СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
08 ДЕКАБРЯ 2013

1 КУРС

1. При каких $n \geq 3$ можно утверждать, что для всякой пирамиды с выпуклым n-угольником в основании и всякой точки X внутри неё сумма расстояний от X до вершин пирамиды меньше суммы длин рёбер пирамиды?

   Ответ: только при $n = 3$.

   Школьное решение. Рассмотрим случай $n = 3$, пусть точка X лежит в тетраэдре $ABCD$. Обозначим через T точку пересечения плоскости ABX с ребром CD, а через S — точку пересечения AX и BT. Тогда $AX + BX \leq AX + XS + BS \leq AT + BT < AC + CT + TD + DB = AC + CD + DB$. Аналогично, $CX + DX < CB + BA + AD$, откуда и следует требуемое.

   При $n \geq 4$ сделаем так, что вершина A основания находилась на расстоянии 1000 от остальных вершин пирамиды, и остальные вершины пирамиды были на расстоянии не более $1/n$ друг от друга. Тогда при $X = A$ сумма расстояний до вершин равна $1000n \geq 4000$, а сумма длин рёбер не более $3000 + 2 - 3/n \leq 3002$.

   Другое решение. Заметим, что расстояние от X до любой вершины — выпуклая функция X. Сумма расстояний тоже выпуклая, поэтому максимум суммы достигается в одной из вершин пирамиды. Если пирамида — тетраэдр, то при совпадении X с любой из вершин сумма расстояний равна сумме длин рёбер из данной вершины, что меньше суммы длин всех рёбер. Иначе см. контрпример в школьном решении, теперь ясно, почему там взято $X = A$.

2. Каждые два из $n \geq 4$ городов соединены дорогой с односторонним движением. Известно, что из любого города в любой другой можно добраться. Найдите наименьшее k такое, что для любых трёх городов A, B, C можно добраться из A в B, а затем из B в C, проехав не более, чем по k дорогам (если по дороге проехали два раза, она считается дважды).

   Ответ: $n + 1$.

   Решение. Пусть $A = A_0 \to A_1 \to \cdots \to A_m = B$ — кратчайший путь из A в B; тогда при всех $i + 1 < j$ из A_j ведёт дорога в A_i, иначе этот путь можно бы было сократить, пойдя из A_i непосредственно в A_j.

   Далее, пусть $B = B_0 \to B_1 \to \cdots \to B_k = C$ — кратчайший путь из B в C. Мы утверждаем, что из вершин $B_1, \ldots, B_k$ максимум две принадлежат первому пути. Если $m = 1$, это утверждение очевидно. Пусть $m > 1$, и пусть $j \geq 3$ — наибольший номер такой, что B_j принадлежит первому пути, $B_j = A_s$. Тогда, если $s < m - 1$, то можно заменить участок $B_0 \to \cdots \to B_j$ на $B \to B_j$, а при $s = m - 1$ его можно заменить на $B \to B_{s-1} \to B_s$; в обоих случаях путь укоротился, что невозможно. Итак, путь $A \to B \to C$ проходит дважды не более, чем по двум вершинам; значит, в нём не более $n + 1$ дороги.

   Осталось привести пример, показывающий, что эта оценка точна. Пусть города $X_1, \ldots, X_n$ соединены путём $X_1 \to X_2 \to \cdots \to X_n$, а все остальные дороги направлены от города с бо́льшим номером к городу с меньшим. Тогда, если $A = X_1$, $B = X_n$, а $C = X_{n-1}$, то потребуется $n-1$ дорог, чтобы добраться из A в B, и ещё две — для добирания из B в C.

3. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Докажите, что существует $x_0 \in \mathbb{R}$, такое что $f(x_0) = 0$.

Решение 1. Возьмём натуральное число n и точку $x_0 \in [0,1]$. По определению предела неравенство $|f(x)| \geq 1/n$ в некоторой окрестности x_0 выполняется разве что один раз, в самой точке x_0. Отрезок $[0,1]$ можно покрыть конечных количеством таких окрестностей, следовательно $|f(x)| \geq 1/n$ на отрезке $[0,1]$ бывает только конечное число раз. Рассматривая всевозможные n, заключаем, что $|f(x)| > 0$ на отрезке $[0,1]$ выполняется только счётное число раз. Значит $f(x) = 0$ для континуума точек на отрезке $[0,1]$.

Решение 2. Рассмотрим произвольную точку $x_1 \in \mathbb{R}$. У неё существует проколотая окрестность $\mathring{U}(x_1)$ такая, что $|f(x)| < 1$ при всех $x \in \mathring{U}(x_1)$. Выберем в этой окрестности отрезок $[a_1, b_1]$ и положим $x_2 = (a_1 + b_1)/2$. Аналогично, если выбрана $x_i \in [a_{i-1}, b_{i-1}]$, то существует $\mathring{U}(x_i) \subset [a_{i-1}, b_{i-1}]$ такая, что $|f(x)| < 1/i$ при всех $x \in \mathring{U}(x_i)$; выберем в $\mathring{U}(x_i)$ отрезок $[a_i, b_i]$ и положим $x_{i+1} = (a_i + b_i)/2$.

Мы построили стягивающуюся последовательность отрезков $[a_i, b_i]$; они имеют общую точку x_0. По построению, $|f(x_0) < 1/i$ при всех i; значит, $f(x_0) = 0$.

4. Пусть дана последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ и оказалось, что последовательность $\{3x_{n+1} - 2x_n\}$ сходится. Докажите, что $\{x_n\}$ тоже сходится.

Решение. Обозначим $y_n = 3x_{n+1} - 2x_n \to a$. Тогда $y_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Выпишем тогда x_{n+1} явно:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{y_n}{3} + \frac{2x_n}{3} = \frac{y_n}{3} + \frac{2y_n}{9} + \frac{4x_n}{9} = \cdots = \\ &= \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^i y_{n-i} + \left(\frac{2}{3}\right)^n x_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^n x_1 + \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)a + \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^i \alpha_{n-i}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое стремится к нулю, второе стремится к a, остаётся оценить третье. Если при $n \geq n_0$ имеем $|\alpha_n| < \varepsilon$ и имеем $|\alpha_n| < M$ при всех n, то третье слагаемое оценивается по модулю как $\varepsilon + (2/3)^{n-n_0}M$. Тогда при некотором m_0 мы имеем $(2/3)^{m_0}M < \varepsilon$, а тогда модуль третьего слагаемого меньше 2ε при всех $n \geq n_0 + m_0$. Значит, $|x_{n+1} - a| \to 0$ при $n \to \infty$.

5. Даны две различные последовательности из нулей и единиц длины n. Докажите, что найдутся натуральное число $m \leq 5\sqrt{n}$ и остаток a по модулю m такие, что последовательности отличаются по количеству единиц, стоящих на местах, номера которых сравнимы с a по модулю m.

Решение. Заменим две последовательности $a_0, \dots, a_{n-1}$ и $b_0, \dots, b_{n-1}$ на многочлены

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}, \quad Q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1}.$$

Предположим противное: для многочленов это означает, что для любого $m \leq m_0 = \lfloor 5\sqrt{n} \rfloor$ они дают одинаковые остатки по модулю многочлена $x^m - 1$. Чтобы привести к противоречию, нам надо доказать, что у наименьшего общего кратного $S(x)$ многочленов $\{x^m - 1\}_{m=1}^{m_0}$ степень не менее n.

Заметим, что корнем многочлена $S(x)$ является всякое число вида $e^{2\pi i a/b}$, где a/b — правильная дробь со знаменателем не более m_0. Оценим количество таких ненулевых правильных дробей, в зависимости от m_0, обозначим эту величину $f(m_0)$. Количество сократимых и несократимых дробей такого вида равно $g(m_0) = \frac{m_0(m_0-1)}{2}$. Из них количество дробей, сократимых на 2, не более чем $g(m_0/2) \leq \frac{(m_0/2-1)m_0/2}{2}$. Количество дробей, сократимых на 3, не более чем $g(m_0/3) \leq \frac{(m_0/3-1)m_0/3}{2}$, и так далее. Получаем оценку (после умножения на два)

$$2f(m_0) \geq m_0(m_0-1) - \sum_{i=2}^{m_0-1} \left(\frac{m_0}{i} - 1\right) \frac{m_0}{i} \geq m_0 2 \left(1 - \sum_{i=2}^{m_0-1} \frac{1}{i2}\right) - m_0.$$

Сумму обратных квадратов $1/3^2 + 1/4^2 + \dots$ можно оценить сверху суммой

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots,$$

которая равна $1/2$. Следовательно,

$$f(m_0) \geq 1/8 m_0(m_0 - 4),$$

а так как мы не считали ноль, то степень $S(x)$ не менее $1/8m_0(m_0-4)+1 = 1/8(m_0-2)^2 + 1/2$. Можно проверить, что при $m_0 = \lfloor \sqrt{8n-4} + 3 \rfloor \leq 5\sqrt{n}$ эта степень действительно не менее n.

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

08 ДЕКАБРЯ 2013

2–6 КУРС

1. В ортогональной матрице A выбрали две взаимно дополнительных квадратных подматрицы B и C (т.е. сумма размеров матриц B и C равна размеру матрицы A, и каждая строка и каждый столбец A содержит либо элементы B, либо элементы C). Докажите, что $\det B = 0$ тогда и только тогда, когда $\det C = 0$.

   Решение 1. После перестановки строк и столбцов можно считать, что B — левая верхняя подматрица матрицы A размера $k \times k$, а — правая нижняя подматрица матрицы A размера $(n-k) \times (n-k)$. Предположим противное, не ограничивая общности это будет утверждение: $\det B \neq 0$ и $\det C = 0$. Последнее равенство означает, что некоторая ненулевая линейная комбинация v последних $n-k$ столбцов A имеет нули в позициях $k+1, \ldots, n$. А так как $\det B \neq 0$, то некоторая ненулевая линейная комбинация первых k столбцов w имеет первые k координат равными первым k координатам v. Следовательно, скалярное произведение (v, w) равно $|v|^2$ и не равно нулю. Однако оно должно быть равно нулю, так как в ортогональной матрице любые два разных столбца ортогональны друг другу и любая линейная комбинация первых k столбцов ортогональна любой линейной комбинации последних $n-k$ столбцов.

   Решение 2. Обозначив за V и $V^\perp$ линейную оболочку первых k базисных векторов и её ортогональное дополнение, переформулируем задачу так: $AV \cap V^\perp \neq 0$ равносильно $V \cap AV^\perp \neq 0$. Докажем это в одну сторону (в другую доказывается аналогично). Пусть $y \in AV$ — ненулевой вектор, ортогональный любому $x \in V$. Рассмотрим ортогональное разложение $AV = (y) \oplus W$, так как размерность W меньше размерности V, то найдётся ненулевой $x \in V \cap W^\perp$. Но этот x ортогонален y и ортогонален W, следовательно, y ортогонален AV и $y \in V \cap AV^\perp$.

2. Пусть дана последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ и оказалось, что последовательность $\{3x_{n+1} - 2x_n\}$ сходится. Докажите, что $\{x_n\}$ тоже сходится.

   Решение. Обозначим $y_n = 3x_{n+1} - 2x_n \to a$. Тогда $y_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Выпишем тогда x_{n+1} явно:

$$x_{n+1} = \frac{y_n}{3} + \frac{2x_n}{3} = \frac{y_n}{3} + \frac{2y_n}{9} + \frac{4x_n}{9} = \cdots =$$
$$= \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^i y_{n-i} + \left(\frac{2}{3}\right)^n x_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^n x_1 + \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)a + \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^i \alpha_{n-i}.$$

   Первое слагаемое стремится к нулю, второе стремится к a, остаётся оценить третье. Если при $n \geq n_0$ имеем $|\alpha_n| < \varepsilon$ и имеем $|\alpha_n| < M$ при всех n, то третье слагаемое оценивается по модулю как $\varepsilon + (2/3)^{n-n_0}M$. Тогда при некотором m_0 мы имеем $(2/3)^{m_0}M < \varepsilon$, а тогда модуль третьего слагаемого меньше 2ε при всех $n \geq n_0 + m_0$. Значит, $|x_{n+1} - a| \to 0$ при $n \to \infty$.

3. Будем рассматривать единичные кубы в $\mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными осям координат, и называть их просто «кубы». Пусть выбраны $2^{n-1}+1$ попарно непересекающихся кубов. Докажите, что либо не существует куба, пересекающегося с каждым из выбранных, либо все кубы, пересекающиеся с каждым из выбранных, имеют общую точку.

   Решение. Пусть выбранные кубы — это $Q_1, \dots, Q_N$, где $N > 2^{n-1}$. И пусть семейство кубов, пересекающих всякий Q_i — это $\mathcal{F}$.

   Предположим, что семейство $\mathcal{F}$ непусто. В проекции этого семейства на всякую ось $0x_i$ мы увидим семейство отрезков. Если эти проекции на $0x_i$ имеют общую точку с координатой c_i, и так для каждого i, то мы получим точку $(c_1, \dots, c_n)$, которая лежит в каждом кубе из $\mathcal{F}$. Иначе, для некоторой оси $0x_i$ проекции кубов из $\mathcal{F}$ на неё не имеют общей точки. Приведём это к противоречию.

   Рассмотрев самую левую и самую правую из проекций, мы увидим, что они не пересекаются, то есть найдём два куба P и R, которые разделены плоскостью H, перпендикулярной оси $0x_i$ и пересекают любой из Q_i. Тогда всякий Q_i обязан пересекать H по кубу $Q'_i = Q_i \cap H$ меньшей размерности и каждый Q'_i пересекает, например, проекцию P' куба P на H. Остаётся заметить, что всякий Q'_i, пересекая P', обязан содержать одну из вершин P'. Между собой Q'_i не пересекаются, и всего вершин $2^{n-1} < N$, то есть на всех не хватает — противоречие.

4. Докажите, что при всяком $p > 1, p \neq 2$ кривая $|x|^p + |y|^p = 1$ имеет с любым эллипсом с центром в начале координат не более 8 общих точек.

   Решение. Достаточно доказать утверждение в случае, когда $p = u/v$ рационально, u чётно и v нечётно, остальные случаи получатся предельным переходом. Это предположение о рациональности пригодится нам в конце доказательства.

   Пусть уравнение эллипса — $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$. Без ограничения общности предположим $b \neq 0$ (этот случай легко разбирается вручную). Нам достаточно ограничить число локальных экстремумов $f(x, y)$ при условии $|x|^p + |y|^p = 1$. Если таких экстремумов не более 8, то f принимает значение 1 не более восьми раз, так как между всякими двумя точками с равными значениями f есть экстремум. Из предположения $b \neq 0$ следует, что в этих экстремумах обе координаты ненулевые, так как эллипс пересекает координатные оси не под прямым углом.

   Выпишем уравнения Лагранжа для точек экстремума

$$2(ax + by) = p\lambda|x|^{p-1}\operatorname{sgn} x, \quad 2(bx + cy) = p\lambda|y|^{p-1}\operatorname{sgn} y;$$

   очевидно, $\lambda \neq 0$ и мы получаем

$$\frac{at + b}{bt + c} = |t|^{p-1}\operatorname{sgn} t,$$

   где $t = x/y$. Остаётся доказать, что этому уравнению удовлетворяют не более 4 значений t (каждое соответствует двум точкам, симметричным друг другу). Заметим, что $|t|^{p-1}\operatorname{sgn} t = t^{(u-v)/v}$ по определению u и v. Теперь можно подставить

$t = s^v$ и получить уравнение

$$as^v + b = bs^u + cs^{u-v}.$$

Это уравнение по сути является многочленом с не более чем четырьмя ненулевыми коэффициентами, следовательно по правилу Декарта у него не более четырёх корней.

Замечание. Аналогично можно доказать, что аффинные образы ℓ_p-окружности и ℓ_q-окружности на прямой с общим центром имеют не более 8 точек пересечения.

5. Даны две различные последовательности из нулей и единиц длины n. Докажите, что найдутся натуральное число $m \leq 5\sqrt{n}$ и остаток a по модулю m такие, что последовательности отличаются по количеству единиц, стоящих на местах, номера которых сравнимы с a по модулю m.

Решение. Заменим две последовательности $a_0, \ldots, a_{n-1}$ и $b_0, \ldots, b_{n-1}$ на многочлены

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}, \quad Q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1}.$$

Предположим противное: для многочленов это означает, что для любого $m \leq m_0 = \lfloor 5\sqrt{n} \rfloor$ они дают одинаковые остатки по модулю многочлена $x^m - 1$. Чтобы привести к противоречию, нам надо доказать, что у наименьшего общего кратного $S(x)$ многочленов $\{x^m - 1\}_{m=1}^{m_0}$ степень не менее n.

Заметим, что корнем многочлена $S(x)$ является всякое число вида $e^{2\pi i a/b}$, где a/b — правильная дробь со знаменателем не более m_0. Оценим количество таких ненулевых правильных дробей, в зависимости от m_0, обозначим эту величину $f(m_0)$. Количество сократимых и несократимых дробей такого вида равно $g(m_0) = \frac{m_0(m_0-1)}{2}$. Из них количество дробей, сократимых на 2, не более чем $g(m_0/2) \leq \frac{(m_0/2-1)m_0/2}{2}$. Количество дробей, сократимых на 3, не более чем $g(m_0/3) \leq \frac{(m_0/3-1)m_0/3}{2}$, и так далее. Получаем оценку (после умножения на два)

$$2f(m_0) \geq m_0(m_0-1) - \sum_{i=2}^{m_0-1} \left(\frac{m_0}{i} - 1\right) \frac{m_0}{i} \geq m_0 2 \left(1 - \sum_{i=2}^{m_0-1} \frac{1}{i2}\right) - m_0.$$

Сумму обратных квадратов $1/3^2 + 1/4^2 + \ldots$ можно оценить сверху суммой

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots,$$

которая равна $1/2$. Следовательно,

$$f(m_0) \geq 1/8 m_0(m_0 - 4),$$

а так как мы не считали ноль, то степень $S(x)$ не менее $1/8 m_0(m_0-4) + 1 = 1/8(m_0-2)^2 + 1/2$. Можно проверить, что при $m_0 = \lfloor \sqrt{8n-4} + 3 \rfloor \leq 5\sqrt{n}$ эта степень действительно не менее n.