СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

06 ДЕКАБРЯ 2015

1–2 КУРС

1. Существует ли непрерывная на отрезке функция такая, что её значения в рациональных точках иррациональны, а в иррациональных точках рациональны?

   Ответ: нет.

   Решение. Ясно, что такая функция не может быть постоянной, значит её множество значений — тоже отрезок. На этом отрезке лежит континуум иррациональных чисел, но иррациональные значения принимаются только в рациональных точках, которых счётное число. Так как мощность континуума строго больше, чем счётная, то получается противоречие.

2. У многочлена $p(x)$ с действительными коэффициентами все корни (действительные и комплексные) по модулю больше единицы. Докажите, что существует многочлен $q(x)$ с действительными коэффициентами, делящийся на $p(x)$, у которого модуль свободного члена больше суммы модулей остальных коэффициентов.

   Решение. Можно считать, что $p(x) = \prod_i (1 - x/c_i)$, где c_i — все комплексные корни с учётом кратности, у него свободный член равен 1. Тогда подходит многочлен $q(x) = \prod_i (1 - x^n/c_i^n)$ при достаточно большом n: у него будет не больше, чем 2^d ненулевых коэффициентов (d — степень многочлена), то есть их количество не будет зависеть от n. Свободный член будет всегда равен 1, а остальные члены стремятся к нулю при $n \to \infty$.

3. В эллипсе E проведена хорда AB, не проходящая через центр E. Через каждую точку X на интервале AB проведём другую хорду CD эллипса E так, что $CX = DX$. Докажите, что всевозможные прямые CD при меняющейся точке X касаются некоторой фиксированной параболы.

   Решение. Аффинным преобразованием сделаем E окружностью. Тогда прямая $\ell = CD$ определяется тем, что $\ell \perp XO$ и $\ell \ni X$, где O – центр E. Проведём параболу с фокусом O, касающуюся AB своей вершиной. Тогда директриса параболы d получается из прямой AB гомотетией с центром O и коэффициентом 2. Когда X движется по AB, точка Y, определяемая соотношением

$$\overline{OY} = 2\overline{OX}$$

   движется по директрисе. Точка Z на параболе, лежащая на равном расстоянии от O и Y, будет обладать тем свойством, что ZX — биссектриса угла OZY, по определению параболы через фокус и директрису. Тогда из равнобедренности $\triangle OZY$ мы также получим, что $OX \perp ZX$, то есть $\ell = ZX$, а из оптического свойства параболы — что ZX касается параболы.

4. Предположим, линейное отображение $T : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ коммутирует с дифференцированием и умножением функции на x. Докажите, что T — это умножение на константу, то есть $T(f) = cf$ для некоторой константы c и любой $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

   Комментарий. Отображение называется линейным, если для двух функций f и g и двух чисел a и b

   $$T(af + bg) = aT(f) + bT(g).$$

   $C^\infty(\mathbb{R})$ — бесконечно дифференцируемые функции на прямой.

   Решение. Заметим, что T коммутирует с умножением на многочлены, и в частности на $x - a$. Далее заметим, что если $f(a) = 0$ то

   $$f(x) = (x - a)g(x)$$

   для некоторой $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Тогда

   $$Tf = (x - a)Tg,$$

   то есть Tf тоже обращается в нуль в a. Пусть теперь $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $T1 = c(x)$. Подействуем отображением T на $g(x) = f(x) - f(a) \cdot 1$, последняя функция обращается в нуль в a, и значит Tg тоже должна обратиться в нуль в a, то есть

   $$Tf(a) - f(a)c(a) = 0.$$

   Так как это верно для любого a, то на самом деле

   $$Tf(x) = c(x)f(x),$$

   то есть отображение T сводится к поточечному умножению на гладкую функцию $c(x)$. Теперь применим коммутирование с дифференцированием

   $$0 = T(0) = T(1') = c(x)',$$

   следовательно, $c(x)$ на самом деле константа.

   Замечание. Можно заметить, что то же верно с заменой $C^\infty(\mathbb{R})$ на пространство Шварца $S(\mathbb{R})$, что позволяет доказать формулу обращения для преобразования Фурье на пространстве Шварца, взяв $T = F \circ F^{-1}$.

5. В трёхмерном кубе единичного размера даны $2n$ точек. Докажите, что точки можно разбить на пары так, что сумма кубов расстояний в парах будет не более 200.

Решение. Давайте сначала разобьём точки на пары $\{A_i, B_i\}_{i=1}^n$ так, чтобы сумма квадратов расстояний $\sum_i |A_iB_i|^2$ была минимально возможной.

Рассмотрим некоторую четвёрку точек, без ограничения общности это A_1, B_1, A_2, B_2. Тогда из условия минимальности

$$|A_1B_1|^2 + |A_2B_2|^2 \le |A_1A_2|^2 + |B_1B_2|^2$$

и

$$|A_1B_1|^2 + |A_2B_2|^2 \le |A_1B_2|^2 + |B_1A_2|^2,$$

далее, используя одинаковые обозначения для точек и их радиусов векторов:

$$(A_1, B_1) + (A_2, B_2) \ge (A_1, A_2) + (B_1, B_2) \tag{1}$$

и

$$(A_1, B_1) + (A_2, B_2) \ge (A_1, B_2) + (B_1, A_2). \tag{2}$$

Докажем неравенство

$$|A_1 + B_1 - A_2 - B_2|^2 \ge |A_1B_1|^2 + |A_2B_2|^2, \tag{3}$$

после раскрытия скобок оно превращается в

$$4(A_1, B_1) + 4(A_2, B_2) \ge 2(A_1, A_2) + 2(B_1, B_2) + 2(A_1, B_2) + 2(B_1, A_2),$$

что получается сложением (1) и (2).

Далее, из (3) выводим

$$\left|\frac{A_1 + B_1 - A_2 - B_2}{2}\right|^2 \ge \frac{1}{8}(|A_1B_1| + |A_2B_2|)^2.$$

Если обозначить $d_i = |A_iB_i|$, то что означает вообще, что шары радиусов $\frac{1}{2\sqrt{2}}d_i$ с центрами в соответствующих серединах отрезков A_iB_i попарно не пересекаются. Сумма объёмов этих шаров равна

$$\frac{4\pi}{3}\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i^3}{16\sqrt{2}} = \frac{\pi}{12\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{n} d_i^3.$$

Но каждый из шаров имеет радиус не более $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \le 1$, следовательно они лежат в кубе с ребром 3 и тогда выходит

$$\frac{\pi}{12\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{n} d_i^3 \le 27,$$

то есть

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^3 \le \frac{324\sqrt{2}}{\pi} \le 200.$$

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
06 ДЕКАБРЯ 2015

3–6 КУРС

1. У многочлена $p(x)$ с действительными коэффициентами все корни (действительные и комплексные) по модулю больше единицы. Докажите, что существует многочлен $q(x)$ с действительными коэффициентами, делящийся на $p(x)$, у которого модуль свободного члена больше суммы модулей остальных коэффициентов.

   Решение. Можно считать, что $p(x) = \prod_i (1 - x/c_i)$, где c_i — все комплексные корни с учётом кратности, у него свободный член равен 1. Тогда подходит многочлен $q(x) = \prod_i (1 - x^n/c_i^n)$ при достаточно большом n: у него будет не больше, чем 2^d ненулевых коэффициентов (d — степень многочлена), то есть их количество не будет зависеть от n. Свободный член будет всегда равен 1, а остальные члены стремятся к нулю при $n \to \infty$.

2. Существует ли многочлен $P(z)$ от комплексной переменной $z = x + iy$ с комплексными коэффициентами такой, что

$$|P(z)| = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + x^2 + y^2?$$

   Ответ: нет.

   Решение. Ясно, что многочлен $P(z)$ имеет нуль кратности 2 в нуле. Тогда $Q(z) = P(z)/z^2$ — тоже многочлен и

$$|Q(z)| = x^2 + y^2 + 1.$$

   Из этого следует, что Q не является константой и у него нет корней — противоречие.

3. Пусть при конформном отображении $f : Q \to \mathbb{C}$ образ единичного квадрата Q имеет площадь S, и пусть I и J — две его противоположные стороны. Докажите, что $\operatorname{dist}(f(I), f(J)) \leq \sqrt{S}$

   Комментарий. dist — расстояние между множествами.

   Решение. Пусть

$$I = \{z = x + iy : x = 0, y \in [0, 1]\}, \quad J = \{z = x + iy : x = 1, y \in [0, 1]\}.$$

   Условие на площадь означает, что

$$\int_Q |f'(z)|^2 dxdy = S.$$

   Следовательно, при некотором фиксированном y_0 будет

$$\int_{x=0}^1 |f'(x + iy_0)|^2 dx \leq S.$$

По неравенству Коши–Буняковского выходит, что

$$\int_{x=0}^{1} |f'(x+iy_0)|dx \leq \sqrt{S},$$

А это означает, что образ отрезка $\{z = x + iy : y = y_0, x \in [0,1]\}$ при отображении f имеет длину не более $\sqrt{S}$. Очевидно, этот образ соединяет $f(I)$ и $f(J)$.

4. Пусть f — аналитическая функция на единичном круге. Докажите, что длина кривой $\Gamma_r = \{f(re^{i\varphi})\}_{\varphi=0}^{2\pi}$ монотонно возрастает с ростом $r \in [0,1)$.

   Решение. Запишем длину кривой:

   $$|\Gamma_r| = \int_0^{2\pi} r|f'(re^{i\varphi})|\, d\varphi.$$

   Мы докажем, что не только $|\Gamma_r|$, но и

   $$\frac{|\Gamma_r|}{r} = \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\varphi})|\, d\varphi$$

   возрастает. Заметим, что функция $\rho(z) = |f'(z)|$ — субгармоническая, то есть её значение в любой точке z не более среднего по любой окружности с центром в z. Также при любом φ функция $\rho(ze^{i\phi})$, очевидно, субгармоническая. Условие субгармоничности линейно и однородно, следовательно усреднение субгармонических функций даёт субгармоническую, то есть

   $$\bar{\rho}(z) = \int_0^{2\pi} \rho(ze^{i\varphi})\, d\varphi$$

   — тоже субгармоническая функция. Но $\bar{\rho}(z)$ уже не зависит от аргумента z и $|\Gamma_{|z|}| = \bar{\rho}(z)$. По принципу максимума для субгармонических функций мы получаем, что она должна возрастать с ростом $|z|$.

5. Назовём перестановку a_1, a_2, …, a_n чисел 1, 2, …, n *пилообразной*, если

   $$(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) > 0 \quad \text{при всех} \quad i = 2, \ldots, n-1.$$

   Обозначим через A_n количество таких пилообразных перестановок длины n. Пусть ε — число между 0 и $\pi/2$. Докажите, что при всех достаточно больших n верно неравенство

   $$A_n \leq \frac{n!}{(\pi/2 - \varepsilon)^n}.$$

Решение. Обозначим через B_n число пилообразных перестановок, у которых $a_2 > a_1$ (если a_2 есть). Очевидно, $B_n = A_n/2$ при $n \geq 2$, но для B_n нам будет удобнее вывести формулу. Ясно также, что утверждение задачи достаточно доказать для B_n.

Позиция единицы в перестановке разделяет все остальные числа на то, что стоит слева, и то, что стоит справа от единицы: $\{2, \ldots, n\} = I \cup J$; и каждое из множеств I и J пилообразно переставлено с известным порядком возрастания и убывания. Следовательно, получаем при $n \geq 2$ рекуррентное соотношение (считая $B_0 = 1$ и $B_1 = 1$):

$$A_n = 2B_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B_i B_{n-1-i}.$$

Обозначив

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n,$$

получаем из рекуррентного соотношения:

$$2f'(x) = f(x)^2 + 1.$$

Решая дифференциальное уравнение и используя начальные условия $f(1) = 1$, находим:

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Нетрудно заметить, что радиус сходимости этого ряда — $\pi/2$, поскольку ближайшая особая точка — это $\pi/2$. Теперь требуемое утверждение следует из формулы Коши–Адамара для радиуса сходимости.