СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

11 МАЯ 2014

Решения задач

1. **(Автор — Алексей Гарбер)** Пусть у квадратной матрицы A элементы являются целыми числами и в каждой её строке сумма элементов делится на натуральное число k. Докажите, что $\det A$ тоже делится на k.

   Решение. Если прибавить к первому столбцу A остальные столбцы, то он будет состоять из чисел, делящихся на k. Детерминант при этих элементарных преобразованиях не изменится, и из разложения по первому столбцу будет ясно, что он делится на k.

2. **(Автор — Роман Карасёв)** Пусть ∂ означает взятие границы множества в $\mathbb{R}^n$. Верно ли, что для любого $X \subseteq \mathbb{R}^n$ выполняется

   $$\partial(\partial(\partial X)) = \partial(\partial X)?$$

   Ответ: да.

   Решение Так как граница любого множества замкнута, то достаточно доказать, что для замкнутых F выполняется

   $$\partial(\partial F) = \partial F.$$

   Заметим, что ∂F имеет пустую внутренность. Действительно, если $x_0 \in \partial F$ и $O(x_0) \subseteq \partial F$, то из замкнутости F

   $$O(x_0) \subseteq \partial F \subseteq F,$$

   то есть x_0 — внутренняя точка F, а не граничная. Тогда ∂F оказывается замкнутым множеством без внутренности, следовательно все его точки (и только они) являются его граничными точками. То есть $\partial(\partial F) = \partial F$, что и требовалось.

3. **(Автор — Роман Карасёв)** Докажите, что параллелепипед с основанием в плоскости $0xy$ нельзя разрезать на тетраэдры, каждый из которых имеет грань, параллельную $0xy$.

   Решение. Рассмотрим плоскости $H_t = \{z = t\}$ и сечение ими параллелепипеда P и предположительно составляющих его тетраэдров T_i. Очевидно, что площади сечений $P \cap H_t$ постоянны на некотором промежутке $[0, H]$. А площадь сечения $H_t \cap T_i$ ведёт себя так: за пределами некоторого отрезка $[a_i, b_i]$ она нулевая, а на этом отрезке пропорциональна либо $(t-a_i)^2$, либо $(t-b_i)^2$. В любом случае на отрезке эта функция строго выпукла. Так как площадь $P \cap H_t$ должна оказаться равной сумме площадей $H_t \cap T_i$ для почти всех t, то мы выберем такое t, которое лежит на $(0, H)$ и не совпадает ни с одним из a_i и b_i. Выходит, что в этой точке площадь $P \cap H_t$ должна строго выпукло зависеть от t, но с другой стороны она должна быть константой. Противоречие.

Комментарий. Это рассуждение также проходит для размерностей больше 3, а в плоском случае параллелограмм без труда разрезается на треугольники с основаниями на двух параллельных сторонах параллелограмма.

4. **(Авторы — Илья Богданов и Дарий Гринберг)** Пусть $A_0, \ldots, A_k, B$ — квадратные матрицы одного размера, причём

$$A_0 + A_1 B + A_2 B^2 + \cdots + A_k B^k = 0.$$

Рассмотрим многочлен с вещественными коэффициентами, заданный формулой

$$g(\lambda) = \det\left(A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2 + \cdots + A_k\lambda^k\right).$$

Докажите, что $g(B) = 0$, то есть при подстановке матрицы B в этот многочлен получается нулевая матрица.

Решение. Заметим, что из данного матричного равенства следует, что матрица

$$M(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} A_k\lambda^k = \sum_{i=0}^{k} A_k\lambda^k - \sum_{i=0}^{k} A_k B^k = \sum_{i=0}^{k} A_k(\lambda^k - B^k)$$

делится справа на $\lambda - B$ как элемент кольца матриц, элементы которых — многочлены от λ. Следовательно, её детерминант

$$g(\lambda) = \det M(\lambda)$$

делится на $h(\lambda) = \det(\lambda - B)$ как многочлен от λ. Но, по теореме Гамильтона–Кэли $h(B) = 0$, следовательно $g(B) = 0$.

5. **(Автор — Роман Карасёв)** Докажите, что если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), то она удовлетворяет условию Липшица $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$ с некоторой константой L на некотором интервале $(c, d) \subseteq (a, b)$.

Решение. Разделим условие Липшица на два случая: условие Липшица А

$$\forall x < y \ \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq -L$$

и условие Липшица Б

$$\forall x < y \ \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq L$$

Предположим сначала, что для любого L и любого интервала $I \subseteq (a, b)$ условие Липшица А с константой L нарушается для некоторых двух точек из I. Найдём точки $[x_1, y_1]$, нарушающее условие Липшица А с константой 1. Потом найдём пару точек $[x_2, y_2] \subseteq [x_1, y_1]$, нарушающих условие Липшица А с константой 2 и т.д. При этом можно выбирать отрезки так, чтобы их длина стремилась к нулю, так как если условие Липшица А нарушается в концах отрезка $[x_n, y_n]$, то оно нарушается и на концах одного из отрезков $[x_n, \frac{x_n+y_n}{2}]$ или $[\frac{x_n+y_n}{2}, y_n]$.

Стягивающаяся последовательность вложенных отрезков $[x_n, y_n]$ имеет одну общую точку z, последовательности x_n и y_n стремятся к z. В точке z производная $f'(z)$ равна некоторому конечному числу M. Тогда разностное отношение

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \frac{y_n - z}{y_n - x_n}\frac{f(y_n) - f(z)}{y_n - z} + \frac{z - x_n}{y_n - x_n}\frac{f(z) - f(x_n)}{z - x_n}$$

заключено между разностными отношениями $\frac{f(y_n)-f(z)}{y_n-z}$ и $\frac{f(z)-f(x_n)}{z-x_n}$, а значит стремится к M по теореме о двух милиционерах. При этом мы строили последовательность вложенных отрезков так, чтобы разностное отношение стремилось к $-\infty$. Противоречие.

Следовательно, перейдя к подинтервалу (a, b), можно считать выполненным условие Липшица А. Аналогично перейдя к подинтервалу ещё раз, можно считать выполненным условие Липшица Б.