СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

10 ДЕКАБРЯ 2017

1–2 КУРС

1. Докажите, что для любых n многочленов $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ с действительными коэффициентами найдётся их нетривиальная линейная комбинация $\lambda_1 P_1(x) + \cdots + \lambda_n P_n(x)$, у которой не менее $n-1$ действительного корня.

2. Назовём *колебанием функции* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *в точке* x_0 точную нижнюю грань колебаний функции на множестве U по всем окрестностям $U \ni x_0$, где колебание на множестве U — это $\sup_{x\in U} f(x) - \inf_{x\in U} f(x)$. Функция имеет колебание 1 в каждой точке, кроме нуля. Какое колебание она может иметь в нуле?

3. Предположим, семейство подмножеств $\mathcal{C}$ натуральных чисел, $\mathcal{C} \subset 2^{\mathbb{N}}$, оказалось таким, что для любых $X, Y \in \mathcal{C}$ выполняется либо $X \subseteq Y$, либо $Y \subseteq X$. Верно ли, что $\mathcal{C}$ не более чем счётно?

4. Существуют ли 100 попарно зацепленных треугольников в трёхмерном пространстве? Два непересекающихся (невырожденных) треугольника в трёхмерном пространстве называются *зацепленными*, если контур первого треугольника пересекает относительную внутренность второго треугольника ровно в одной точке, причём два отрезка контура первого треугольника, выходящие из этой точки, находятся по разные стороны от плоскости второго треугольника.

5. Найдите детерминант из биномиальных коэффициентов для любых $a, b \in \mathbb{R}$

$$\det\left(\binom{ai+bj}{j}\right)_{0\le i,j\le n}.$$

Здесь используется обозначение

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
10 ДЕКАБРЯ 2017

3–6 КУРС

1. Предположим, семейство подмножеств $\mathcal{C}$ натуральных чисел, $\mathcal{C} \subset 2^{\mathbb{N}}$, оказалось таким, что для любых $X, Y \in \mathcal{C}$ выполняется либо $X \subseteq Y$, либо $Y \subseteq X$. Верно ли, что $\mathcal{C}$ не более чем счётно?

2. Существуют ли 100 попарно зацепленных треугольников в трёхмерном пространстве? Два непересекающихся (невырожденных) треугольника в трёхмерном пространстве называются *зацепленными*, если контур первого треугольника пересекает относительную внутренность второго треугольника ровно в одной точке, причём два отрезка контура первого треугольника, выходящие из этой точки, находятся по разные стороны от плоскости второго треугольника.

3. Найдите детерминант из биномиальных коэффициентов для любых $a, b \in \mathbb{R}$
$$\det\left(\binom{ai+bj}{j}\right)_{0\le i,j\le n}.$$
Здесь используется обозначение
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

4. Пусть функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ взаимно однозначно отображает единичный диск $D \subset \mathbb{C}$ на открытую область $U \subseteq \mathbb{C}$. Докажите, что площадь U равна
$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi n |a_n|^2.$$

5. Пусть функция $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема и строго выпукла, то есть $u((1-t)x+ty) < (1-t)u(x) + tu(y)$ для любых $x \neq y \in \mathbb{R}^n$ и $0 < t < 1$. Докажите, что краевая задача для $x : [0,1] \to \mathbb{R}^n$
$$\ddot{x} = \nabla u(x),\ x(0) = a,\ x(1) = b$$
имеет не более одного решения при любых $a, b \in \mathbb{R}^n$.