СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

24 МАЯ 2015

1. Пусть E — единичная матрица, а A — произвольная матрица того же размера. Найдите предел
$$\lim_{t\to 0}\frac{\det(E+tA)-1}{t}.$$

   Ответ: $\operatorname{tr} A$.

   Решение. Заметим, что
$$\det(E+tA)=t^n\det\left(\frac{1}{t}E+A\right)=t^n\chi_A\left(\frac{-1}{t}\right),$$
где $\chi_A(s)$ — характеристический многочлен A, а n — размер матрицы. Тогда мы ищем коэффициент при t в многочлене $t^n\chi_A(\frac{-1}{t})$, то есть коэффициент при t^{n-1} в характеристическом многочлене с точностью до знака $(-1)^{n-1}$. Как известно, это след.

   Иначе, можно просто привести матрицу к верхнетреугольному виду, тогда $\det(E+tA)$ будет равен
$$\prod_{i=1}^{n}(1+ta_{ii})$$
и ответ очевиден.

2. Пусть сечение конуса $x^2+y^2=z^2$ $(z\geq 0)$ плоскостью является эллипсом. Докажите, что у проекции этого эллипса на плоскость $0xy$ начало координат является фокусом.

   Решение. Это можно просто посчитать, но мы приведём геометрическое решение. Пусть данный конус C, его сечение — E с центром c. Пусть конус C' центрально симметричен C относительно c, и пусть $0'$ — его вершина. Тогда
$$E=C\cap C'.$$
Для любой точки $p\in E$ длина отрезка $|0p|$ в $\sqrt{2}$ раз больше его проекции на ось $0z$. Аналогично, длина отрезка $|p0'|$ в $\sqrt{2}$ раз больше его проекции на ось $0z$ (так как отрезки лежат на соответствующих конусах). Так как сумма проекций этих отрезков на ось $0z$ постоянна, то сумма их длин
$$|0p|+|p0'|$$
постоянна.

   При проекции на плоскость $0xy$ пусть p переходит в p_{xy}, а $0'$ — в 0_{xy}. Так как эта проекция уменьшит все длины в $\sqrt{2}$ раз, то получается, что
$$|0p_{xy}|+|p_{xy}0_{xy}|=\mathrm{const},$$
что и требовалось доказать.

3. Дан многочлен степени d от n переменных. Докажите, что либо он принимает ненулевые значения как минимум в 2^{n-d} вершинах куба $\{-1,1\}^n$, либо он принимает только нулевые значения в вершинах этого куба.

   Решение. Заметим, что в точках множества $V = \{-1,1\}^n$ выполняется соотношение $x_i^2 = 1$ для любой координаты x_i. Это означает, что рассматриваемый многочлен $P(x_1,\ldots,x_n)$ можно заменить на другой многочлен $Q(x_1,\ldots,x_n)$, у которого степени всех переменных не более чем 1 и значения на V те же самые.

   Если Q оказался нулевым, то и P был равен нулю на множестве V. Иначе рассмотрим моном M_0 в Q максимальной степени $k \le d$, без ограничения общности пусть это $M_0 = ax_1\ldots x_k$. Заметим, что если какой-то из мономов $M(x_1,\ldots,x_n)$ не содержит переменной x_i при $1 \le i \le k$, то сумма

$$\overline{M}(x_{k+1},\ldots,x_n) = \sum_{x_1,\ldots,x_k\in\{-1,1\}} x_1\ldots x_k M(x_1,\ldots,x_n)$$

   окажется равной нулю, ибо правая часть разбивается на сокращающиеся пары слагаемых, соответствующие замене $x_i \mapsto -x_i$. Однако для монома $M_0(x_1,\ldots,x_n) = ax_1\ldots x_k$ такая сумма $\overline{M}_0(x_{k+1},\ldots,x_n)$ оказывается равной $2^k a \ne 0$.

   Так как степень Q не более k, то все остальные его мономы M, кроме M_0, имеют $\overline{M} = 0$. Значит, $\overline{Q}(x_{k+1},\ldots,x_n) \equiv 2^k a$. По определению величины $\overline{Q}$ отсюда следует, что при любом выборе набора $x_{k+1},\ldots,x_n \in \{-1,1\}$ найдутся значения $x_1,\ldots,x_k \in \{-1,1\}$, при которых $Q(x_1,\ldots x_n) \ne 0$. То есть Q не равен нулю как минимум в $2^{n-k} \ge 2^{n-d}$ точках множества V.

4. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая бесконечно дифференцируемая функция. Положим

$$m_n = \left(\int_0^{2\pi} |f^{(n)}(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

   Докажите, что последовательность $\left(m_n^{1/n}\right)$ имеет конечный или бесконечный предел.

   Решение. Докажем, что последовательность m_n логарифмически выпукла, то есть:

$$m_{n+1}m_{n-1} \ge m_n^2.$$

   Действительно, из неравенства Коши–Буняковского и интегрирования по частям выходит

$$\left(\int_0^{2\pi} |f^{(n+1)}(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^{2\pi} |f^{(n-1)}(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \ge \left|\int_0^{2\pi} f^{(n+1)}(x)f^{(n-1)}(x)\,dx\right| =$$
$$= \left|f^{(n+1)}(x)f^{n}(x)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f^{(n)}(x)f^{(n)}(x)\,dx\right| = \left|\int_0^{2\pi} |f^{(n)}(x)|^2\,dx\right| = m_n^2.$$

   Мы доказали, что $\ln m_{n+1} + \ln m_{n-1} \ge 2\ln m_n$ выпукла, иначе говоря последовательность $(\ln m_{n+1} - \ln m_n)$ монотонно возрастает и имеет предел. Пусть $\ln m_{n+1} - \ln m_n \to A \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Тогда по правилу Лопиталя для последовательностей

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln m_n}{n} = \lim_{n\to\infty}(\ln m_{n+1} - \ln m_n) = A,$$

а значит
$$\lim_{n\to\infty}(m_n)^{1/n} = e^A \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}.$$

Замечание. Можно также воспользоваться разложением в ряд Фурье и доказать, что предел конечный для конечного ряда Фурье и бесконечный для бесконечного ряда Фурье.

5. Дана последовательность $a_0, a_1, a_2, \dots$ и натуральное число $d \geq 2$. Известно, что
$$a_0 = a_1 = \cdots = a_d = 1,$$
и при $k \geq d$
$$a_{k+1} \geq a_k - \frac{a_{k-d}}{4d}.$$
Докажите, что все числа a_k положительные.

Решение. Задачу можно свести к случаю, когда вместо неравенства выполняется равенство
$$a_{k+1} = a_k - \frac{a_{k-d}}{4d}$$
при $k \geq d$. Действительно, если в некоторый момент при положительном a_{k+1} неравенство было строгим, то просто умножим все числа a_n с индексом $n \geq k+1$ на положительное число, меньшее единицы так, чтобы это неравенство обратилось в равенство для данного k. Можно проверить, что остальные неравенства не нарушатся. Так можно делать до тех пор, пока a_{k+1} не окажется неположительным, но и в модифицированной последовательности с равенствами оно тоже окажется неположительным.

Нетрудно понять, что при наличии равенства имеет место
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \frac{1}{1 - t + \frac{t^{d+1}}{4d}}.$$

Пусть $f(t) = 1 - t + \frac{t^{d+1}}{4d}$. Проверим, что $f(1) > 0$ и
$$f\left(1+\frac{1}{d}\right) = \frac{1}{d}\left(-1 + \frac{\left(1+\frac{1}{d}\right)^{d+1}}{4}\right) < 0,$$

так как последовательность $\left(1+\frac{1}{d}\right)^{d+1}$ убывает и принимает значение 4 при $d=1$. Следовательно, у многочлена $f(t)$ есть корень, по модулю больший единицы, пусть он равен $1/a > 1$, то есть $0 < a < 1$. Этот многочлен раскладывается в произведение
$$f(t) = (1-at)\left(1 - (1-a)t - (1-a)at^2 - \cdots - (1-a)a^{d-2}t^{d-1} - \frac{1}{4da}\right) = h(t)g(t).$$

Ясно, что все слагаемые в степенных разложениях $\frac{1}{h(t)}$ и $\frac{1}{g(t)}$ положительны, следовательно то же верно для $\frac{1}{f(t)}$.

Более элементарное решение. Будем считать, что a_k определено и при отрицательных целых k и равно 1. Докажем неравенство

$$a_s \geq \left(1 - \frac{1}{d}\right)^t a_{s-t}$$

для неотрицательных s и t индукцией по по лексикографическому порядку пар (s, t). Из него очевидно следует при $s = t$

$$a_s \geq \left(1 - \frac{1}{d}\right)^t,$$

что доказывает положительность a_s.

База индукции: если $s = 0$, то неравенство принимает вид

$$1 \geq \left(1 - \frac{1}{d}\right)^t,$$

что верно.

Далее шаг индукции будем делать по-разному, в зависимости от t

- Случай $t > 1$: Тогда применяем утверждение для пар $(s, 1)$ и $(s-1, t-1)$ и получаем

$$a_s \geq a_{s-1}\left(1 - \frac{1}{d}\right) \geq a_{s-t}\left(1 - \frac{1}{d}\right)^{1+t-1} = a_{s-t}\left(1 - \frac{1}{d}\right)^t,$$

  то есть утверждение для пары (s, t);

- Случай $t = 1$: Тогда

$$a_s \geq a_{s-1} - \frac{a_{s-1-d}}{4d} \geq a_{s-1} - \frac{a_{s-1}}{4d\left(1 - \frac{1}{d}\right)^d} \geq a_{s-1}\left(1 - \frac{1}{d}\right),$$

  где второе неравенство есть предположение индукции для пары $(s-1, d)$, а третье следует из оценки возрастания величины $\left(1 - \frac{1}{d}\right)^d$ (вспомните определение числа e) и следующей из него оценки

$$\left(1 - \frac{1}{d}\right)^d \geq \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$