по окружности. Стягивание конфигурации в начало координат является путём в пространстве конфигураций, идущим по критическим точкам функционала длины, а значит на этом пути значение функционала длины не меняется, а в конце пути оно равно количеству граничных вершин.

4. В $\mathbb{R}^n$ даны два базиса $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$, причём первый из них разбит на непустые поднаборы $X = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_k$. Докажите, что Y тоже можно разбить на поднаборы соответствующего размера $Y = Y_1 \sqcup \dots \sqcup Y_k$ так, что каждый набор $(X \setminus X_i) \cup Y_i$ $(i = 1, \dots, k)$ будет базисом.

Решение. Рассмотрим двойственный к первому базису $x_1^*, \dots, x_n^*$ и рассмотрим внешние формы

$$\xi_i = \bigwedge_{x_j \in X_i} x_j^*.$$

Их внешнее произведение

$$\nu = \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_k = \pm x_1^* \wedge \dots \wedge x_n^*$$

даёт нетривиальную форму максимальной степени, следовательно

$$\nu(y_1, \dots, y_n) \neq 0.$$

Распишем по определению внешнее умножение форм в неравенстве

$$(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_k)(y_1, \dots, y_n) \neq 0$$

как сумму по перестановкам (с точностью до положительного множителя)

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} \xi_1(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(\ell_1)}) \xi_2(y_{\sigma(\ell_1+1)}, \dots, y_{\sigma(\ell_1+\ell_2)}) \dots \xi_k(y_{\sigma(\ell_1+\dots+\ell_{k-1}+1)}, \dots, y_n) \neq 0.$$

Так как какое-то слагаемое в сумме должно быть ненулевым, мы получим с помощью перестановки σ из разбиения $X = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_k$ некоторое разбиение $Y = Y_1 \sqcup \dots \sqcup Y_k$, в котором для любого $i = 1, \dots, k$ при $Y_i = \{y_{i1}, \dots, y_{i\ell_i}\}$ будет выполняться

$$\xi_i(y_{i1}, \dots, y_{i\ell_i}) \neq 0,$$

что как раз означает, что при замене в X поднабора X_i на Y_i получится базис, так как ядро ξ_i в точности порождено векторами $X \setminus X_i$, и выписанное неравенство означает, что Y_i даёт базис в $\mathbb{R}^n / \langle X \setminus X_i \rangle$.

Замечание. Это решение можно изложить с помощью разложения детерминанта в сумму определителей миноров в первых k_1 строках, умноженных на их алгебраические дополнения. Применение этой формулы один раз даст утверждение для $k = 2$, далее можно продолжать рассуждение по индукции для одного из найденных ненулевых миноров.

5. Два игрока играют в игру на некотором множестве $X \subseteq \mathbb{R}$, делая счётное число шагов. На n-м шаге первый игрок выбирает длину $d_n > 0$, а второй выбирает отрезок на числовой прямой длины d_n. Задача второго — покрыть получившимися отрезками X, задача первого — не дать это сделать. При каких множествах X второй игрок имеет выигрышную стратегию?

Ответ: при счётных или конечных X.

Решение. Пусть в решении слово «счётное» обозначает «счётное или конечное». Для счётных $X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ стратегия второго проста — на n-м шаге покрывать отрезком точку x_n. Покажем, что для несчётных X любая стратегия второго может не сработать.

Можно считать, что множество X ограничено, так как у несчётного множества найдётся ограниченное несчётное подмножество. Будем так считать, и будем считать, что все ходы второго не вылезают за некоторый отрезок.

Первый игрок будет пытаться использовать ходы вида $1/n_i$ на i-м ходе, и мы попытаемся подобрать подходящие натуральные числа n_i, «ломающие» стратегию второго игрока в предположении, что эта стратегия зависит только от действий первого.

Так как сумма гармонического ряда расходится, для бесконечного числа потенциально выбранных первым игроком значений n_1 второй игрок кладёт отрезок, задевающий одну и ту же точку X_1. Отметим эту X_1 и назовём соответствующие n_1 «допустимыми». При каждом допустимом n_1, для бесконечного числа значений n_2 второй задевает одну и ту же точку $X_{n_1;2}$. Отметим эту точку и назовём соответствующие двухэлементные последовательности (n_1, n_2) «допустимыми».

Аналогично, на $(k+1)$-м шаге для каждой допустимой последовательности $(n_1, \ldots, n_k)$ мы знаем, что для бесконечного числа значений n_{k+1} второй игрок задевает одну и ту же точку $X_{n_1,n_2,\ldots,n_k;k+1}$. Отметим её и назовём такие последовательности $(n_1, \ldots, n_{k+1})$ «допустимыми».

В результате, для всевозможных k и допустимых k-элементных последовательностей натуральных чисел, мы отметили счётное число точек. В предположении выигрышности стратегии второго игрока покажем, что кроме них точек в множестве X нет. Если есть не участвующая в этом перечислении точка A, то предъявим стратегию первого, при которой второй не покроет A. На первом шаге первый выбирает допустимое $n_1 > 1/|A - X_1|$; второй не покрыл A, ибо он покрыл X_1. На $(k+1)$-м шаге первый выбирает $n_{k+1} > 1/|A - X_{n_1,\ldots,n_k;k+1}|$ так, что $(n_1, \ldots, n_{k+1})$ допустима; тогда второй покроет $X_{n_1,\ldots,n_k;k+1}$ и, следовательно, не покроет A.