СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

06 ДЕКАБРЯ 2015

1–2 КУРС

1. Существует ли непрерывная на отрезке функция такая, что её значения в рациональных точках иррациональны, а в иррациональных точках рациональны?

2. У многочлена $p(x)$ с действительными коэффициентами все корни (действительные и комплексные) по модулю больше единицы. Докажите, что существует многочлен $q(x)$ с действительными коэффициентами, делящийся на $p(x)$, у которого модуль свободного члена больше суммы модулей остальных коэффициентов.

3. В эллипсе E проведена хорда AB, не проходящая через центр E. Через каждую точку X на интервале AB проведём другую хорду CD эллипса E так, что $CX = DX$. Докажите, что всевозможные прямые CD при меняющейся точке X касаются некоторой фиксированной параболы.

4. Предположим, линейное отображение $T : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ коммутирует с дифференцированием и умножением функции на x. Докажите, что T — это умножение на константу, то есть $T(f) = cf$ для некоторой константы c и любой $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

   Комментарий. Отображение называется линейным, если для двух функций f и g и двух чисел a и b

   $$T(af + bg) = aT(f) + bT(g).$$

   $C^\infty(\mathbb{R})$ — бесконечно дифференцируемые функции на прямой.

5. В трёхмерном кубе единичного размера даны $2n$ точек. Докажите, что точки можно разбить на пары так, что сумма кубов расстояний в парах будет не более 200.

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

06 ДЕКАБРЯ 2015

3–6 КУРС

1. У многочлена $p(x)$ с действительными коэффициентами все корни (действительные и комплексные) по модулю больше единицы. Докажите, что существует многочлен $q(x)$ с действительными коэффициентами, делящийся на $p(x)$, у которого модуль свободного члена больше суммы модулей остальных коэффициентов.

2. Существует ли многочлен $P(z)$ от комплексной переменной $z = x + iy$ с комплексными коэффициентами такой, что
$$|P(z)| = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + x^2 + y^2?$$

3. Пусть при конформном отображении $f : Q \to \mathbb{C}$ образ единичного квадрата Q имеет площадь S, и пусть I и J — две его противоположные стороны. Докажите, что $\operatorname{dist}(f(I), f(J)) \leq \sqrt{S}$

   Комментарий. dist — расстояние между множествами.

4. Пусть f — аналитическая функция на единичном круге. Докажите, что длина кривой $\Gamma_r = \{f(re^{i\varphi})\}_{\varphi=0}^{2\pi}$ монотонно возрастает с ростом $r \in [0, 1)$.

5. Назовём перестановку a_1, a_2, ..., a_n чисел 1, 2, ..., n *пилообразной*, если
$$(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) > 0 \quad \text{при всех} \quad i = 2, \ldots, n-1.$$
   Обозначим через A_n количество таких пилообразных перестановок длины n. Пусть ε — число между 0 и $\pi/2$. Докажите, что при всех достаточно больших n верно неравенство
$$A_n \leq \frac{n!}{(\pi/2 - \varepsilon)^n}.$$