СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

10 ДЕКАБРЯ 2017

1–2 КУРС

1. Докажите, что для любых n многочленов $P_1(x), \dots, P_n(x)$ с действительными коэффициентами найдётся их нетривиальная линейная комбинация $\lambda_1 P_1(x) + \dots + \lambda_n P_n(x)$, у которой не менее $n-1$ действительного корня.

   Решение. Возьмём произвольные $n-1$ число $x_1, \dots, x_{n-1}$. Система уравнений
$$\begin{aligned} \lambda_1 P_1(x_1) + \dots + \lambda_n P_n(x_1) &= 0 \\ \lambda_1 P_1(x_2) + \dots + \lambda_n P_n(x_2) &= 0 \\ &\dots \\ \lambda_1 P_1(x_{n-1}) + \dots + \lambda_n P_n(x_{n-1}) &= 0 \end{aligned}$$
   является линейной системой из $n-1$ уравнения относительно n переменных λ_i. Следовательно, она имеет нетривиальное решение.

2. Назовём *колебанием функции* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *в точке* x_0 точную нижнюю грань колебаний функции на множестве U по всем окрестностям $U \ni x_0$, где колебание на множестве U — это $\sup_{x\in U} f(x) - \inf_{x\in U} f(x)$. Функция имеет колебание 1 в каждой точке, кроме нуля. Какое колебание она может иметь в нуле?

   Ответ: любое ≥ 1.

   Решение. Приведём пример любого конечного колебания $C \geq 1$ в нуле: рассмотрим функцию Дирихле
$$D(x) = 1, x \in \mathbb{Q}, \quad D(x) = 0, x \notin \mathbb{Q};$$
   положим
$$f(x) = D(x), x \neq 0, \quad f(0) = C.$$
   Очевидно, что в любой точке $x_0 \neq 0$ колебание ровно 1, так как в достаточно маленькой окрестности x_0 функция f принимает ровно два значения, различающиеся на единицу. При $x_0 = 0$ мы в любой окрестности x_0 видим три значения: $0, 1, C$ и ясно, что колебание в нуле равно C.

   Для бесконечного колебания в нуле пример такой:
$$f(x) = D(x), x \leq 0, \quad f(x) = D(x) + \frac{1}{x}, x > 0.$$
   То, что колебание в $x_0 < 0$ равно единице, а в $x_0 = 0$ бесконечно, очевидно. При $x_0 > 0$ функция имеет два разных частичных предела, отличающиеся на 1, из чего легко следует, что колебание равно 1.

   Теперь объясним, почему колебания $C \in [0, 1)$ быть не может. Тогда взяв $D \in (C, 1)$ мы должны найти окрестность $U(x_0)$, в которой точная верхняя грань f отличается от точной нижней грани не более, чем на D. Взяв точку $x_1 \in U(x_0)$ мы увидим, что в ней тогда колебание не более D, а должно быть 1 — противоречие.

3. Предположим, семейство подмножеств $\mathcal{C}$ натуральных чисел, $\mathcal{C} \subset 2^{\mathbb{N}}$, оказалось таким, что для любых $X, Y \in \mathcal{C}$ выполняется либо $X \subseteq Y$, либо $Y \subseteq X$. Верно ли, что $\mathcal{C}$ не более чем счётно?

   Ответ: нет, может быть даже континуум.

   Решение. Вместо $\mathbb{N}$ возьмём множество $\mathbb{Q}$, так как между ними существует биекция. Пусть тогда $\mathcal{C}$ состоит из множеств вида $L_x = \{y \in \mathbb{Q} : y < x\} \subset \mathbb{Q}$, где $x \in \mathbb{R}$ — любое. Для разных $x \in \mathbb{R}$ такие множества различны и всего их континуум. Кроме того, при $x < x'$ выходит $L_x \subset L_{x'}$, а при $x > x'$ — $L_x \supset L_{x'}$.

4. Существуют ли 100 попарно зацепленных треугольников в трёхмерном пространстве? Два непересекающихся (невырожденных) треугольника в трёхмерном пространстве называются *зацепленными*, если контур первого треугольника пересекает относительную внутренность второго треугольника ровно в одной точке, причём два отрезка контура первого треугольника, выходящие из этой точки, находятся по разные стороны от плоскости второго треугольника.

   Ответ: существуют.

   Решение. Возьмём правильный треугольник T в пространстве с одной из высот AB. Обозначим через $R^\varepsilon = R^{\varepsilon,\varepsilon}_{AB}$ преобразование пространства, являющееся композицией переноса на вектор $\varepsilon\overrightarrow{AB}$ и вращения вокруг $\overrightarrow{AB}$ на угол ε (винтовое движение). При достаточно малом ε треугольники T и $R^\varepsilon(T)$ зацеплены, так как пересечение их плоскостей содержит высоты каждого из них, и в этом пересечении контур одного из них проходит через выпуклую оболочку другого. Поэтому треугольники

   $$R^{m\varepsilon/100}(T) \quad \text{и} \quad R^{n\varepsilon/100}(T) = R^{(n-m)\varepsilon/100}(R^{m\varepsilon/100}(T))$$

   зацеплены при любых $0 \le m < n < 100$.

   Другое решение. Покажем, как строить пример по индукции. Пусть у нас есть несколько попарно зацепленных треугольников и контур одного из них находится на расстоянии не менее ε от контуров всех других. Тогда этот один треугольник T можно пошевелить менее чем на ε и получить треугольник T', зацепленный с T (например, работает конструкция из предыдущего решения для двух треугольников). Так как при шевелении контур двигался не более чем на ε, то контур T' при движении не пересекал контуры других треугольников. Следовательно, T' остался зацепленным со всеми остальными треугольниками, как и T.

5. Найдите детерминант из биномиальных коэффициентов для любых $a, b \in \mathbb{R}$

   $$\det\left(\binom{ai+bj}{j}\right)_{0\le i,j\le n}.$$

   Здесь используется обозначение

   $$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Ответ: $a^{n(n+1)/2}$.

Решение. В столбце номер j этой матрицы стоит некоторый многочлен от переменной i степени ровно j. Вычитая более левые столбцы из более правых, мы можем добиться того, что в j-м многочлене останется лишь его старший член $a^j i^j / j!$. Выносим $\frac{a^{n(n+1)/2}}{\prod_{j=0}^{n} j!}$ и получаем определитель Вандермонда от $0, 1, \ldots, n$, который как раз равен $\prod_{j=0}^{n} j!$. После сокращения факториалов остаётся только степень a.

Другое решение. Можно заметить, что рассматриваемая матрица является произведением двух:

$$\left(\binom{ai}{j}\right)_{0 \le i,j \le n} \quad \text{и} \quad \left(\binom{bj}{j-i}\right)_{0 \le i,j \le n}.$$

Биномиальный коэффициент $\binom{\alpha}{k}$ считаем равным нулю при $k < 0$. Тогда вторая матрица является треугольной с единицами на диагонали, и следовательно не вносит вклада в детерминант. С первой же матрицей можно разделаться так же, как в первом решении.

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
10 ДЕКАБРЯ 2017

3–6 КУРС

1. Предположим, семейство подмножеств $\mathcal{C}$ натуральных чисел, $\mathcal{C} \subset 2^{\mathbb{N}}$, оказалось таким, что для любых $X, Y \in \mathcal{C}$ выполняется либо $X \subseteq Y$, либо $Y \subseteq X$. Верно ли, что $\mathcal{C}$ не более чем счётно?

   Ответ: нет, может быть даже континуум.

   Решение. Вместо $\mathbb{N}$ возьмём множество $\mathbb{Q}$, так как между ними существует биекция. Пусть тогда $\mathcal{C}$ состоит из множеств вида $L_x = \{y \in \mathbb{Q} : y < x\} \subset \mathbb{Q}$, где $x \in \mathbb{R}$ — любое. Для разных $x \in \mathbb{R}$ такие множества различны и всего их континуум. Кроме того, при $x < x'$ выходит $L_x \subset L_{x'}$, а при $x > x'$ — $L_x \supset L_{x'}$.

2. Существуют ли 100 попарно зацепленных треугольников в трёхмерном пространстве? Два непересекающихся (невырожденных) треугольника в трёхмерном пространстве называются *зацепленными*, если контур первого треугольника пересекает относительную внутренность второго треугольника ровно в одной точке, причём два отрезка контура первого треугольника, выходящие из этой точки, находятся по разные стороны от плоскости второго треугольника.

   Ответ: существуют.

   Решение. Возьмём правильный треугольник T в пространстве с одной из высот AB. Обозначим через $R^\varepsilon = R^{\varepsilon,\varepsilon}_{AB}$ преобразование пространства, являющееся композицией переноса на вектор $\varepsilon\overrightarrow{AB}$ и вращения вокруг $\overrightarrow{AB}$ на угол ε (винтовое движение). При достаточно малом ε треугольники T и $R^\varepsilon(T)$ зацеплены, так как пересечение их плоскостей содержит высоты каждого из них, и в этом пересечении контур одного из них проходит через выпуклую оболочку другого. Поэтому треугольники

   $$R^{m\varepsilon/100}(T) \quad \text{и} \quad R^{n\varepsilon/100}(T) = R^{(n-m)\varepsilon/100}(R^{m\varepsilon/100}(T))$$

   зацеплены при любых $0 \le m < n < 100$.

   Другое решение. Покажем, как строить пример по индукции. Пусть у нас есть несколько попарно зацепленных треугольников и контур одного из них находится на расстоянии не менее ε от контуров всех других. Тогда этот один треугольник T можно пошевелить менее чем на ε и получить треугольник T', зацепленный с T (например, работает конструкция из предыдущего решения для двух треугольников). Так как при шевелении контур двигался не более чем на ε, то контур T' при движении не пересекал контуры других треугольников. Следовательно, T' остался зацепленным со всеми остальными треугольниками, как и T.

3. Найдите детерминант из биномиальных коэффициентов для любых $a, b \in \mathbb{R}$

$$\det\left(\binom{ai+bj}{j}\right)_{0\le i,j\le n}.$$

Здесь используется обозначение

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Ответ: $a^{n(n+1)/2}$.

Решение. В столбце номер j этой матрицы стоит некоторый многочлен от переменной i степени ровно j. Вычитая более левые столбцы из более правых, мы можем добиться того, что в j-м многочлене останется лишь его старший член $a^j i^j/j!$. Выносим $\frac{a^{n(n+1)/2}}{\prod_{j=0}^n j!}$ и получаем определитель Вандермонда от $0, 1, \dots, n$, который как раз равен $\prod_{j=0}^n j!$. После сокращения факториалов остаётся только степень a.

Другое решение. Можно заметить, что рассматриваемая матрица является произведением двух:

$$\left(\binom{ai}{j}\right)_{0\le i,j\le n} \quad \text{и} \quad \left(\binom{bj}{j-i}\right)_{0\le i,j\le n}.$$

Биномиальный коэффициент $\binom{\alpha}{k}$ считаем равным нулю при $k < 0$. Тогда вторая матрица является треугольной с единицами на диагонали, и следовательно не вносит вклада в детерминант. С первой же матрицей можно разделаться так же, как в первом решении.

4. Пусть функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ взаимно однозначно отображает единичный диск $D \subset \mathbb{C}$ на открытую область $U \subseteq \mathbb{C}$. Докажите, что площадь U равна

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi n |a_n|^2.$$

Решение. Пусть $z = x + iy$, вещественный якобиан отображения f тогда равен $|f'|^2$ и площадь U считается как интеграл по единичному диску

$$\int_D |f'|^2\, dxdy.$$

Если рассматривать предыдущее выражение как квадрат L_2-нормы $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, то нам надо посчитать соответствующие скалярные произведения z^n и z^m, то есть

$$\int z^n \overline{z^m}\, dxdy = \int_{r=0}^{1} \int_{\varphi=1}^{2\pi} r^{n+m+1} e^{i(n-m)\varphi}\, dr d\varphi = \frac{2\pi}{n+m+2}\delta_{nm}.$$

То есть z^n и z^m ортогональны при $n \neq m$, а при $n = m$ квадрат нормы выражения nz^{n-1} будет равен πn. Отсюда и следует формула для квадрата нормы f'.

5. Пусть функция $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема и строго выпукла, то есть $u((1-t)x + ty) < (1-t)u(x) + tu(y)$ для любых $x \neq y \in \mathbb{R}^n$ и $0 < t < 1$. Докажите, что краевая задача для $x : [0,1] \to \mathbb{R}^n$

$$\ddot{x} = \nabla u(x),\ x(0) = a,\ x(1) = b$$

имеет не более одного решения при любых $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Решение. Заметим, что решение краевой задачи является критической точкой функционала

$$S(x) = \int_0^1 \frac{\dot{x}^2}{2} + u(x)\, dt,$$

про который важно знать, что он строго выпуклый по x, то есть при наличии двух различных кандидатов на решения $x, y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих граничным условиям, мы имеем

$$S((1-t)x + ty) < (1-t)S(x) + tS(y)$$

при $0 < t < 1$. Пусть теперь x и y являются критическими точками функционала, тогда и функция одной переменной $f(t) = S((1-t)x + ty)$ будет иметь критические точки в 0 и 1, но это невозможно для строго выпуклой функции одной переменной.

Другое решение. Предположив наличие двух разных решений краевой задачи, воспользуемся следующим из строгой выпуклости неравенством

$$(\nabla u(x_1) - \nabla u(x_2)) \cdot (x_1 - x_2) > 0$$

для любых $x_1 \neq x_2$. Тогда вычитая одно из другого уравнения для двух решений получим

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = \nabla u(x_1) - \nabla u(x_2) \Rightarrow (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) \cdot (x_1 - x_2) = (\nabla u(x_1) - \nabla u(x_2)) \cdot (x_1 - x_2) > 0$$

в точках, где x_1 не совпадает с x_2. Положим $y = x_1 - x_2$ и интегрируя, получим

$$\int_0^1 \ddot{y} \cdot y\, dt = y\dot{y}|_0^1 - \int_0^1 \dot{y}^2\, dt > 0.$$

Однако, $y(0) = y(1) = 0$, а значит выходит

$$-\int_0^1 \dot{y}^2\, dt < 0$$

— противоречие.

Замечание. Можно показать, что одно решение обязательно найдётся. Для этого надо доказать, что функционал $S(x)$ ограничен снизу при данных граничных условиях и рассмотреть слабый предел (в пространстве Соболева $W^{1,2}$) траекторий, значение функционала для которых стремится к минимальному. Потом надо доказать, что эта предельная траектория на самом деле является решением дифференциального уравнения в обычном смысле. Технические подробности читатель может попробовать восстановить самостоятельно.