

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ¹

11 МАЯ 2014

1. Пусть у квадратной матрицы A элементы являются целыми числами и в каждой её строке сумма элементов делится на натуральное число k . Докажите, что $\det A$ тоже делится на k .
2. Пусть ∂ означает взятие границы множества в \mathbb{R}^n . Верно ли, что для любого $X \subseteq \mathbb{R}^n$ выполняется

$$\partial(\partial(\partial X)) = \partial(\partial X)?$$

3. Докажите, что параллелепипед с основанием в плоскости Oxy нельзя разрезать на тетраэдры, каждый из которых имеет грань, параллельную Oxy .
4. Пусть A_0, \dots, A_k, B — квадратные матрицы одного размера, причём

$$A_0 + A_1 B + A_2 B^2 + \dots + A_k B^k = 0.$$

Рассмотрим многочлен с вещественными коэффициентами, заданный формулой

$$g(\lambda) = \det (A_0 + A_1 \lambda + A_2 \lambda^2 + \dots + A_k \lambda^k).$$

Докажите, что $g(B) = 0$, то есть при подстановке матрицы B в этот многочлен получается нулевая матрица.

5. Докажите, что если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) , то она удовлетворяет условию Липшица $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ с некоторой константой L на некотором интервале $(c, d) \subseteq (a, b)$.

¹Решения задач и результаты олимпиады будут доступны на rkarasev.ru.