# СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

13 МАЯ 2018 ГОДА

1. Докажите, что всякая вещественная квадратная матрица подобна матрице $(a_{ij})$, у которой $a_{ij} = -a_{ji}$ при $i \neq j$.

2. Пусть $m$ и $n$ — нечётные натуральные числа. Определите знак выражения

$$I(y) = \int_0^\pi \sin^n x \cdot \sin^m(x+y)\, dx$$

в зависимости от параметра $y$.

3. На проволочную единичную окружность паук натянул паутину. Паутина представляет из себя плоский граф с прямыми рёбрами в круге, ограниченном данной окружностью; из вершин графа, лежащих на окружности, ребро выходит внутрь окружности перпендикулярно ей; а в каждой вершине графа внутри круга сумма единичных исходящих касательных векторов к рёбрам графа нулевая. Докажите, что длина паутины равна количеству её вершин на окружности.

4. В $\mathbb{R}^n$ даны два базиса $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$, причём первый из них разбит на непустые поднаборы $X = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_k$. Докажите, что $Y$ тоже можно разбить на поднаборы соответствующего размера $Y = Y_1 \sqcup \dots \sqcup Y_k$ так, что каждый набор $(X \setminus X_i) \cup Y_i$ $(i = 1, \dots, k)$ будет базисом.

5. Два игрока играют в игру на некотором множестве $X \subseteq \mathbb{R}$, делая счётное число шагов. На $n$-м шаге первый игрок выбирает длину $d_n > 0$, а второй выбирает отрезок на числовой прямой длины $d_n$. Задача второго — покрыть получившимися отрезками $X$, задача первого — не дать это сделать. При каких множествах $X$ второй игрок имеет выигрышную стратегию?