МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи

Карасёв Роман Николаевич

Теоремы типа Борсука-Улама в комбинаторной и выпуклой геометрии

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:

доктор физико-математических наук,
профессор В.Л. Дольников.

Долгопрудный
2010

Оглавление

Глава 1

Введение

1.1 Историческая справка

В данной работе доказываются разнообразные теоремы существования в геометрии выпуклых и конечных множеств в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Типичным (и одним их первых) результатом в этом направлении является теорема Брауэра о неподвижной точке [12].

Теорема 1.1 (Теорема Брауэра)**.** *Пусть $K \subseteq \mathbb{R}^d$ — выпуклый компакт. Тогда для всякого непрерывного отображения $f : K \to K$ найдётся* неподвижная точка*, то есть точка $x \in K$, для которой $x = f(x)$.*

Первые доказательства теоремы Брауэра были основаны на геометрических идеях, или, чуть позже, на использовании комбинаторной леммы Шпернера [53] (см. главу 5). Впоследствии доказательства теоремы Брауэра были переформулированы в рамках топологических препятствий, которые по сути являются относительными классами Эйлера (см. главу 2 и теоремы 3.1 и 3.2). Осознание наличия гомологического препятствия позволило построить практически эффективные алгоритмы нахождения неподвижной точки, см. [16, 36].

Был разработан метод гомотопического продолжения, который основывается на следующем утверждении, сформулированном здесь в частном случае.

Теорема 1.2 (О гомотопическом продолжении)**.** *Пусть расслоение $V \to X$ имеет ненулевой класс Эйлера. Пусть также гомотопия s_t связывает два сечения этого расслоения s_0 и s_1. Тогда в пространстве гомотопии $X\times[0,1]$ некоторая компонента множества нулей s_t пересекается и с $X \times \{0\}$, и с $X \times \{1\}$.*

В случае, если X является многообразием размерности n, слои V также имеют размерность n, и гомотопия s_t находится в общем положении, утверждение теоремы просто говорит о том, что некоторый нуль s_0 связан гладкой кривой с некоторым нулём s_1 в пространстве $X \times [0,1]$. Это наблюдение позволяет построить эффективные вычислительные алгоритмы для нахождения некоторых нулей произвольного сечения s_1, если для некоторого фиксированного сечения s_0 все нули известны.

Хотя рассмотрение вычислительных аспектов задач не является целью данной работы, можно сказать, что доказательство теоремы существования с помощью вычисления класса Эйлера некоторого расслоения также даёт некоторый способ эффективной вычислительной реализации теоремы существования.

Ещё один тип теорем существования в геометрии даёт теорема Хелли [27] и разнообразные её следствия и обобщения.

Теорема 1.3 (Теорема Хелли)**.** *Пусть $\mathcal{F}$ — конечное семейство выпуклых множеств в $\mathbb{R}^d$. Тогда семейство $\mathcal{F}$ имеет общую точку тогда и только тогда, когда всякое подсемейство $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ с $|\mathcal{G}| \le d+1$ имеет общую точку.*

Сама по себе теорема Хелли, в частности, допускает топологическое доказательство (см. [79]) путём рассмотрения нерва покрытия $\bigcup \mathcal{F}$ семейством $\mathcal{F}$ как симплициального комплекса и рассмотрения гомологий этого комплекса. Также существует доказательство теоремы Хелли через теорему Брауэра.

В литературе «теоремой типа Хелли» называется утверждение о семействе множеств, в котором некоторое свойство семейства выводится из выполнения того же или аналогичного свойства для всех подсемейств фиксированного размера. В частности, изучаются такое свойство, как наличие плоской трансверсали, то есть плоскости заданной размерности, пересекающей все множества семейства. Для плоских трансверсалей простых обобщений теоремы Хелли не существует (даже в случае трансверсалей — прямых), однако разнообразные утверждения типа теоремы Хелли всё же возможны. Некоторые из них рассматриваются и в этой работе.

Вернёмся собственно к теореме Хелли. Одним из способов доказательства теоремы Хелли является применение теоремы Радона [50], более общая формулировка которой доказана Твербергом [58].

Теорема 1.4 (Теорема Тверберга)**.** *Пусть конечное множество* $X \in \mathbb{R}^d$ *состоит из* $(d+1)(n-1)+1$ *точек. Тогда* X *можно разбить на* n *множеств* $X_1, \dots, X_n$*, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.*

Позднее в работах Bárány, Shlosman, Szücs, Živaljević, Vrećica, Воловикова были получены топологические доказательства теоремы Тверберга и её цветного обобщения [3, 66, 67, 74] для случая, когда речь идёт о разбиении на n частей и число n является степенью простого. Фактически, доказательства основывались на неравенстве нулю эквивариантного класса Эйлера некоторого расслоения.

Приведём формулировки цветных обобщений теоремы Тверберга. В работе [5] доказана цветная теорема Тверберга на плоскости.

Теорема 1.5 (Двумерная цветная теорема Тверберга)**.** *Пусть на плоскости дано множество из* $3n$ *точек. Пусть эти точки раскрашены в три цвета так, что точек каждого цвета ровно* n*. Тогда эти точки можно разбить на* n *разноцветных троек так, что треугольники, соответствующие точкам, имеют общую точку.*

Обобщить этот результат на $(d+1)n$ точек в $\mathbb{R}^d$ пока не удалось, однако в работе [67] с помощью топологической техники доказано утверждение, в котором точки берутся с некоторым запасом.

Теорема 1.6 (Цветная теорема Тверберга)**.** *Пусть в* $\mathbb{R}^d$ *дано множество из* $(d+1)t$ *точек, где* $t \geq 2r-1$, $r = p^k$, p *— простое число. Пусть эти точки разбиты на* $d+1$ *множество (цвет) по* t *элементов.*

Тогда из данных точек можно выбрать r *непересекающихся наборов* $X_1, \dots, X_r$ *с выполнением следующих условий. Для любого* $i = 1, \dots, r$ $|X_i| = d+1$ *и в* X_i *присутствуют все цвета. Кроме того*

$$\bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{conv} X_i \neq \emptyset.$$

Приведём также одну из эквивалентных формулировок теоремы Борсука-Улама [85, 11], которая тесно связана с теоремами Хелли и Брауэра.

Теорема 1.7 (Теорема Борсука-Люстерника-Шнирельмана)**.** *Если сфера* S^n *покрыта* $n+1$*-м замкнутым множеством* $X_1, \dots, X_{n+1}$*, то по крайней мере одно из* X_i *содержит пару диаметрально противоположных точек на сфере.*

В главах 5 и 6 будут рассмотрены разного рода обобщения и следствия из обобщений этой теоремы, в которых вместо покрытия сферы рассматриваются некоторые покрытия канонического расслоения над грассманианом.

Отметим также эквивалентную формулировку теоремы Борсука-Улама [11], в которой вместо покрытий рассматриваются функции.

Теорема 1.8 (Теорема Борсука-Улама). *Если на сфере* S^n *даны* n *нечётных непрерывных функций* $f_1, \dots, f_n$*, то для некоторой точки* $x \in S^n$

$$f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_n(x) = 0.$$

Близким к теореме Борсука-Улама утверждением является теорема Люстерника-Шнирельмана о категории проективного пространства. Ниже приведена одна из возможных формулировок.

Теорема 1.9 (Теорема Люстерника-Шнирельмана). *Если сфера* S^n *покрыта* n *замкнутыми множествами* $X_1, \dots, X_n$*, инвариантными относительно отражения* $x \mapsto -x$*, то для некоторого* i *одна из компонент связности* X_i *содержит пару диаметрально противоположных точек на сфере.*

Одним из следствий теоремы Хелли является теорема Неймана-Радо [46, 49] о центральной точке меры.

Теорема 1.10 (Теорема о центральной точке). *Для абсолютно непрерывной вероятностной меры* μ *на* $\mathbb{R}^d$ *найдётся такая точка* $x \in \mathbb{R}^d$*, что для всякого полупространства* $H \ni x$ $\mu(H) \geq \dfrac{1}{d+1}$.

Отметим также другой известный результат о делении мер (см. работы Stone, Tukey, Steinhaus [55, 54]), являющийся следствием теоремы Борсука-Улама.

Теорема 1.11 (Теорема «о бутерброде»). *Пусть на* $\mathbb{R}^d$ *заданы* d *абсолютно непрерывных вероятностных мер* $\mu_1, \dots, \mu_d$*. Тогда найдётся полупространство* $H \subset \mathbb{R}^d$ *такое, что для любого* $i = 1, \dots, d$

$$\mu_i(H) = 1/2.$$

В работах Дольникова, Živaljević, Vrećica [65, 81, 82] теорема о центральной точке была обобщена на случай нескольких мер. Причём данное обобщение в случае $m = d - 1$ даёт теорему «о бутерброде».

Теорема 1.12 (Теорема о центральной трансверсали)**.** *Пусть на* $\mathbb{R}^d$ *заданы* $m+1$ *абсолютно непрерывная вероятностная мера* $\mu_0, \dots, \mu_m$. *Тогда найдётся* m*-плоскость* $L \in \mathbb{R}^d$ *такая, что для всякого полупространства* $H \supseteq L$ *и всякого* $i = 0, \dots, m+1$

$$\mu_i(H) \geq \frac{1}{d - m + 1}.$$

Теоремы Тверберга и гипотезу Тверберга о трансверсалях (формулировка — в главе 4) можно рассматривать как некоторые дискретные обобщения теорем о центральной точке и центральной трансверсали соответственно.

К теореме о центральной трансверсали близко следующее утверждение из [81, 82]:

Теорема 1.13 (Теорема Дольникова о трансверсали)**.** *Пусть* $0 \leq k \leq d - 1$ *и в* $\mathbb{R}^d$ *даны* $k+1$ *семейство* $\mathcal{F}_i$ *(*$i = 0, \dots, k$*) выпуклых компактов. Предположим, что в каждом семействе любые* $d+1-k$ *множеств имеют общую точку. Тогда существует* k*-плоскость, пересекающая все множества из* $\bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{F}_i$.

Из этой теоремы при $k = 0$ получается обычная теорема Хелли. Следующая теорема из [30, 35] также имеет дело с плоскими трансверсалями.

Теорема 1.14 (Теорема Хорна-Кли)**.** *Для натуральных* $1 \leq k \leq d$ *и семейства* $\mathcal{F}$ *выпуклых компактов в* $\mathbb{R}^d$*, следующие три условия эквивалентны:*

1) Каждые k *множеств из* $\mathcal{F}$ *имеют общую точку;*

2) Каждая плоскость коразмерности $k-1$ в $\mathbb{R}^d$ имеет транслят, пересекающий все множества $\mathcal{F}$;

3) Каждая плоскость коразмерности k в $\mathbb{R}^d$ принадлежит плоскости коразмерности $k-1$, пересекающий все множества $\mathcal{F}$.

В главе 6 будут приведены некоторые новые результаты по плоским трансверсалям, близкие к теоремам Борсука-Улама, теореме Хелли и двум вышеприведённым теоремам.

Также типичными теоремами существования в геометрии являются результаты о вписывании и описывании фигур из данного класса в/вокруг выпуклого тела в $\mathbb{R}^d$.

Одна из первых теорем о вписывании из [102].

Теорема 1.15 (Теорема Шнирельмана). *Для всякой гладкой замкнутой кривой $C \subset \mathbb{R}^2$ найдётся квадрат, все вершины которого лежат на кривой C.*

Другая типичная теорема об описывании имеет вид [34].

Теорема 1.16 (Теорема Какутани). *Вокруг всякого выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^3$ можно описать куб.*

Конечно, эти теоремы являются простейшими промерами. Множество разных утверждений о вписывании и описывании можно найти в работах [77, 88, 89, 90, 91]. Например, в диссертации Макеева [89] доказан следующий аналог теоремы Шнирельмана.

Теорема 1.17 (Теорема Макеева). *Во всякое гладкое выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^3$ можно вписать октаэдр.*

Предметом данной работы является, в частности, обобщение этой теоремы на бо́льшие размерности.

Близкими к задаче вписывания многогранника является серия задач о бильярдных траекториях в выпуклых телах. Типичный результат такого рода даёт теорема ($\phi(n)$ — функция Эйлера).

Теорема 1.18 (Теорема Биркгофа). *Для всякого гладкого выпуклого компакта $K \subset \mathbb{R}^2$ найдётся не менее $\phi(n)$ различных замкнутых бильярдных траекторий в K с n ударениями о край.*

Некоторые результаты по многомерному обобщению данной теоремы были доказаны в работах Бабенко, Фарбера и Табачникова [70, 20, 21]. В этой работе будет доказано аналогичное утверждение в случае простой длины (количества звеньев) траектории и произвольной размерности $d \geq 3$.

1.2 Описание структуры работы

В главе 2 приведены основные сведения из топологии, которые будут применять в дальнейшем для получения геометрических следствий. Рассматриваются свойства класса Эйлера векторного расслоения, в том числе в относительном и эквивариантном случае.

Детально изучаются пространства с действием группы $(Z_p)^k$ и их гомотопические инварианты. Приводятся факты из теории Люстерника-Шнирельмана, в частности, в приложении к пространствам с действием конечной группы.

Также доказываются некоторые новые теоремы о покрытиях для пространств с действием группы Z_2, которые обобщают теорему Борсука-Улама для покрытий.

В главе 3 формулируются и доказываются аналоги теоремы Брауэра для послойных отображений тотального пространства векторного расслоения. Также рассматриваются вещественные грассманианы и канонические расслоения над ними, доказываются нужные далее свойства класса Эйлера грассманиана, приводятся утверждения о когомологическом индексе некоторых Z_2-действий, связанных с грассманианами.

В главе 4 формулируются разные обобщения и аналоги теоремы Тверберга, теоремы о центральной точке и теоремы о центральной трансверсали. Все эти результаты являются прямыми следствиями вычисления препятствия в виде класса Эйлера.

Обобщения теорем о центральной точке заключаются в том, что вместо мер на множестве точек $\mathbb{R}^d$ рассматриваются меры на множествах k-плоскостей в $\mathbb{R}^d$, формулируются соответствующие утверждения.

Теорема Тверберга обобщается как в смысле перехода к гиперплоскостям от точек, так и в смысле рассмотрения нескольких конечных множеств, каждое из которых разбивается и у полученных множеств разбиения выпуклые оболочки пересекаются одной k-плоскостью (гипотеза Тверберга о трансверсалях).

В главе 5 доказываются некоторые обобщения теоремы Кнастера-Куратовского-Мазуркевича (сокращённо — ККМ), используя технику типа теоремы Борсука-Улама, близкую к результатам раздела 2.8. Эти теоремы можно считать цветными вариантами теоремы ККМ, аналогично цветным аналогам теорем Каратеодори, Хелли, Тверберга в работах Bárány и Larman [4, 5].

Формулируется некоторое «цветное» обобщение теоремы Брауэра о неподвижной точке и из него выводится цветная теорема Хелли. Рассматриваются некоторые «цветные» обобщения леммы Шпернера.

В главе 6 доказываются теоремы типа Борсука-Улама о покрытиях пространств канонических расслоений над вещественными грассманианами. Из них выводятся результаты о разбиении мер гиперплоскостями, теоремы типа Борсука-Улама, дающие плоские трансверсали семейств множеств, плоскости, равноудалённые (равноуклоняющиеся) от всех множеств семейства.

Также с помощью лемм о категории Люстерника-Шнирельмана грассманиана доказываются некоторые теоремы типа Хелли для плоских трансверсалей.

В главе 7 рассматривается задача о бильярде в выпуклом теле и даётся новая (неулучшаемая) оценка на категорию Люстерника-

Шнирельмана конфигурационного пространства. Из этой оценки выводится оценка снизу на количество различных траекторий простой длины.

В главе 8 доказывается результат о вписывании многомерного аналога октаэдра (кроссполитопа) в гладкое выпуклое тело, рассматриваются возможные ослабления условия гладкости и вписывание в невыпуклую гиперповерхность. С помощью небольшой модификации рассуждений доказывается утверждение о разбиении меры конусами.

Также рассмотрены близкие по духу результаты о существовании в каждом многообразии с непрерывной метрикой конечного набора точек, расстояния между которыми связаны равенствами определённого вида. Доказываются и более общие версии утверждения, в которых вместо метрики используются произвольные непрерывные функции нескольких точек.

В главе 9 вводится некоторое обобщение понятия категории Люстерника-Шнирельмана и для него доказывается утверждение о категории прообраза точки при непрерывном отображении. Выводятся следствия типа теоремы Борсука-Улама для функций на сфере.

Автор хотел бы выразить благодарности:

- В.Л. Дольникову за постоянное внимание к этой работе, многочисленные обсуждения результатов и ценные замечания по подготовке текста.

- А.Ю. Воловикову за обсуждения результатов и указание на многие необходимые ссылки.

Глава 2

Вспомогательные утверждения из топологии

В этой главе даётся описание топологической техники, которая будет в дальнейшем использоваться для получения геометрических следствий. Эти результаты собраны в данной главе, потому что не все они входят в общепринятые учебники, многие соображения рассредоточены по публикациям в периодических научных изданиях. Основные идеи и методы гомотопической топологии хорошо описаны в учебнике [100].

Тем не менее, некоторые результаты из этой главы ранее не встречались в литературе, такие случаи будут отмечаться отдельно и называться «теоремами» в отличие от «лемм».

2.1 Класс Эйлера векторного расслоения и практические методы его вычисления

Основные сведения о характеристических классах векторных расслоений можно найти в книгах [92, 93]. Здесь будут отмечены только утверждения, которые понадобятся в следующих главах.

Пусть $\pi_V : V \to X$ — n-мерное векторное расслоение над топологическим пространством X. Если база расслоения X является паракомпактным пространством, то векторное расслоение допускает некоторую евклидову метрику, непрерывно зависящую от слоя. Далее будем всегда считать, что такая метрика задана, в большинстве практических задач сразу есть некоторая естественно заданная метрика на расслоении.

Метрика позволяет определить пространства $B(V)$ и $S(V)$ единичных шаров и единичных сфер расслоения V. $B(V)$ гомотопически эквивалентно пространству V, а значит и X.

Далее зафиксируем кольцо коэффициентов когомологий A. Если расслоение V ориентируемо, то $A = \mathbb{Z}$, иначе $A = Z_2$. Далее используем обозначение Z_n для группы вычетов по модулю натурального числа n. Как известно, все классы когомологий пары $(B(V), S(V))$ имеют вид ux, где $u \in H^n(B(V), S(V), A)$ — фиксированный класс Тома, а $x \in H^n(B(V), A) = H^n(X, A)$ — произвольный класс. В частности, с точки зрения аддитивной структуры когомологии пары $(B(V), S(V))$ изоморфны когомологиям X со сдвигом градуировки на n, это называется изоморфизмом Тома.

Когомологическая точная последовательность пары $(B(V), S(V))$

даёт нам последовательность

$$\ldots \xleftarrow{\partial} H^k(S(V), A) \leftarrow H^k(X, A) \leftarrow H^k(B(V), S(V), A) \xleftarrow{\partial} \\ \xleftarrow{\partial} H^{k-1}(S(V), A) \leftarrow \ldots, \quad (2.1)$$

образ класса Тома u в $H^n(X, A)$ называется классом Эйлера расслоения V и обозначается $e(V)$.

В дальнейших приложениях для нас будет принципиально важно свойство мультипликативности класса Эйлера:

Лемма 2.1. *Если $\pi_V : V \to X$ и $\pi_W : W \to Y$ — векторные расслоения, то $\pi_V \times \pi_W : V \times W \to X \times Y$ — тоже векторное расслоение и*

$$e(V \times W) = e(V) \times e(W).$$

В частности, если берётся прямая сумма векторных расслоений над одним и тем же пространством $V \to X$ и $W \to X$, то

$$e(V \oplus W) = e(V)e(W).$$

Также известно, что класс Эйлера является первым препятствием к построению сечения расслоения сфер $S(V) \to X$, или, иначе говоря, к построению ненулевого сечения $s : X \to V$ расслоения $V \to X$.

Что касается практических методов нахождения класса Эйлера, то, помимо мультипликативности, полезно использовать следующий факт.

Лемма 2.2. *Пусть X — n-мерное замкнутое гладкое многообразие, $V \to X$ — k-мерное векторное расслоение. Если X и V ориентируемы, то используем коэффициенты $A = \mathbb{Z}$, иначе $A = Z_2$. Тогда для общего сечения $s : X \to V$ многообразие нулей сечения двойственно по Пуанкаре классу Эйлера $e(V)$.*

Далее при обсуждении относительного класса Эйлера это утверждение будет сформулировано и для относительных многообразий, в частности, для многообразий с краем.

Лемма 2.2 даёт удобный способ вычисления класса Эйлера, если $k = n$. Тогда надо выбрать сечение расслоения V, которое имело бы только простые нули, что по определению означает: $s(X)$ трансверсально нулевому сечению $s_0(X)$. В случае $A = Z_2$ класс Эйлера соответствует чётности количества этих нулей. Если же $A = \mathbb{Z}$, то для всякого нуля надо локально представить сечение в правильно ориентированных координатах $(x_1, \dots, x_n)$ на X и $(y_1, \dots, y_n)$ на слое V в виде

$$y_i = \sum a_{ij} x_j + o(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2})$$

и назначить такому нулю индекс $\operatorname{sgn} \det(a_{ij})$. Тогда класс Эйлера V соответствует сумме индексов всех нулей. Этот метод очень широко применяется в геометрических задачах и называется методом тестовых сечений (см. также [83]).

2.2 Относительный класс Эйлера

С точки зрения методов гомотопической топологии естественно обобщить понятие класса Эйлера расслоения на пары топологических пространств (X, Y). Основной порядок такого обобщения описан в статье [37], хотя конкретно случай класса Эйлера там не освещён. Поэтому в этом разделе будет подробно рассмотрено понятие относительного класса Эйлера и его свойства.

В первую очередь следует заметить, что относительный класс Эйлера относится не только к расслоению, но и к выбору конкретного сечения.

Далее в этом разделе, если не оговорено иначе, для ориентируемых расслоений рассматриваются когомологии с целыми коэффициентами, если же расслоение может быть неориентируемым, то рассматриваются когомологии с коэффициентами в Z_2. Обозначение кольца коэффициентов опускается.

Определение. Рассмотрим пару пространств $Y \subseteq X$ и m-мерное векторное расслоение $\pi_V : V \to X$. Пусть также задано не обращающееся в нуль сечение s расслоения V над Y. Назовём такую конструкцию (V, s) *частичным сечением.*

В некоторых случаях будем считать, что сечение s как-то продолжено на все пространство X. Естественно, в этом случае оно может обращаться в нуль на $X \setminus Y$. Но любые два продолженных сечения можно соединить между собой гомотопией, при которой все сечения гомотопии не будут иметь нулей на Y.

Нетрудно понять, что частичные сечения над парой (X, Y) гомотопически классифицируются отображениями пары (X, Y) в пару $(BO(m), BO(m-1))$, или $(BSO(m), BSO(m-1))$ в случае ориентируемых расслоений.

Для пары $(BO(m), BO(m-1))$ существует следующая явная конструкция. Рассмотрим каноническое m-мерное векторное расслоение $\gamma \to BO(m)$. Тогда пара $(B(\gamma), S(\gamma))$ является одной из возможных реализаций $(BO(m), BO(m-1))$. Изоморфизм Тома говорит, что существует $u \in H^m(BO(m), BO(m-1))$ такой, что умножение элементов $H^*(BO(m))$ на u даёт изоморфизм когомологий с коэффициентами в Z_2

$$H^*(BO(m), BO(m-1)) = uH^*(BO(m)).$$

Такая же ситуация имеет место для пары $(BSO(m), BSO(m-1))$ и когомологий с целыми коэффициентами.

Определение. Образ класса Тома $u \in H^m(BO(m), BO(m-1), Z_2)$ в $H^m(X, Y, Z_2)$ будем называть классом Эйлера по модулю 2 частичного сечения. В ориентируемом случае образ класса Тома $u \in$

$H^m(BSO(m), BSO(m-1), \mathbb{Z})$ в $H^m(X, Y, \mathbb{Z})$ будем называть классом Эйлера частичного сечения. Будем обозначать класс Эйлера частичного сечения $e(V, s)$.

Обозначим через pt пространство, состоящее из одной точки и сформулируем лемму, сразу следующую из определений классов Тома и Эйлера. Несвязное объединение топологических пространств X и Y обозначим $X \sqcup Y$.

Лемма 2.3. *Для пары пространств* $(X \sqcup \mathrm{pt}, \mathrm{pt})$ *относительный класс Эйлера расслоения* $V \to X \sqcup \mathrm{pt}$ *с любым сечением над* pt *в* $\tilde{H}^*(X \sqcup \mathrm{pt}, \mathrm{pt}) = H^*(X)$ *совпадает с обычным классом Эйлера ограничения этого расслоения на* X.

Из определения ясно, что класс Эйлера является первым препятствием (возможно, по модулю 2) к продолжению частичного ненулевого сечения до полного ненулевого сечения.

Чтобы сформулировать аналог свойства мультипликативности для относительного класса Эйлера, надо определить произведение (прямую сумму) частичных сечений.

Определение. Пусть над (X_1, Y_1) дано частичное сечение (V, s_1), а над (X_2, Y_2) дано частичное сечение (W, s_2). Будем считать сечения s_i продолженными на X_i. Тогда в произведении расслоений $V \times W$ сечение $s_1 \times s_2$ даёт частичное сечение над парой $(X_1 \times X_2, (X_1 \times Y_2) \cup (Y_1 \times X_2))$. Назовём эту операцию *произведением частичных сечений.*

Лемма 2.4. *Для произведения частичных сечений имеет место формула*

$$e(V \times W, s_1 \times s_2) = e(V, s_1) \times e(W, s_2).$$

В частности, если $X_1 = X_2 = X$ *получаем следствие для операции прямой суммы расслоений (и сечений)*

$$e(V \oplus W, s_1 \oplus s_2) = e(V, s_1)e(W, s_2) \in H^*(X, Y_1 \cup Y_2).$$

Лемма следует из рассмотрения классифицирующих пространств и мультипликативности класса Тома.

Сформулируем также утверждение о двойственности относительного класса Эйлера для относительных многообразий. Пара (X, Y) является относительным многообразием, если X и Y — симплициальные комплексы, Y является подкомплексом X, $X \setminus Y$ — топологическое многообразие. В частности пара из компактного гладкого многообразия и его края $(M, \partial M)$ является относительным многообразием. n-мерное относительное многообразие (X, Y) ориентируемо, если есть класс $w \in H^n(X, Y, \mathbb{Z})$, который имеет ненулевой прообраз в группе $H^n(X, X \setminus x_0, \mathbb{Z})$ для каждой $x_0 \in X \setminus Y$.

Относительное многообразие (X, Y) назовём гладким, если $X \setminus Y$ — гладкое многообразие и далее рассматриваем гладкие относительные многообразия. Частичное сечение (продолженное на всё X) расслоения $V \to X$ назовём общим, если многообразие $s(X \setminus Y)$ трансверсально $X \setminus Y$.

Лемма 2.5. *Пусть (X, Y) — n-мерное гладкое относительное многообразие, $\pi_V : V \to X$ — k-мерное векторное расслоение. Если (X, Y) и V ориентируемы, то используем коэффициенты $A = \mathbb{Z}$, иначе $A = Z_2$. Тогда для общего частичного сечения $s : X \to V$ (продолженного на всё X) многообразие нулей сечения, как класс из $H_{n-k}(X \setminus Y)$, двойственно по Пуанкаре-Лефшецу классу Эйлера $e(V, s)$.*

В относительном случае эта лемма также даёт возможность вычислять относительный класс Эйлера методом тестовых сечений.

2.3 Эквивариантный класс Эйлера

Далее в этой главе и далее в приложениях будут широко использоваться топологические пространства с действием конечной группы

G. Введём соответствующую терминологию, следуя книге [96].

Определение. Если на топологическом пространстве X непрерывно действует группа G, то X будем называть *G-пространством.*

Определение. Действие G на X называется *свободным*, если для $g \neq e$ и любого $x \in X$
$$g(x) \neq x.$$

Определение. Если непрерывное отображение $f : X \to Y$ между G-пространствами перестановочно с действием группы G, то будем говорить, что f является *G-эквивариантным.*

Определение. Если в векторном расслоении $\pi : V \to X$ пространства V и X являются G-пространствами и отображение π эквивариантно, то V будем называть *векторным G-расслоением.*

Соответственно возникает понятие эквивариантного сечения G-расслоения. Нас в основном интересует задача построения (или продолжения в относительном случае) ненулевого эквивариантного сечения векторного расслоения. Препятствие к этому построению или продолжению также будет называться классом Эйлера.

Для определения эквивариантного класса Эйлера следует применить стандартную конструкцию Бореля (см. [96]), которая позволяет по всякому G-пространству естественно построить свободное G-пространство. Если действие G на исходном пространстве было свободным, то построенное пространство будет G-эквивариантно гомотопически эквивалентно исходному.

Определение. Будем обозначать EG гомотопически тривиальный CW-комплекс, на котором свободно действует группа G. Комплекс EG однозначно определён с точностью до G-эквивариантной гомотопии, один из вариантов его построения — бесконечный джойн $G * G * \dots * G * \dots$ с диагональным действием G. Будем также обозначать $EG_k = G^{*k}$, $BG_k = EG_k/G$, $BG = EG/G$.

Определение. Для всякого G-пространства X группа G свободно действует на пространстве $X \times EG$. Обозначим фактор $X_G = (X \times EG)/G$. Если действие G на X свободно, то X_G гомотопически эквивалентно X/G.

Определение. *G-эквивариантные когомологии* G-пространства X — это когомологии пространства X_G

$$H^*_G(X, A) = H^*(X_G, A).$$

Для G-пары (X, Y) аналогично

$$H^*_G(X, Y, A) = H^*(X_G, Y_G, A).$$

Если G действует на $X \setminus Y$ свободно, то получаем, что

$$H^*_G(X, Y, A) = H^*(X/G, Y/G, A).$$

Легко проверить, что эквивариантные когомологии являются функтором для G-эквивариантных отображений. Напомним также формулу Кюннета для эквивариантных когомологий. Пусть, для простоты, кольцо A является полем.

Лемма 2.6. *Пусть (X_1, Y_1) — G_1-пара, а (X_2, Y_2) — G_2-пара. Тогда $\times$-произведение даёт изоморфизм*

$$H^n_{G_1\times G_2}(X_1\times X_2, X_1\times Y_2\cup Y_1\times X_2, A) = \bigoplus_{k=0}^{n} H^k_{G_1}(X_1, Y_1, A)\otimes H^{n-k}_{G_2}(X_2, Y_2, A).$$

Определение. Пусть $\pi_V : V \to X$ — векторное G-расслоение. Естественная проекция $\pi_X : X \times EG \to X$ индуцирует векторное G-расслоение $\pi^*_X(V)$ над $X \times EG$, которое факторизуется по действию G и даёт векторное расслоение $V_G \to X_G$. Тогда класс Эйлера

$$e(V_G) \in H^*(X_G, A) = H^*_G(X, A)$$

называется *эквивариантным классом Эйлера* расслоения V и обозначается $e_G(V)$.

Конструкция относительного эквивариантного класса Эйлера пары из векторного G-расслоения и его эквивариантного сечения аналогична.

В качестве кольца коэффициентов A для класса Эйлера в общем случае берётся Z_2, если же расслоение V было ориентируемым и действие G сохраняло его ориентацию, то кольцо коэффициентов можно взять $\mathbb{Z}$. Если из контекста ясно, что рассматривается именно эквивариантный класс Эйлера, то будем писать $e(V)$ вместо $e_G(V)$.

Заметим, что если действие G на X свободно, то можно факторизовать V до расслоения $V/G \to X/G$ и получить равенство $e_G(V) = e(V/G)$.

Сформулируем лемму, которая сразу следует из определения класса Эйлера и функториальности конструкции $X \mapsto X_G$.

Лемма 2.7. *Пусть G-эквивариантное отображение $f : X \to Y$ индуцирует из векторного G-расслоения $\pi_V : V \to Y$ расслоение $f^*(\pi_V) : f^*(V) \to X$. Тогда расслоение $f^*(V)$ естественно является векторным G-расслоением и для эквивариантного класса Эйлера выполняется равенство*

$$e_G(f^*(V)) = f^*(e_G(V)).$$

Сформулируем теперь свойство мультипликативности эквивариантного класса Эйлера.

Лемма 2.8. *Пусть $\pi_V : V \to X_1$ — G_1-расслоение, $\pi_W : W \to X_2$ — G_2-расслоение. Тогда $\pi_V \times \pi_W : V \times W \to X_1 \times X_2$ является векторным $G_1 \times G_2$-расслоением и для эквивариантных классов Эйлера выполняется формула*

$$e_{G_1 \times G_2}(V \times W) = e_{G_1}(V) \times e_{G_2}(W).$$

Для относительного эквивариантного класса Эйлера формулировка аналогична. Заметим, что в этой формулировке одна из групп может состоять из одного элемента, в таком случае эквивариантный класс Эйлера умножится на обычный класс Эйлера.

Рассмотрим важный для дальнейших приложений случай, когда G-расслоение $V \to X$ над G-пространством X тривиально, то есть $V = X \times L$, где L — некоторое векторное пространство с действием G, то есть представление G. Тогда расслоение V индуцировано из векторного G-расслоения $L \to \mathrm{pt}$ и соответственно, класс Эйлера $e_G(V)$ является прообразом класса $e_G(L)$ при естественном отображении, индуцированном эквивариантным отображением $\pi_X : X \to \mathrm{pt}$

$$\pi_X^* : H_G^*(\mathrm{pt}, A) = H^*(BG, A) \to H_G^*(X, A).$$

Дадим соответствующее определение.

Определение. Для линейного представления L группы G эквивариантный класс Эйлера векторного G-расслоения $L \to \mathrm{pt}$ назовём *классом Эйлера представления* L.

Класс Эйлера представления находится в группе $H^{\dim L}(BG, A)$, где кольцо коэффициентов выбирается аналогично предыдущим определениям. Наиболее простая ситуация с классами Эйлера представления имеется в случае $G = Z_p$ или $G = (Z_p)^k$, о чём пойдёт речь в следующем разделе.

2.4 Когомологии пространства $B(Z_p)^k$

Центральном моментом в изучении топологии действий группы G является изучение кольца когомологий $H^*(BG, A)$. В случае групп Z_p (p — простое) можно дать некоторое описание этих колец.

Лемма 2.9. *Кольцо* $H^*(BZ_2, Z_2)$ *является кольцом многочленов от одномерной образующей* $u \in H^1(BZ_2, Z_2)$.

Лемма 2.10. *Кольцо $H^*(BZ_p, Z_p)$ при нечётном простом p порождено двумя образующими $v \in H^1(BZ_p, Z_p), w \in H^2(BZ_p, Z_p)$ и соотношением $v^2 = 0$. При этом действие гомоморфизма Бокштейна задаётся как $\beta(v) = w$, $\beta(w) = 0$.*

Далее для групп вида $(Z_p)^k$ при рассмотрении эквивариантных когомологий в качестве кольца коэффициентов будем выбирать Z_p и обозначения кольца коэффициентов опускать. Обозначим алгебру

$$\Lambda_p = H^*(BZ_p, Z_p),$$

тогда по формуле Кюннета $H^*(B(Z_p)^k) = \Lambda_p^{\otimes k} = \Lambda_p(k)$.

Подпространство алгебры $\Lambda_p(k)$, состоящее из классов когомологий размерности n и нулевого класса, будем обозначать $\Lambda_p^n(k)$.

Сформулируем следующую лемму, важную для вычисления класса Эйлера эквивариантных расслоений (см. [96], глава IV §1).

Лемма 2.11. *Пусть $G = (Z_p)^k$ и её представление L не имеет тривиальных слагаемых. Тогда класс Эйлера представления $e(L)$ не равен нулю.*

В частности, представление $\mathbb{R}[G]/\mathbb{R}$, где фактор берётся по линейной комбинации $\sum_{g\in G} g$, не имеет тривиальных слагаемых. И для групп $G = (Z_p)^k$ его класс Эйлера по модулю p будет ненулевым.

Введём специальное обозначение для подкольца многочленов в $\Lambda_p(k)$, в котором лежат классы Эйлера.

Определение. Для $p = 2$ обозначим $S_p(k) = \Lambda_p(k)$, для $p > 2$

$$S_p(k) = Z_p[w] \otimes \cdots \otimes Z_p[w].$$

Лемма 2.12. *Для всякого ненулевого класса $x \in S_p^n(k)$ и числа $m \geq 0$ найдётся класс $y \in \Lambda_p^m(k)$ такой, что их произведение $xy \neq 0 \in \Lambda_p^{n+m}(k)$.*

Доказательство леммы тривиально следует из явного описания колец $\Lambda_p(k)$.

2.5 Индекс $(Z_p)^k$-действия

Данный раздел основан на результатах работ [18, 73, 74]. Широкий обзор по разным определениям понятия индекса $(Z_p)^k$-действия можно найти в [76]. В цитируемых источниках нет единой терминологии для понятий индекса, коиндекса и рода G-пространства, поэтому в этом разделе фиксируется некоторая терминология.

В предыдущих главах показано, что для практического вычисления эквивариантного класса Эйлера в некоторых случаях надо знать, как для данного G-пространства X устроено естественное отображение, индуцированное тривиальным эквивариантным отображением $p_X : X \to \mathrm{pt}$,

$$p_X^* : H_G^*(\mathrm{pt}, A) = H^*(BG, A) \to H_G^*(X, A).$$

В случае $G = (Z_p)^k$ имеет смысл сделать следующее определение. Коэффициенты когомологий берутся в Z_p.

Определение. Для G-пространства X *индексом со значением в идеалах* (ideal-valued index) называется

$$\operatorname{Ind} X = \ker p_X^* : H^*(BG) \to H_G^*(X).$$

Ясно, что индекс является идеалом кольца $\Lambda_p(k)$, в том числе и относительно гомоморфизма Бокштейна. В случае $G = Z_p$ можно определить идеалы в Λ_p

$$I_n\Lambda_p = \bigoplus_{m \geq n} \Lambda_p^m.$$

Легко видеть, что все идеалы (являющиеся идеалами относительно гомоморфизма Бокштейна) в Λ_p имеют вид либо $I_n\Lambda_p$, либо 0.

Определение. Для Z_p-пространства X найдём такое n, что $\operatorname{Ind} X = I_{n+1}\Lambda_p$, если $\operatorname{Ind} X$ нулевой, положим $n = +\infty$. Тогда число n назовём *когомологическим индексом* X и обозначим $\operatorname{hind} X$.

Лемма 2.13 (Монотонность индекса). *Если существует G-эквивариантное отображение $X \to Y$, то* $\operatorname{Ind} X \supseteq \operatorname{Ind} Y$ *и* $\operatorname{hind} X \le \operatorname{hind} Y$ *в случае* $G = Z_p$.

Обозначим идеал кольца $\Lambda_p(k)$

$$I_n\Lambda_p(k) = \bigoplus_{m\ge n} \Lambda_p^m(k).$$

Заметим, что имеется оценка сверху индекса через размерность:

Лемма 2.14. *Если действие G на X свободно и X n-мерно (как гладкое многообразие или симплициальный комплекс), то*

$$\operatorname{Ind} X \supseteq I_{n+1}\Lambda_p(k),$$

в случае $G = Z_p$ это означает, что $\operatorname{hind} X \le n$.

Доказательство следует из того, что $\dim X/G \le n$.

Однако, в дальнейших приложениях необходима оценка снизу для индекса $(Z_p)^k$-действия.

Сформулируем известную лемму, получающуюся применением спектральной последовательности Лере-Серра к расслоению $X_G \to BG$ со слоем X, см. книгу [45], раздел 11.4.

Лемма 2.15 (Спектральная последовательность Лере-Серра). *Существует спектральная последовательность с членом*

$$E_2^{x,y} = H^x(BG, \mathcal{H}^y(X, Z_p)),$$

сходящаяся к градуированному модулю, соответствующему некоторой фильтрации $H_G^*(X, Z_p)$.

Здесь система коэффициентов $\mathcal{H}^y(X, Z_p)$ получается из когомологий $H^y(X, Z_p)$ действием на них $G = \pi_1(BG)$. Дифференциалы этой спектральной последовательности являются гомоморфизмами $H^*(BG, Z_p)$-модулей.

Из этой леммы следует утверждение об оценке индекса снизу, которое, судя по всему, является новым.

Теорема 2.16. *Пусть пространство X связно и $H^m(X, Z_p)$ являются свободными $Z_p[G]$-модулями относительно действия G при $m < n$. Тогда*

$$\operatorname{Ind} X \subseteq I_{n+1}\Lambda_p(k),$$

в частности, при $G = Z_p$ $\operatorname{hind} X \geq n$.

Доказательство. Заметим, что строчки с номерами $m = 1, \dots, n-1$ в члене E_2 спектральной последовательности леммы 2.15 содержат что-то ненулевое только в $E_2^{0,m}$ (см. [71], глава III). Отсюда следует, что дифференциалы спектральной последовательности должны действовать на этих строчках тривиально, так как иначе эти дифференциалы не могли бы быть гомоморфизмами $\Lambda_p(k)$-модулей.

Значит в нулевой строке ненулевые члены с размерностями $\leq n$ остаются ненулевыми во всех членах спектральной последовательности, в том числе в E_∞. Значит, они останутся ненулевыми и в $H_G^*(X, Z_p)$. □

Сформулируем также следствие из предыдущей леммы, известное ранее (см. например [74, 76]).

Лемма 2.17. *Пусть пространство X $n-1$-связно. Тогда*

$$\operatorname{Ind} X \subseteq I_{n+1}\Lambda_p(k),$$

в частности, при $G = Z_p$ $\operatorname{hind} X \geq n$.

Сформулируем также известную лемму об оценке индекса объединения пространств (лемма 5.4 из [75]).

Лемма 2.18. *Для открытых Z_p-инвариантных подмножеств X и Y некоторого свободного Z_p-пространства имеет место неравенство*

$$\operatorname{hind}(X \cup Y) \le \operatorname{hind} X + \operatorname{hind} Y + 1.$$

В этой лемме индекс определяется через когомологии Чеха.

2.6 Род G-действия

Аналогом индекса Z_p-действия является род действия конечной группы, который можно определить для произвольной конечной группы G, это понятие определялось в работах [41, 63, 64, 52]. Сведения о роде в том смысле, как он понимается в этой работе, и в существенно обобщённом смысле, можно найти в книге [7].

Определение. Минимальное n, для которого существует эквивариантное отображение $X \to EG_n$, называется *родом* G-пространства X и обозначается $g(X)$.

Ясно, что род имеет смысл только для свободных G-пространств. Для случая несвободных G-пространств есть свой аналог понятия рода, но в этой работе он рассматриваться не будет. Для рода G-действия есть свойства, аналогичные свойствам индекса. Первое свойство очевидно по определению.

Лемма 2.19 (Монотонность рода)**.** *Если существует эквивариантное отображение $X \to Y$ между двумя G-пространствами, то*

$$g_G(X) \le g_G(Y).$$

Следующее свойство сразу следует из $k-2$-связности G^{*k} и теории препятствий.

Лемма 2.20. *Для G-CW комплекса X, являющегося свободным G-пространством, имеет место неравенство*

$$g_G(X) \le \dim X + 1.$$

Теперь опять вернёмся к рассмотрению $G = (Z_p)^k$ и заметим, что EG_n — $n-1$-мерный симплициальный комплекс, следовательно

$$\operatorname{Ind} EG_n \supseteq I_n \Lambda_p(k).$$

Таким образом доказана лемма:

Лемма 2.21. *Если $g(X) \le n+1$, то $\operatorname{Ind} X \supseteq I_{n+1}\Lambda_p(k)$, в частности для $G = Z_p$ $\operatorname{hind} X + 1 \le g(X)$.*

Так как пространство EG_n $n-2$-связно и $n-1$-мерно, то по лемме 2.17 и предыдущей лемме получаем, что для $G = (Z_p)^k$

$$\operatorname{Ind} EG_n = I_n \Lambda_p(k), \quad g(EG_n) = n.$$

В частности, для антиподального ($x \mapsto -x$) действия группы $G = Z_2$ на сфере $S^n = EG_{n+1}$ получаем утверждение.

Лемма 2.22. *Для сферы с антиподальным действием Z_2*

$$\operatorname{hind} S^n = n,\ g(S^n) = n + 1.$$

Фактически, эта лемма является одной из эквивалентных формулировок теоремы Борсука-Улама.

2.7 Категория Люстерника-Шнирельмана

Напомним понятие категории Люстерника-Шнирельмана (см. [85]), которое используется для оценки снизу числа критических точек гладкой функции на гладком многообразии, а также полезно само по себе в некоторых задачах.

Определение. *Относительной категорией Люстерника-Шнирельмана* пары $Y \subseteq X$ называется минимальный размер семейства стягиваемых по X открытых подмножеств X, покрывающего Y. Категория $Y \subseteq X$ обозначается $\operatorname{cat}_X Y$. Величина $\operatorname{cat}_X X = \operatorname{cat} X$ называется просто *категорией* X.

Следуя работе [31], сделаем несколько замечаний.

Мы будем считать, что рассматриваемые пространства паракомпактны и являются абсолютными окрестностными ретрактами, в этом случае в определении категории можно брать открытые или замкнутые множества покрытия — значение категории при это не изменяется. Также заметим, что категория X является гомотопическим инвариантом X.

Напомним теорему Люстерника-Шнирельмана о числе критических точек, в формулировке для многообразий с краем (см. [48]).

Лемма 2.23. *Если X — компактное гладкое многообразие с краем, $f : X \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, градиент которой на крае ∂X направлен всегда наружу X (или всегда внутрь X). Тогда количество критических точек функции f не меньше, чем $\operatorname{cat} X$.*

Сформулируем оценку сверху для категории Люстерника-Шнирельмана гладкого многообразия, с учётом гомотопической инвариантности.

Лемма 2.24. *Если пространство X гомотопически эквивалентно CW-комплексу X', то*

$$\operatorname{cat} X \le \dim X' + 1.$$

Классический метод оценки снизу категории Люстерника-Шнирельмана основывается на следующей лемме (см. [23], которая будет нам полезна и сама по себе.

Лемма 2.25. *Пусть пространство X покрыто семейством открытых множеств $U_1, U_2, \dots, U_m$ и даны элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in H^*(X, A)$. Если для каждого $i = 1, \dots, m$ образ a_i в $H^*(U_i, A)$ нулевой, то произведение $a_1 a_2 \cdots a_m = 0$ в $H^*(X, A)$.*

Доказательство леммы без труда следует из определения произведения в когомологиях. Эта лемма сразу даёт оценку для линейно связного X

$$\operatorname{cat} X \geq \max\{n : \exists\ a_1, \dots, a_n \in \tilde{H}^*(X)\ a_1 a_2 \dots a_n \neq 0\} + 1.$$

Когомологии могут быть с любыми коэффициентами, максимальная длина ненулевого произведения называется *когомологической длиной* пространства X и обозначается $\operatorname{hl} X$.

Следующее утверждение является известной оценкой категории Люстерника-Шнирельмана факторпространства через род.

Лемма 2.26. *Пусть конечная группа G действует свободно на компактном пространстве X и для некоторой подгруппы простого порядка $H \subseteq G$ имеем $g_H(X) \geq n + 1$. Тогда*

$$\operatorname{cat} X/G \geq n + 1.$$

Естественно, лемму 2.26 полезно применять вместе с неравенством $g_H(X) \geq \operatorname{hind}_H X + 1$.

В книге [7] содержится исследование по эквивариантным аналогам понятия категории, помимо уже цитированных утверждений нужных нам утверждений для свободного действия конечной группы G там рассматривается и случай несвободных действий компактных групп.

Следующее утверждение является некоторым уточнением леммы 2.26, по-видимому, оно является новым.

Теорема 2.27. *Пусть компактное свободное G-пространство Y покрыто открытыми инвариантными подпространствами $\{Y_i\}_{i=1}^l$. Тогда найдётся точка $x \in Y$ такая, что*

$$\sum_{Y_i \ni x} g_G(Y_i) \geq g_G(Y).$$

Доказательство. Положим $g_G(Y_i) = k_i$, можно считать, что все эти числа конечны, так как в противном случае утверждение теоремы очевидно. Рассмотрим эквивариантные отображения $f_i : Y_i \to G^{*k_i}$, которые существуют по определению рода.

Рассмотрим также инвариантное разбиение единицы $\{\rho_i\}_{i=1}^l$, подчинённое покрытию $\{Y_i\}$.

Тогда отображение

$$f : x \mapsto \rho_1(x) f_1(x) \oplus \cdots \oplus \rho_l(x) f_l(x)$$

даёт отображение X в джойн $G^{*(k_1+\cdots+k_l)}$. При этом, если теорема неверна, то образ этого отображения лежит в $(g_G(Y)-2)$-мерном остове симплициального комплекса $G^{*(k_1+\cdots+k_l)}$, что противоречит монотонности рода и лемме 2.20. ☐

2.8 Теоремы о покрытиях для Z_2-пространств

Введём ещё одну геометрическую конструкцию для Z_2-пространств. Результаты этого раздела близки к теореме Борсука-Люстерника-Шнирельмана, однако в приведённых здесь формулировках являются новыми.

Определение. Для свободного Z_2-пространства X возьмём произведение X на отрезок $I = [0, 1]$ и определим в нем действие Z_2 по формуле $\sigma(x, t) = (\sigma(x), 1 - t)$. Тогда пространство $X \times I$ свободно и пусть $B(X) = (X \times I)/Z_2$. Можно заметить, что $B(X)$ получено из X приклеиванием отрезка к каждой паре точек $\{x, \sigma(x)\}$ и введением соответствующей топологии на этом множестве. Естественное отображение $B(X) \to X/Z_2$, является расслоением со слоем I (а значит и гомотопической эквивалентностью), а $X \subset B(X)$ отождествляется с пространством сфер этого расслоения.

Здесь используется обозначение B, потому что пространство X отождествляется с пространством сфер $S(V)$ некоторого линейного расслоения $V \to X/Z_2$. При этом $B(X)$ является пространством шаров того же расслоения $B(X) = B(V)$.

Далее в этом разделе коэффициенты когомологий всегда равны Z_2 и опускаются в обозначениях.

Следующая теорема усиливает лемму 5.5 из [75].

Теорема 2.28. *Если у Z_2-пространств X и Y индексы* $\operatorname{hind} X = \operatorname{hind} Y = n$, *то для любого эквивариантного отображения $f : X \to Y$ отображение $f^* : H^n(Y) \to H^n(X)$ нетривиально. Кроме того, не существует такого (не обязательно эквивариантного) отображения $h : B(X) \to Y$, что $f = h \circ i_X$, где $i_X : X \to B(X)$ — естественное вложение.*

Доказательство. Из условия следует, что пространства X и Y являются свободными. Запишем точные последовательности Тома

$$\dots \xleftarrow{\delta_X} H^k(X) \xleftarrow{i_X^*} H^k(B(X)) \xleftarrow{\pi_X^*} H^k(B(X), X) \xleftarrow{\delta_X} H^{k-1}(X) \dots,$$

$$\dots \xleftarrow{\delta_Y} H^k(Y) \xleftarrow{i_Y^*} H^k(B(Y)) \xleftarrow{\pi_Y^*} H^k(B(Y), Y) \xleftarrow{\delta_Y} H^{k-1}(Y) \dots$$

и заметим, что f порождает естественный гомоморфизм $B(X) \to B(Y)$, значит между этими точными последовательностями есть гомоморфизм f^*, перестановочный с гомоморфизмами последовательностей. Пусть фундаментальные классы Тома в $H^1(B(X), X)$ и $H^1(B(Y), Y)$

— это u_X и u_Y, а образы $w \in H^*_G(\mathrm{pt})$ в $H^*(B(X))$ и $H^*(B(Y))$ — это w_X и w_Y, при этом $f^*(u_Y) = u_X, f^*(w_Y) = w_X$. Тогда по определению индекса $\pi_X^*(u_X w_X^n) = w_X^{n+1} = 0$ и $\pi_Y^*(u_Y w_Y^n) = w_Y^{n+1} = 0$, значит есть класс $v \in H^n(Y)$, для которого $\delta_Y(v) = u_Y w_Y^n$. При этом $\delta_X(f^*(v)) = f^*(\delta_Y(v)) = u_X w_X^n \neq 0$, а значит $f^*(v) \neq 0$, таким образом первая часть теоремы доказана.

Чтобы доказать вторую часть теоремы, заметим, что если найдётся искомое h, то $f^*(v) \in \operatorname{Im} i_X^*$ и из точности последовательности Тома $\delta_X(f^*(v)) = 0$, что противоречит предыдущему абзацу. □

Теперь сформулируем следствие из теоремы 2.28, в котором будут участвовать покрытия Z_2-пространства X и соответствующего ему $B(X)$. Сначала введём определение.

Определение. Точки x и $\sigma(x)$ некоторого Z_2-пространства X назовём *антиподальными.*

Нам придётся устанавливать некоторое соответствие между покрытиями пространства и разбиениями единицы на этом пространстве. Для простоты будем считать пространства компактными метрическими, в этом случае такое соответствие действительно есть. Для наших геометрических приложений этого случая будет вполне достаточно.

Теорема 2.29. *Пусть компактное метрическое Z_2-пространство X с индексом $\operatorname{hind} X = n$ покрыто семейством замкнутых множеств $\mathcal{F} = \{U_1, U_2, \dots, U_{n+2}\}$. Пусть никакое U_i не содержит антиподальных точек. Тогда для всякого разбиения семейства $\{U_i\}$ на два непустых семейства $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ найдётся точка $x \in X$ такая, что $x \in \bigcap \mathcal{F}_1$ и $\sigma(x) \in \bigcap \mathcal{F}_2$. Кроме того, если покрытие $\mathcal{F}$ индуцировано из некоторого замкнутого покрытия $\mathcal{G} = \{V_1, V_2, \dots, V_{n+2}\}$ пространства $B(X)$, то семейство $\mathcal{G}$ имеет общую точку.*

Доказательство. Для подмножества W некоторого метрического пространства M положим

$$W(\varepsilon) = \{x \in M : \operatorname{dist}(x, W) \le \varepsilon\}.$$

Из соображений компактности можно считать, что

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall i = 1, \dots, n+2 \ \operatorname{dist}(U_i, \sigma(U_i)) > \varepsilon.$$

Тогда для каждого $i = 1, \dots, n+2$ возьмём функцию f_i, которая обращается в 1 на U_i и обращается в 0 за пределами $U_i(\varepsilon/2)$. Далее нормируем эти функции, чтобы их сумма была равна 1.

Возьмём теперь функции $g_i(x) = f_i(x) - f_i(\sigma(x))$. Вместе функции g_i дают эквивариантное отображение $g : X \to \mathbb{R}^{n+2}$, причём образ отображения лежит в гиперплоскости H с уравнением $y_1 + \ldots + y_{n+2} = 0$ и не содержит начало координат. Тогда рассмотрим отображение $h : X \to S^n$, в единичную сферу гиперплоскости H, заданное формулой $h(x) = g(x)/|g(x)|$.

Отображение $h : X \to S^n$ эквивариантно и по теореме 2.28 отображение $h^* : H^n(S^n) \to H^n(X)$ нетривиально, отсюда следует, что h сюръективно.

Возьмём разбиение $\{1, 2, \dots, n+2\} = I_1 \cup I_2$ и соответствующее ему разбиение $\{U_i(\varepsilon)\}_{i=1}^{n+2} = \mathcal{F}_1(\varepsilon) \cup \mathcal{F}_2(\varepsilon)$. Возьмём $c = \sqrt{|I_1||I_2|(n+2)}$ и точку $y \in S^n$ так, что её координаты равны

$$y_i = \frac{|I_2|}{c} \ i \in I_1 \quad y_i = -\frac{|I_1|}{c} \ i \in I_2.$$

Найдётся $x \in X$ такая, что $y = h(x)$, поэтому $x \in \bigcap \mathcal{F}_1(\varepsilon)$, $\sigma(x) \in \bigcap \mathcal{F}_2(\varepsilon)$. Отсюда при стремлении ε к нулю из соображений компактности следует первая часть теоремы.

Пусть теперь покрытие продолжено до покрытия $B(X)$, тогда функции f_i соответственно продолжаются на $B(X)$ так, что их сумму можно считать единичной. То есть f можно считать отображением из X в гиперплоскость H_1, заданную условием $y_1 + \ldots + y_{n+2} = 1$.

Если образ f содержит точку $(\frac{1}{n+2}, \dots, \frac{1}{n+2})$, то, аналогично первой части теоремы, доказывается, что множества $\{V_i\}$ имеют общую точку.

Иначе из f можно получить отображение $h_1 : B(X) \to S^n$ в единичную сферу плоскости H_1. Покажем, что отображения h и $h_1|X$ гомотопны. Действительно, для $t \in [0, 1]$ можно положить

$$g_t(x) = f(x) - (1-t)f(\sigma(x)) \quad h_t(x) = \frac{g_t(x) - t(\frac{1}{n+2}, \dots, \frac{1}{n+2})}{|g_t(x) - t(\frac{1}{n+2}, \dots, \frac{1}{n+2})|},$$

тогда h_t — искомая гомотопия. По второй части теоремы 2.28 h (а значит и гомотопное ему h_1) нельзя продолжить с X на $B(X)$ — противоречие. □

Докажем ещё одну теорему о покрытиях:

Теорема 2.30. *Пусть компактное метрическое Z_2-пространство X с индексом $\operatorname{hind} X = n$ покрыто семейством замкнутых множеств $\mathcal{F} = \{U_1, U_2, \dots, U_N\}$. Пусть никакое U_i не содержит антиподальных точек. Тогда найдётся точка $x \in X$ такая, что количество множеств U_i, содержащих x или $\sigma(x)$, не менее $n+2$.*

Доказательство. Как и в предыдущей теореме заменим покрытие на набор функций $f_i : X \to \mathbb{R}^+$. Рассмотрим отображение $g(x) = f(x) - f(\sigma(x))$ и предположим противное. Это означает, что для любого $x \in X$ не более $n+1$ координаты $g(x)$ отлично от нуля.

Тогда с учётом условий, что сумма положительных координат $g(x)$ равна 1, а сумма отрицательных равна -1, g даёт эквивариантное отображение X в некоторый $n-1$-мерный симплициальный комплекс. Индекс $n-1$-мерного комплекса со свободным Z_2-действием по определению не превосходит $n-1$, значит получаем противоречие с леммами 2.14 и 2.13. □

Сформулируем ещё одну теорему, несколько уточняющую теорему Люстерника-Шнирельмана о категории $\mathbb{R}P^n$.

Определение. Инвариантное подмножество $U \subseteq X$ Z_2-пространства X назовём *несущественным*, если $g(U) = 1$.

Заметим, что если при определении гомологического индекса использовать когомологии Чеха, то $g(U) = 1$ равносильно тому, что $\operatorname{hind} U = 0$. Сформулируем следствие из теоремы 2.27.

Следствие 2.31. *Пусть компактное метрическое Z_2-пространство X покрыто семейством замкнутых несущественных инвариантных множеств $\mathcal{F} = \{U_1, U_2, \dots, U_N\}$. Тогда $N \geq g(X)$ и если $N = g(X)$, то все множества семейства $\mathcal{F}$ имеют общую точку.*

Сформулируем также аналог теоремы 2.29 для произведения пространств. Можно сравнить это общее топологическое утверждение с результатами раздела 5.2, где дано аналогичное утверждение про произведение симплексов.

Теорема 2.32. *Пусть компактные метрические Z_2-пространства X и Y имеют индексы $\operatorname{hind} X = n$, $\operatorname{hind} Y = m$, $m \geq n$ и произведение $B(X) \times B(Y)$ покрыто семейством замкнутых множеств $\mathcal{F} = \{V_{ij}\}_{i\in[n+2], j\in[m+2]}$. Обозначим проекции $\pi_X : B(X) \times B(Y) \to B(X)$, $\pi_Y B(X) \times B(Y) \to B(Y)$.*

Пусть для любого $i \in [n+2]$ проекция $\pi_X(\bigcup_{j\in[m+2]} V_{ij}) \cap X$ не содержит антиподальных точек и для любого $j \in [m+2]$ проекция $\pi_Y(\bigcup_{i\in[n+2]} V_{ij}) \cap Y$ также не содержит антиподальных точек.

Пусть $\{a_i\}_{i\in[n+2]}$ — положительные целые числа, сумма которых равна $m+2$. Тогда найдётся такое отображение $\sigma : [m+2] \to [n+2]$, что

$$\forall i \in [n+2]\ |\sigma^{-1}(i)| = a_i \quad \textit{и} \quad \bigcap_{j\in[m+2]} U_{\sigma(j)j} \neq \emptyset.$$

Для доказательства этой теоремы понадобится обобщённая лемма Холла [98] о паросочетаниях.

Лемма 2.33. *Пусть в двудольном графе множество вершин разбито на* $V \cup W$, *где* $|V| = n$, $|W| = m$ $(m \geq n)$, *и дано отображение* $a : V \mapsto \mathbb{N}$, *где* $\sum_{v \in V} a(v) = m$. *Пусть для любого непустого* $V' \subseteq V$ *множество вершин из* W, *соединённых хоть с одной вершиной из* V' *имеет мощность не менее* $\sum_{v \in V'} a(v)$. *Тогда найдётся отображение* $\sigma : W \mapsto V$ *такое, что* $\forall w \in W$ $(w, \sigma(w))$ *является ребром и* $\forall v \in V$ $|\sigma^{-1}(v)| = a(v)$.

Лемма является следствием обычной леммы Холла, если каждую вершину $v \in V$ превратить в $a(v)$ ее клонов.

Доказательство теоремы 2.32. Аналогично доказательству теоремы 2.29, перейдём от покрытий к функциям $\phi_{ij} : B(X) \times B(Y) \to \mathbb{R}^+$ с единичной суммой.

Рассмотрим функции $f_i = \sum_{j \in [m+2]} \phi_{ij}$ и $g_j = \sum_{i \in [n+2]} \phi_{ij}$. Как и в доказательстве теоремы 2.29, отображения f и g можно считать отображениями $B(X) \times B(Y)$ в $n+1$ и $m+1$-мерные симплексы соответственно, и если обозначить отображения

$$i_X : B(X) \to B(X) \times B(Y) \quad i_X(x) = x \times y_0$$

и

$$i_Y : B(Y) \to B(X) \times B(Y) \quad i_Y(y) = x_0 \times y,$$

то из доказательства леммы 2.28 следует, что отображения

$$i_X^* \circ f^* : H^{n+1}(\Delta^{n+1}, \partial\Delta^{n+1}) \to H^{n+1}(B(X), X))$$

и

$$i_Y^* \circ g^* : H^{m+1}(\Delta^{m+1}, \partial\Delta^{m+1}) \to H^{m+1}(B(Y), Y))$$

нетривиальны, а значит, по формуле Кюннета, нетривиально и отображение

$$(f \times g)^* : H^{n+m+2}(\Delta^{n+1} \times \Delta^{m+1}, \partial \left(\Delta^{n+1} \times \Delta^{m+1}\right)) \to \\ \to H^{n+m+2}(B(X) \times B(Y), X \times B(Y) \cup B(X) \times Y).$$

Аналогично доказательству теоремы 2.29 отсюда следует, что $f \times g$ сюръективно. Рассмотрим тогда прообраз точки

$$\left(\frac{a_1}{m+2}, \dots, \frac{a_{n+2}}{m+2}\right) \times \left(\frac{1}{m+2}, \dots, \frac{1}{m+2}\right) \in \Delta^{n+1} \times \Delta^{m+1},$$

— пусть это точка p. Для матрицы $\{\phi_{ij}(p)\}$, рассматриваемой как матрица взвешенного двудольного графа, выполняются условия леммы 2.33, что даёт нам искомое отображение σ. □

Глава 3

Топология векторных расслоений

В этой главе будут доказаны некоторые утверждения о топологии векторных расслоений, которые являются новыми результатами. Они будут использованы далее в геометрических приложениях.

3.1 Теоремы о неподвижной точке для послойных отображений

Нам понадобится обобщение теоремы Брауэра о неподвижной точке, в котором фигурируют несколько послойных отображений пространства шаров векторного расслоения. Приведённые в этой главе теоремы являются новыми.

Когомологии рассматриваются с коэффициентами в Z_2 или $\mathbb{Z}$, если расслоение ориентировано.

Теорема 3.1. *Пусть дано векторное расслоение* $\pi_V : V \to X$ *и число* $k \geq 0$, *причём для класса Эйлера выполняется* $e(V)^k \neq 0$. *Пусть* *дано $k+1$ послойное непрерывное (над тождественным) отображение $f_i : B(V) \to B(V)$ $(i = 1, \dots, k+1)$. Тогда найдётся точка $x \in B(V)$, для которой*

$$x = f_1(x) = \ldots = f_{k+1}(x).$$

Сформулируем также вариант этой теоремы, более удобный для практического использования.

Теорема 3.2. *Пусть дано векторное расслоение $\pi_V : V \to X$ и число $k \geq 0$, причём для класса Эйлера выполняется $e(V)^k \neq 0$. Пусть даны $k+1$ послойное непрерывное отображение $f_i : V \to V$ $(i = 1, \dots, k+1)$ и число $M \in \mathbb{R}$, обладающие тем свойством, что для векторов $x \in V$, у которых $|x| \geq M$,*

$$(x, f_1(x) - x) < 0.$$

Тогда найдётся точка $x \in V$, для которой

$$x = f_1(x) = \ldots = f_{k+1}(x).$$

Заметим, что в этой теореме только одно отображение должно удовлетворять условиям, гарантирующим для него неподвижную точку в каждом слое. Остальные вообще могут быть любыми послойными непрерывными отображениями.

При множестве X, состоящим из одной точки, из теорем 3.1 и 3.2 получаются варианты обычной теоремы Брауэра о неподвижной точке.

Доказательство теоремы 3.1. Заметим, что достаточно доказать теорему для компактного пространства X. Если класс $e(V)^k \neq 0$ в когомологиях пространства X, то этот класс не равен нулю и в когомологиях некоторого компактного подпространства X, так как мы рассматриваем сингулярные когомологии.

Заменим в каждом слое отображения f_i на их композиции с гомотетиями с коэффициентом $(1-\varepsilon)$. Если для новых отображений при любом $\varepsilon > 0$ теорема верна, то из соображений компактности она верна и для исходных отображений. Так что далее считаем, что $f_i : B(V) \to B(V) \setminus S(V)$.

Теперь возьмём расслоение V', индуцированное из V над $B(V)$ проекцией на X. Отображение $s_1 : B(V) \to V'$, заданное формулой $s_1 : x \mapsto x - f_1(x)$, даёт частичное сечение (V', s_1) над $(B(V), S(V))$, которое гомотопически эквивалентно стандартному частичному сечению (V', s_0), где $s_0 : x \mapsto x$. Значит класс $e(V', s_1)$, как и $e(V', s_0)$, равен классу Тома $u(V) \in H^*(B(V), S(V))$, что следует прямо из определения класса Эйлера частичного сечения и приведённой выше явной конструкции пары $(BO(m), BO(m-1))$.

Далее по лемме 2.4 и изоморфизму Тома получаем, что

$$e(V' \oplus V'^k, s_1 \oplus 0) = u(V)e(V')^k \neq 0.$$

Значит, сечение $s_1 \oplus 0$ нельзя продолжить до ненулевого сечения расслоения $V' \oplus V'^k$ над $B(V)$.

Рассмотрим также сечения s_i $(i = 2, \dots, k+1)$ расслоения V' над $B(V)$, определяемые по формуле

$$s_i : x \mapsto f_i(x) - f_1(x).$$

Сечение $s_1 \oplus s_2 \oplus \ldots \oplus s_{k+1}$ гомотопно над $S(V)$ сечению $s_1 \oplus 0$ (например, можно рассмотреть гомотопию $s_1 \oplus ts_2 \oplus \ldots \oplus ts_{k+1}$ при $t \in [0,1]$). Значит его тоже нельзя продолжить до ненулевого сечения V'^{k+1} над $B(V)$. Следовательно, в некоторой точке $x \in B(V)$

$$x = f_1(x) = \ldots = f_{k+1}(x),$$

что и требовалось доказать. $\square$

Доказательство теоремы 3.2. В доказательстве этой теоремы возьмём шары в расслоении V радиуса M, далее действуем также, как в доказательстве теоремы 3.1.

Почти все рассуждения остаются верными, так как нигде не используется, что образ f_i лежит в $B(V)$, а не просто в V. Единственное исключение — доказательство того, что сечение $s_1 : x \mapsto x - f_1(x)$ гомотопически эквивалентно стандартному частичному сечению $s_0 : x \mapsto x$. Но в условиях этой теоремы сечения можно соединить гомотопией $(1-t)s_0 + ts_1$, которая не обращает сечения в нуль над $S(V)$, поэтому это утверждение также верно. □

3.2 Топология грассманианов и канонических расслоений над ними

В геометрических приложениях будет использовано понятие k-плоскости в $\mathbb{R}^n$, следовательно, надо определить некоторую параметризацию множества k-плоскостей.

Определение. *k-плоскостью* в $\mathbb{R}^n$ назовём аффинное многообразие размерности k в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим пространство всех k-плоскостей в $\mathbb{R}^n$. Каждой такой плоскости α можно сопоставить единственное ортогональное ей $(n-k)$-мерное линейное подпространство $g(\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ и единственную точку пересечения $\alpha \cap g(\alpha)$. Таким образом пространство k-мерных аффинных плоскостей отождествляется с пространством γ_n^{n-k} канонического расслоения над вещественным грассманианом G_n^{n-k}. В дальнейшем будем считать пространство плоскостей наделённым топологией γ_n^{n-k}.

Если нам нужно рассмотреть пространство ориентированных k-плоскостей, то оно естественным образом отождествляется с пространством γ_n^{n-1+} канонического расслоения над ориентированным грассманианом G_n^{n-k+}.

Лемма 3.3. *Пусть p — простое число, $\gamma = \gamma_n^{n-k}$ (грассманиан ориентированный, если p нечётно). Для класса Эйлера $e(\gamma)$ по модулю p выполняется соотношение*

$$e(\gamma)^k \neq 0 \in H^{n(n-k)}(G_n^{n-k}, Z_p),$$

если $p = 2$ или $n - k$ чётно.

Эта лемма для $p = 2$ доказана в [80]. Случай одновременно нечётных p и n доказан в [69].

Доказательство. Из предыдущего замечания ясно, что достаточно рассмотреть случай нечётного p и ориентированного грассманиана G_n^{n-1+}. Пусть $l = n - k$.

Используем метод тестовых сечений.

Многообразие $G_n^{l\,+}$ имеет размерность kl, над ним есть kl-мерное расслоение $\gamma \oplus \dots \oplus \gamma = k\gamma$ (k-кратная прямая сумма γ).

Возьмём k ортонормированных векторов $f_1, f_2, \dots, f_k \in \mathbb{R}^n$ и рассмотрим сечения γ, заданные проекциями этих векторов f_i на соответствующее l-подпространство $L \in G_n^{l\,+}$.

Полученные сечения также обозначим $f_1, \dots, f_k$. Вместе они дают сечение $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ расслоения $k\gamma$.

Легко заметить, что f имеет два нуля на $G_n^{l\,+}$. Они соответствуют l-подпространству L, ортогональному к f_i, с двумя возможными ориентациями.

Выберем ортонормированный базис $e_1, \dots, e_l \in L$. Пусть $e_1 \wedge \dots \wedge e_l \wedge f_1 \wedge \dots \wedge f_k$ положительно относительно ориентации $\mathbb{R}^n$. Элементы

${G_n^l}^+$, близкие к L можно однозначно описать следующими базисами

$$\begin{array}{rcl} e'_1 & = & e_1 + x_{11}f_1 + \dots + x_{1k}f_k \\ & \dots & \\ e'_l & = & e_l + x_{l1}f_1 + \dots + x_{lk}f_k, \end{array}$$

при этом ориентация ${G_n^l}^+$ задана (произведение по строкам)

$$\omega = dx_{11} \wedge dx_{12} \wedge \ldots \wedge dx_{1k} \wedge \ldots \wedge dx_{l1} \wedge \ldots \wedge dx_{lk}.$$

Сечение f расслоения $k\gamma$ локально имеет вид отображения ${G_n^l}^+ \to \mathbb{R}^{lk}$ (порядок по столбцам)

$$(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{l1}) \oplus \dots \oplus (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{lk}).$$

Следовательно, матрица линейного приближения сечения f является матрицей перестановки, которая происходит при замене порядка по строкам на порядок по столбцам. Детерминант такой матрицы равен чётности перестановки $I = \pm 1$ — это и будет индекс данного нуля f.

Теперь нужно рассмотреть базис L с другой ориентацией, для сечения $f' = (f_2, f_1, \dots, f_k)$ индекс будет тот же. Перестановка f_1 и f_2 не меняет индекс, так как по условию l чётно. Поэтому у второго нуля тот же индекс I.

В итоге получаем $e(k\gamma) = e(\gamma)^k = I[{G_n^l}^+] = \pm 2[{G_n^l}^+]$, что не равно нулю по модулю нечётных простых. ☐

Теперь вернёмся к неориентированному грассманиану. В векторном расслоении $\gamma_n^{n-k} \to G_n^{n-k}$ действует Z_2 отображением $x \mapsto -x$ в каждом слое. Рассмотрим пространство сфер $S(\gamma_n^{n-k})$ и вычислим его индекс.

Лемма 3.4. $\operatorname{hind}_{Z_2} S(\gamma_n^{n-k}) = n - 1$.

Доказательство. Пространство $S(\gamma_n^{n-k})$ можно представить как пространство пар (n, L), где n — единичный вектор, а L — ортогональное ему k-мерное подпространство $\mathbb{R}^n$. Отсюда видно, что существует эквивариантное отображение $S(\gamma_n^{n-k})$ в $(n-1)$-мерную сферу и $\operatorname{hind} S(\gamma_n^{n-k}) \leq n-1$.

Когомологии $H_G^*(S(\gamma_n^{n-k}), Z_2)$ вычислим как когомологии пространства $G_n^{1,k} = S(\gamma_n^{n-k})/Z_2$, которое можно отождествить с пространством пар (l, L), где l — одномерное подпространство $\mathbb{R}^n$, а L — ортогональное ему k-мерное подпространство.

Отображение $\pi : (l, L) \mapsto l$ проецирует $G_n^{1,k}$ на $\mathbb{R}P^{n-1}$, при этом легко видеть, что одномерная образующая u когомологий $H^*(\mathbb{R}P^{n-1}, Z_2) = \Lambda_2/I_n\Lambda_2$ как раз и даст при отображении π^* элемент $u \in H^*(G_n^{1,k}, Z_2)$, для которого нужно доказать $u^{n-1} \neq 0$. При проекции π пространство $G_n^{1,k}$ отождествляется с пространством k-мерных подпространств в слоях касательного векторного расслоения $\eta \to \mathbb{R}P^{n-1}$. Но тогда отображение π в композиции с некоторым отображением $\rho : F(\eta) \to G_n^{1,k}$ даёт естественное отображение $\pi_F : F(\eta) \to \mathbb{R}P^{n-1}$ пространства флагов расслоения η. Известно (см. [92]), что отображение π_F^* когомологий с коэффициентами Z_2 инъективно. Значит и отображение Z_2-когомологий π^* инъективно и $u^{n-1} \neq 0$ в когомологиях $G_n^{1,k}$. □

Также в обозначениях раздела 2.8 можно сформулировать лемму

Лемма 3.5. *Существует отображение $B(S(\gamma_n^{n-k}))$ в пространство шаров расслоения γ_n^{n-k} $B(\gamma_n^{n-k})$.*

Доказательство. Если пара (s, t) представляет элемент $B(S(\gamma_n^{n-k}))$, то отобразим ее в $(1-t)s - ts \in B(\gamma_n^{n-k})$, заметим, что пара $(-s, 1-t)$ перейдёт в ту же точку и таким образом задаётся отображение $B(S(\gamma_n^{n-k})) \to B(\gamma_n^{n-k})$ □

Из утверждений этого и предыдущего раздела можно вывести следующую теорему о покрытиях пространства сфер или шаров канонического расслоения над грассманианом.

Теорема 3.6. *Пусть $S(\gamma_n^{n-k})$ покрыто семейством замкнутых множеств $\mathcal{F} = \{U_1, U_2, \dots, U_{n+1}\}$. Пусть никакое U_i не содержит антиподальных точек. Тогда для всякого разбиения семейства $\{U_i\}$ на два непустых семейства $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ найдётся точка $c \in S(\gamma_n^{n-k})$ такая, что $c \in \bigcap \mathcal{F}_1$ и $\sigma(c) \in \bigcap \mathcal{F}_2$. Кроме того, если покрытие $\mathcal{F}$ индуцировано из некоторого замкнутого покрытия $\mathcal{G} = \{V_1, V_2, \dots, V_{n+1}\}$ пространства $B(\gamma_n^{n-k})$, то семейство $\mathcal{G}$ имеет общую точку.*

Доказательство. Первая часть тривиально следует из теорем 2.29 и 3.4, для доказательства второй части надо применить лемму 3.5 и из покрытия $B(\gamma_n^{n-k})$ получить покрытие $B(S(\gamma_n^{n-k}))$. ☐

Рассмотрим теперь ориентированный грассманиан G_n^{k+}. На нем Z_2 действует сменой ориентации. Заметим, что взятие ортогонального дополнения даёт канонический изоморфизм $G_n^{k+} \sim G_n^{n-k+}$, перестановочный с операцией замены ориентации. Поэтому для вычисления Z_2-индекса ориентированного грассманиана достаточно рассмотреть случай $2k \le n$. Следующая лемма суммирует сведения об индексе ориентированного грассманиана из работ [28, 29].

Лемма 3.7. *Пусть $2k \le n$ и 2^s — минимальная степень двойки $2^s \ge n$.*

1) Если $k = 1$, то $\operatorname{hind} G_n^{1+} = \operatorname{hind} S^{n-1} = n - 1$;

2) Если $k = 2$, то $\operatorname{hind} G_n^{k+} = 2^s - 2$;

3) Если $k > 2$, то при $n = 2k = 2^s$ $2^{s-1} \le \operatorname{hind} G_n^{k+} \le 2^s - 1$, в остальных случаях $2^s - 2 \le \operatorname{hind} G_n^{k+} \le 2^s - 1$.

Во всех случаях $\operatorname{hind} G_n^{k+} \ge n-k$ и равенство достигается только при $k = 1$ или $k = 2$ и $n = 2^s$.

Глава 4

Теоремы типа Тверберга

В этой главе доказаны аналоги теоремы о центральной точке из [46, 49, 24] (см. также обзор [17] или книгу [79]), теоремы о центральной трансверсали из [65, 81, 82].

В частности, доказываются двойственные теоремы о центральной точке, в которых вместо мер на множестве точек рассматриваются меры на множестве гиперплоскостей или плоскостей некоторой данной размерности.

Доказываются некоторые обобщения и аналоги теоремы Тверберга из [58] и цветной топологической теоремы Тверберга из [67].

Доказывается частный случай гипотезы Тверберга и Вречицы о трансверсали — в случае, когда количества разбиений r_i в этой гипотезе являются степенями одного и того же простого числа. Эта гипотеза была сформулирована Твербергом в 1989 году на Симпозиуме по комбинаторике и геометрии в Стокгольме. В печатной публикации гипотеза сформулирована в работе [59], в которой был доказан некоторый частный случай этой гипотезы. Некоторые частные случаи были доказаны в работах [69, 62].

Доказываются некоторые результаты о плоских трансверсалях, обобщающие классические теоремы о невложимости типа Ван-Кампена-Флореса [60, 22].

Доказываются двойственные теоремы Тверберга, в их формулировке вместо точек участвуют гиперплоскости.

Основной идеей данной главы является рассмотрение некоторого эквивариантного расслоения, обращение в нуль сечения которого эквивалентно требуемой теореме существования. Далее вычисляется класс Эйлера данного расслоения с активным использованием свойства мультипликативности.

4.1 Конфигурационные пространства и расслоения в теоремах типа Тверберга

Далее будем обозначать множество индексов $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

Опишем конструкции, ранее использованные для доказательства топологической версии теоремы Тверберга, см., например, работу [74] и книгу [44].

Для начала построим представления группы $G = (Z_p)^k$, из которых будут получаться эквивариантные расслоения. Рассмотрим некоторое векторное пространство V и целое число $n > 0$.

Определение. Возьмём пространство $\mathbb{R}^n$ с координатами $(t_1, \dots, t_n)$ и рассмотрим в нем плоскость A_n, определяемую соотношением

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1.$$

Если надо считать A_n линейным пространством, то начало координат будем помещать в точку $(1/n, 1/n, \dots, 1/n)$.

Определение. Для векторного пространства V и целого числа $n > 0$ определим

$$J_A^n(V) = nV \oplus A_n,$$

где запись nV означает прямую сумму n экземпляров V. Пространство V можно вложить в $J_A^n(V)$ с помощью отображения

$$v \mapsto v \oplus v \oplus \ldots \oplus v \oplus (1/n, \ldots, 1/n)$$

и рассмотреть ортогональное разложение

$$J_A^n(V) = V \oplus D_A^n(V).$$

На самом деле $J_A^n(V)$ является аффинной оболочкой n-кратного джойна $V * V * \cdots * V$.

Действие любой группы G на множестве индексов $[n]$ определяет действие на nV перестановками слагаемых и действие на A_n перестановками координат. Слагаемое V в сумме $J_A^n(V) = V \oplus D_A^n(V)$ при этих перестановках всегда неподвижно. Если группа G действует транзитивно на $[n]$, то ее представление $D_A^n(V)$ не имеет тривиальных слагаемых.

Пусть $n = p^k$, отождествим некоторым образом множество из n элементов $[n]$ ($n = p^k$) с $G = (Z_p)^k$ и получим действие G на $[n]$ сдвигами. Тогда представление $D_A^n(V)$ группы G не имеет тривиальных слагаемых и по лемме 2.11 его класс Эйлера $e(D_A^n(V)) \neq 0 \in H_G^*(\mathrm{pt}, Z_p)$.

Теперь перейдём к построению конфигурационных пространств (см. [44], где этот вопрос обсуждается очень подробно), которые применялись ранее для доказательства цветной и обычной теорем Тверберга, и которые будут применяться в этом разделе в доказательствах аналогов теоремы Тверберга.

Определение. Для симплициального комплекса K определим *вырезанный* (deleted в англоязычных публикациях) n-кратный джойн K_Δ^{*n} как комплекс с множеством вершин $V(K) \times [n]$ и множеством симплексов

$$\sigma = \sigma_1 \times \{1\} \cup \sigma_2 \times \{2\} \ldots \cup \sigma_n \times \{n\},$$

где $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ — попарно дизъюнктные симплексы K.

Пространство EG_N изоморфно как симплициальный комплекс *вырезанному* n-кратному джойну $N-1$-мерного симплекса $(\Delta^{N-1})^{*n}_{\Delta}$. Группа G действует на джойне перестановками сомножителей.

Аналогично строится конфигурационное пространство для цветной теоремы Тверберга. Сначала рассмотрим симплициальный комплекс $K(s,t)$, множество вершин которого равно $[s]\times[t]$, первая координата даёт цвет вершины. Симплексы $K(s,t)$ — это такие подмножества $K(s,t)$, которые содержат не более одной вершины каждого цвета.

Конфигурационным пространством для цветной теоремы Тверберга будет r-кратный вырезанный джойн $L(s,t,r) = K(s,t)^{*r}_{\Delta}$. Это пространство $rs-2$-связно при условии $t \geq 2r-1$ (см. [67]), а значит, по лемме 2.17, отображение

$$\Lambda_p(k) \to H^*_G(L(s,t,r), Z_p)$$

инъективно в размерностях $\leq rs-1$.

4.2 Теорема Тверберга для трансверсалей

Сформулируем гипотезу Тверберга о трансверсалях.

Гипотеза 4.1. *Пусть* $0 \leq m \leq d-1$ *и* $S_0, S_1, \dots, S_m$ — $m+1$ *конечное множество в* $\mathbb{R}^d$, *такое что* $|S_i| = (r_i - 1)(d-m+1)+1$. *Тогда каждое множество* S_i *можно разделить на* r_i *частей* $S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{ir_i}$ *так что все выпуклые оболочки* $\{\operatorname{conv} S_{ij}\}_{i,j}$ *можно пересечь одной* m*-плоскостью.*

Действуя аналогично работам [69, 62], докажем частный случай этой гипотезы в более общей топологической формулировке. Напомним определение

Определение. *Носителем* точки x в симплициальном комплексе K назовём минимальную грань K, содержащую x.

Теорема 4.1. *Пусть $0 \le m \le d-1$ и числа r_i $(i = 0, \dots, m)$ являются степенями одного и того же простого числа $r_i = p^{k_i}$. Если p нечётно, потребуем, чтобы $d-m$ было чётным.*

Пусть для каждого $i = 0, \dots, m$ f_i отображает непрерывно $(r_i - 1)(d-m+1)$-мерный симплекс $\Delta_i = \Delta^{(r_i-1)(d-m+1)}$ в пространство $\mathbb{R}^d$.

Тогда на каждом симплексе Δ_i найдётся r_i точка $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ir_i} \in \Delta_i$ с попарно непересекающимися носителями так, что все $\{f_i(x_{ij})\}_{i,j}$ содержатся в одной m-плоскости.

Доказательство. Пусть для $i = 0, \dots, m$ $G_i = (Z_p)^{k_i}$, $N_i = (r_i - 1)(d-m+1)+1$.

Обозначим $l = d-m$. Если p нечётно, будем рассматривать ориентированный грассманиан, для $p = 2$ будем рассматривать неориентированный.

Будем рассматривать наборы по r_i точек в каждом Δ_i, так чтобы все точки имели попарно непересекающиеся носители. Для построения конфигурационного пространства естественно рассмотреть r_i-кратные вырезанные джойны $EG_{N_i} = (\Delta^{N_i-1})^{*r_i}_{\Delta}$ в качестве соответствующих конфигурационных пространств, следуя [44].

Для всякого l-мерного линейного подпространства $V \subseteq \mathbb{R}^d$ рассмотрим отображение вырезанных джойнов

$$h_{i,V} : EG_{N_i} \to J_A^{r_i}(V),$$

которое является джойном отображения f_i, так как $J_A^{r_i}(V)$ содержит r_i-кратный джойн V.

Ясно, что отображения $h_{i,V}$ эквивариантны относительно действия G_i. Возьмём декартово произведение всех этих отображений и получим $G = G_0 \times \dots \times G_m$-эквивариантное отображение

$$h_{0,V} \times \dots \times h_{m,V} : EG_{N_0} \times \dots \times EG_{N_m} \to J_A^{r_0}(V) \oplus \dots \oplus J_A^{r_m}(V).$$

Рассмотрев зависимость отображения $h_{0,V} \times \dots \times h_{m,V}$ от $V \in G_d^l$, мы получаем эквивариантное сечение G-векторного расслоения

$$\pi_\xi : \xi = J_A^{r_0}(\gamma) \oplus \dots \oplus J_A^{r_m}(\gamma) \to EG_{N_0} \times \dots \times EG_{N_m} \times G_d^l.$$

Рассмотрим разложение

$$\xi = D_A^{r_0}(\gamma) \oplus \dots \oplus D_A^{r_m}(\gamma) \oplus (m+1)\gamma.$$

Кроме того, с помощью диагонального вложения $\gamma \to (m+1)\gamma$ имеем разложение $(m+1)\gamma = \gamma_\Delta \oplus \eta$. Далее выбираем некоторый изоморфизм между η и $m\gamma$, в матричной форме он может задаваться некоторым ортогональным базисом в ортогональном дополнении вектора $(1, \dots, 1)$ в $\mathbb{R}^{m+1}$.

Обозначим

$$\pi_\zeta : \zeta = D_A^{r_0}(\gamma) \oplus \dots \oplus D_A^{r_m}(\gamma) \oplus \eta \to EG_{N_0} \times \dots \times EG_{N_m} \times G_d^l.$$

Заметим, что требуется доказать, что построенное выше сечение расслоения в проекции на ζ имеет нуль. Действительно, в этом случае получим некоторое V и $m+1$ точку $y_i \in EG_{N_i}$. Вспомнив описание EG_{N_i} через вырезанный джойн, получим, что для $i = 0, \dots, m$ y_i является аффинной комбинацией

$$y_i = c_{i1}x_{i1} \oplus \dots \oplus c_{ir_i}x_{ir_i}$$

точек из Δ_i с попарно непересекающимися носителями. Условие наличия нуля у сечения эквивалентно тому, что для всех i и j $c_{ij} = \dfrac{1}{r_i}$ и проекции $f_i(x_{ij})$ на V дают одну и ту же точку v. Рассматривая m-плоскость в $\mathbb{R}^d$ ортогональную V в точке v, получаем требуемое.

Теперь остаётся показать, что класс Эйлера

$$e(\zeta) \in H_G^*(EG_{N_0} \times \dots \times EG_{N_m} \times G_d^l, Z_p)$$

не равен нулю. По лемме 3.3 $e(\eta) \neq 0 \in H^*(G_d^l, Z_p)$. Также рассматривая вложение с фиксированным $V \in G_d^l$

$$g : EG_{N_0} \times \dots \times EG_{N_m} \to EG_{N_0} \times \dots \times EG_{N_m} \times G_d^l$$

мы получаем индуцированное расслоение

$$\beta = g^*(D_A^{r_0}(\gamma) \oplus \dots \oplus D_A^{r_m}(\gamma)) \to EG_{N_0} \times \dots \times EG_{N_m},$$

являющееся произведением G_i-расслоений над соответствующими EG_{N_i}, причём каждое расслоение соответствует представлению G_i в $D_A^{r_i}(V)$. Так как $\dim D_A^{r_i}(V) = N_i - 1$, по леммам 2.11 и 2.17 каждое из этих расслоений имеет ненулевой класс Эйлера в $H^*(EG_{N_i}, Z_p)$, далее лемма 2.8 и формула Кюннета дают

$$e(\beta) \neq 0 \in H_G^*(EG_{N_0} \times \dots \times EG_{N_m}, Z_p).$$

Теперь используя формулу Кюннета для $(EG_{N_0} \times \dots \times EG_{N_m})/G \times G_d^l$, получаем что

$$e(D_A^{r_0}(\gamma) \oplus \dots \oplus D_A^{r_m}(\gamma)) = e(\beta) \times 1 + \sum u \times v,$$

где $u \in H_G^*(EG_{N_0} \times \dots \times EG_{N_m}, Z_p)$, $v \in H^*(G_d^l, Z_p)$ и для всех v размерность $\dim v > 0$.

Теперь по правилу произведения для классов Эйлера

$$e(\zeta) = e(D_A^{r_0}(\gamma) \oplus \dots \oplus D_A^{r_m}(\gamma))e(\eta) = e(\beta) \times e(\eta) + \sum u \times ve(\eta) \neq 0$$

в когомологиях $H_G^*(EG_{N_0} \times \dots \times EG_{N_m} \times G_d^l, Z_p)$. □

4.3 Теоремы типа Ван-Кампена-Флореса для плоских трансверсалей

В этом разделе обобщаются результаты статьи [69], и теорема о невложимости Ван-Кампена-Флореса [60, 22]. Вместо существования совпадающих точек отображения доказывается, что при некоторых условиях некоторое множество точек лежит на одной и той же k-плоскости.

Определение. Для всякого топологического пространства X обозначим $X^2_\Delta = X \times X \setminus \Delta(X)$ — *вырезанный квадрат* X.

Также для симплициального комплекса K будем рассматривать определённый ранее вырезанный джойн K^{*2}_Δ.

На пространствах X^2_Δ и K^{*2}_Δ действует группа Z_2 перестановками сомножителей. Как хорошо известно (см. например книгу [44]), один из способов доказать, что топологическое пространство X не допускает вложений в $\mathbb{R}^n$ — это доказать, что $\operatorname{hind} X^2_\Delta \geq n$. Аналогично, для симплициального комплекса K достаточно показать, что $\operatorname{hind} K^{*2}_\Delta \geq n+1$.

Теперь сформулируем аналоги предыдущего рассуждения для плоских трансверсалей.

Теорема 4.2. *Пусть $X_0, X_1, \dots, X_m$ — топологические пространства, причём для каждого $i = 0, \dots, m$ $\operatorname{hind}(X_i)^2_\Delta \geq d - m$. Пусть для каждого $i = 0, \dots, m$ задано непрерывное отображение $f_i : X_i \to \mathbb{R}^d$. Тогда найдётся $m+1$ пара различных точек $x_i, y_i \in X_i$, такая что все точки $\{f_i(x_i), f_i(y_i)\}_{i=0}^m$ можно пересечь одной m-плоскостью в $\mathbb{R}^d$.*

Теорема 4.3. *Пусть $K_0, K_1, \dots, K_m$ — симплициальные комплексы, причём для каждого $i = 0, \dots, m$ $\operatorname{hind}(K_i)^{*2}_\Delta \geq d - m + 1$. Пусть для каждого $i = 0, \dots, m$ задано непрерывное отображение $f_i : K_i \to \mathbb{R}^d$. Тогда найдётся $m+1$ пара различных точек $x_i, y_i \in K_i$ с непересекающимися носителями, образы которых $\{f_i(x_i), f_i(y_i)\}_{i=0}^m$ можно пересечь одной m-плоскостью в $\mathbb{R}^d$.*

Например, если рассмотреть d-мерный скелет $2d+2$-мерного симплекса $K = \Delta^d_{2d+2}$, то $\operatorname{hind}(K^{*2}_\Delta) = 2d+1$. Это доказано в книге [44] для рода, но для индекса все рассуждения проходят так же.

Из этого факта следует обобщение теоремы Ван-Кампена-Флореса [60, 22], которая является случаем $m = 0$ следующего утверждения.

Следствие 4.4. *Если даны $m+1$ непрерывное отображение $f_i : \Delta^d_{2d+2} \to \mathbb{R}^{2d+m}$, то найдутся $m+1$ пара точек $x_i, y_i \in \Delta^d_{2d+2}$ с непересекающимися носителями в каждой паре, так что образы $\{f_i(x_i), f_i(y_i)\}_{i=0}^m$ можно пересечь одной m-плоскостью в $\mathbb{R}^{2d+m}$.*

В доказательствах обозначим $l = d - m$.

Доказательство теоремы 4.2. Рассмотрим некоторое l-подпространство V в $\mathbb{R}^d$ и обозначим ортогональную проекцию на него за π_V. Для каждого $i = 0, \dots, m$ рассмотрим отображение $s_{i,V} : (X_i)^2_\Delta \to V$, заданное как

$$s_{i,V}(x, y) = \pi_V(f_i(x)) - \pi_V(f_i(y)).$$

Это Z_2-эквивариантное отображение, если считать, что Z_2 действует на V как $x \mapsto -x$ (антиподально). Произведение этих отображений по индексам $i = 0, \dots, m$ даёт отображение

$$s_V : (X_0)^2_\Delta \times \dots \times (X_m)^2_\Delta \to V \oplus \dots \oplus V = (m+1)V.$$

Также рассмотрим отображения $t_{i,V} : (X_i)^2_\Delta \to V$, заданные формулами

$$t_{i,V}(x, y) = \pi_V(f_i(x)) + \pi_V(f_i(y)),$$

и произведение этих отображений $t_V : (X_0)^2_\Delta \times \dots \times (X_m)^2_\Delta \to (m+1)V$. Пространство $(m+1)V$ раскладывается на свою диагональ (образ диагонального вложения $\mathrm{id}^{m+1} : V \to (m+1)V$) и ортогональное дополнение к ней $(m+1)V = V_\Delta \oplus W$. Рассматривая композицию t_V с проекцией на W, получаем отображение $u_V : (X_0)^2_\Delta \times \dots \times (X_m)^2_\Delta \to W$.

Далее рассмотрим отображение

$$s_V \oplus u_V : (X_0)^2_\Delta \times \dots \times (X_m)^2_\Delta \to (m+1)V \oplus W,$$

это отображение можно считать сечением векторного расслоения $\xi \oplus \eta = (m+1)\gamma \oplus m\gamma$ над $(X_0)^2_\Delta \times \dots \times (X_m)^2_\Delta \times G^l_d$.

Здесь используется некоторый изоморфизм расслоения η, возникающий из пространств W и $m\gamma$.

Рассматриваемое сечение эквивариантно относительно действия $G = (Z_2)^{m+1}$ на $\xi \oplus \eta = (m+1)\gamma \oplus m\gamma$ антиподальными отображениями на первом $m+1$ слагаемом.

Если это сечение имеет нуль, то проекции соответствующих точек $\{f_i(x_i), f_i(y_i)\}_{i=0}^m$ на V совпадают и теорема доказана.

Посчитаем класс Эйлера. По лемме 3.3

$$e(\eta) = e(\gamma)^m \neq 0 \in H^{m(d-m)}(G^l_d, Z_2).$$

Фиксируя $V \in G^l_d$, получаем отображение

$$(X_0)^2_\Delta \times \dots \times (X_m)^2_\Delta \to (X_0)^2_\Delta \times \dots \times (X_m)^2_\Delta \times G^l_d$$

которое индуцирует расслоение ξ' над $(X_0)^2_\Delta \times \dots \times (X_m)^2_\Delta$.

Используя формулу Кюннета, мультипликативность класса Эйлера, и оценку индекса $(X_i)^2_\Delta$, получаем

$$e(\xi') = u^l \times \dots \times u^l \neq 0 \in H_G^{l(m+1)}((X_0)^2_\Delta \times \dots \times (X_m)^2_\Delta, Z_2).$$

По формуле Кюннета класс $e(\xi)$ в $H^*_G((X_0)^2_\Delta \times \dots \times (X_m)^2_\Delta \times G^l_d, Z_2)$ имеет вид $e(\xi) = e(\xi') \times 1 + \sum a \times b$, где все размерности $\dim b > 1$.

Теперь по свойству мультипликативности $e(\xi \oplus \eta) = e(\xi') \times e(\eta) + \sum a \times b e(\eta) \neq 0$. □

Доказательство теоремы 4.3. Доказательство в основном повторяет все рассуждения из предыдущего доказательства, поэтому приведём только отличия.

Вместо отображений $s_{i,V}$ и $t_{i,V}$ рассмотрим отображение $r_{i,V} : (K_i)^{*2}_\Delta \to V \oplus V \oplus L = J^2_A(V)$. Здесь L — одномерное пространство.

Это отображение явно задаётся как

$$r_{i,V}(tx \oplus (1-t)y) = t\pi_V(f_i(x)) \oplus (1-t)\pi_V(f_i(y)) \oplus (t - 1/2).$$

Оно очевидно эквивариантно относительно Z_2-действия на $(K_i)^{*2}_\Delta$ и Z_2-действия на $V \oplus V \oplus L$ перестановками слагаемых V и антиподального на L.

Рассматриваемое пространство $V \oplus V \oplus L$ раскладывается как $U_i \oplus W_i$, причём Z_2 действует антиподально на $l+1$-мерном пространстве U_i и тривиально на l-мерном пространстве W_i.

Мы берём произведение отображений r_i и получаем отображение

$$r_V : (K_0)^{*2}_\Delta \times \cdots \times (K_m)^{*2}_\Delta \to (U_0 \oplus \cdots \oplus U_m) \oplus (W_0 \oplus \cdots \oplus W_m) = U \oplus W,$$

Далее раскладываем $W = W' \oplus V_\Delta$ с помощью диагонального отображения $V \to W$ и проецируем r_V на $U \oplus W'$. это отображение рассматривается как $G = (Z_2)^{m+1}$-эквивариантное сечение расслоения $\xi \oplus \eta$, где ξ соответствует U, а η соответствует W'.

По лемме 3.3 $e(\eta) \neq 0$ и остальное доказательство идентично доказательству теоремы 4.2. □

4.4 Цветная теорема Тверберга для трансверсалей

Определение. Пусть множество S раскрашено в n цветов (то есть отображено в $[n]$). Непустое подмножество $\sigma \subseteq S$ назовём *разноцветным*, если каждый цвет встречается в σ не более одного раза.

Теорема 4.5. *Пусть* p *— простое число,* $0 \le m \le d-1$ *и* $S_0, S_1, \dots, S_m$ *—* $m+1$ *конечное множество в* $\mathbb{R}^d$*. Если* $p \neq 2$*, потребуем, чтобы* $d-m$ *было чётным.*

Пусть числа r_i $(i = 0, \dots, m)$ *являются степенями* p*,* k *— число цветов и либо* $k = d-m+1$*, либо* $k < d-m+1$ *и для каждого* $i =$

$0, \dots, m$ $r_i \le \dfrac{d-m}{d-m+1-k}$. Положим также $t_i = 2r_i - 1$. Пусть для каждого $i = 0, \dots, m$ мощность $|S_i| = t_i k$ и пусть каждое S_i раскрашено в k цветов и каждый цвет встречается в S_i ровно t_i раз.

Тогда для каждого i можно найти r_i попарно непересекающихся разноцветных множества

$$P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{ir_i} \subseteq S_i,$$

так что все множества $\operatorname{conv} P_{ij}$ $(i = 0, \dots, m,\ j = 1, \dots, r_i)$ можно пересечь одной m-плоскостью.

Следующая теорема уточняет предыдущую для случая, когда некоторые $r_i = 2$.

Теорема 4.6. *Теорема 4.5 также верна, если $k = d + 1 - m$ и для тех r_i, которые равны 2, положить $t_i = 2$ вместо 3.*

Теоремы 4.5 и 4.6 являются прямыми обобщениями цветной теоремы Тверберга из [66, 67, 68].

Эти теоремы обобщают цветную теорему Тверберга так же, как результаты [69, 62] и теорема 4.1 обобщают обычную теорему Тверберга на m-трансверсали.

Из доказательства будет ясно, что конечные множества S_i можно заменить на непрерывные отображения симплициальных комплексов K_i (см. раздел 4.1) в $\mathbb{R}^d$, а множества $\operatorname{conv} P_{ij}$ можно заменить на образы соответствующих непересекающихся граней K_i. Иначе говоря, доказывается более строгая топологическая версию теорем 4.5 и 4.6, но полную формулировку не приводим из-за чрезмерной громоздкости.

Также, как и в цветной теореме Тверберга, естественно задать вопрос, можно ли уменьшить число $t = 2r - 1$ в теореме 4.5, в частности, можно ли положить $t = r$ для $r \ne 2$. Цветная теорема Тверберга для $t = r \ne 2$ доказана в [5] лишь для двумерного случае и нетопологическим методом, который не распространяется на большие размерности.

Доказательство теоремы 4.5. Доказательство этой теоремы очень похоже на доказательство теоремы 4.1.

Пусть $r_i = p^{k_i}$ и для всех $i = 0, \dots, m$ положим $G_i = (Z_p)^{k_i}$. Для всякого множества S_i рассмотрим симплициальный комплекс разноцветных симплексов $K_i = K(k, t_i)$ (см. раздел 4.1) и r_i-кратный вырезанный джойн $L_i = K_{i\Delta}^{*r_i}$ с соответствующим G_i-действием.

Пусть $l = d - m$. Как и ранее, грассманиан считаем ориентированным для нечётных p.

Для каждого l-мерного линейного подпространства $V \subseteq \mathbb{R}^d$ рассмотрим естественное кусочно-линейное (в топологическом варианте теоремы — просто данное непрерывное) отображение $K_i \to \mathbb{R}^d$ и его проекцию $K_i \to V$. Возьмём r_i-кратный джойн этих отображений

$$h_{i,V} : L_i \to J_A^{r_i}(V),$$

Отображения $h_{i,V}$ эквивариантны относительно действия G_i. Произведение этих отображений даёт $G = G_0 \times \dots \times G_m$-эквивариантное отображение

$$h_{0,V} \times \dots \times h_{m,V} : L_0 \times \dots \times L_m \to J_A^{r_0}(V) \oplus \dots \oplus J_A^{r_m}(V).$$

В зависимости от подпространства $V \in G_d^l$ построенные отображения дают сечение расслоения

$$\pi_\xi : \xi = J_A^{r_0}(\gamma) \oplus \dots \oplus J_A^{r_m}(\gamma) \to L_0 \times \dots \times L_m \times G_d^l.$$

Рассмотрим разложение

$$\xi = D_A^{r_0}(\gamma) \oplus \dots \oplus D_A^{r_m}(\gamma) \oplus (m+1)\gamma$$

а также разложение, возникающее из диагонального вложение $\gamma \to (m+1)\gamma$ — $(m+1)\gamma = \gamma_\Delta \oplus \eta$. Как и в предыдущих доказательствах можно отождествить $\eta = m\gamma$.

Обозначим расслоение

$$\pi_\zeta : \zeta = D_A^{r_0}(\gamma) \oplus \dots \oplus D_A^{r_m}(\gamma) \oplus \eta \to L_0 \times \dots \times L_m \times G_d^l.$$

Если наше сечение в проекции на ζ имеет нуль, то доказательство завершено, также, как в теореме 4.1.

Посчитаем класс Эйлера

$$e(\zeta) \in H_G^*(L_0 \times \dots \times L_m \times G_d^l, Z_p).$$

По лемме 3.3 $e(\eta) \neq 0 \in H^*(G_d^l, Z_p)$, и вложение с фиксированным $V \in G_d^l$

$$g : L_0 \times \dots \times L_m \to L_0 \times \dots \times L_m \times G_d^l$$

индуцирует расслоение

$$\beta = g^*(D_A^{r_0}(\gamma) \oplus \dots \oplus D_A^{r_m}(\gamma)) \to L_0 \times \dots \times L_m,$$

которое является декартовым произведением G_i-расслоений над L_i. Каждое G_i-расслоение возникает из представления G_i в $D_A^{r_i}(V)$. Так как $\dim D_A^{r_i}(V) = (r_i - 1)(d - m + 1)$, построение пространства L_i и условия теоремы дают неравенство

$$r_i k - 1 \geq (r_i - 1)(d - m + 1),$$

и из замечания в разделе 4.1 следует, что каждое из этих расслоений имеет ненулевой класс Эйлера в $H^*(L_i, Z_p)$. По формуле Кюннета и свойству мультипликативности класса Эйлера

$$e(\beta) \neq 0 \in H_G^*(L_0 \times \dots \times L_m, Z_p).$$

Ещё раз используя формулу Кюннета для $(L_0 \times \dots \times L_m)/G \times G_d^l$, получаем, что

$$e(D_A^{r_0}(\gamma) \oplus \dots \oplus D_A^{r_m}(\gamma)) = e(\beta) \times 1 + \sum u \times v,$$

где $u \in H^*_G(L_0 \times \dots \times L_m, Z_p)$, $v \in H^*(G^l_d, Z_p)$ и для всех v размерность $\dim v > 0$.

И ещё раз применяя мультипликативность класса Эйлера, получаем

$$e(\zeta) = e(D^{r_0}_A(\gamma) \oplus \dots \oplus D^{r_m}_A(\gamma))e(\eta) = e(\beta) \times e(\eta) + \sum u \times ve(\eta) \neq 0$$

в когомологиях $H^*_G(L_0 \times \dots \times L_m \times G^l_d, Z_p)$. □

Доказательство теоремы 4.6. Отметим только отличия от предыдущего доказательства.

Пусть для некоторого i выполняется равенство $r_i = t_i = 2$. В этом случае S_i имеет естественное $G_i = Z_2$-действие, которое переставляет любые две вершины одного и того же цвета. Это даёт свободное действие G_i на самом пространстве K_i, поэтому можно заменить $L_i = K_i$. Также легко заметить, что K_i гомеоморфно границе k-мерного кроссполитопа (многомерного октаэдра), значит K_i — это $k - 1$-мерная ($d - m$-мерная) сфера.

Для случаев $r_i = 2$ вместо отображения

$$h_{i,V} : L_i \to J^2_A(V)$$

возьмём отображение

$$h_{i,V} : K_i \to V \oplus V,$$

заданное как $x \in K_i \mapsto \pi(x) \oplus \pi(-x)$, знак минус означает действие Z_2. Это отображение Z_2-эквивариантно, если действие на $V \oplus V$ задано перестановками слагаемых.

Соответственно, вместо проекции $J^2_A(V) \to D^2_A(V)$ рассматриваем проекцию $V \oplus V \to V$, заданную как $v_1 \oplus v_2 \mapsto v_1 - v_2$. Пространство V, в которое происходит это отображение, имеет антиподальное действие Z_2 и точка $x \in K_i$ отображается в нуль в V тогда и только тогда, когда проекции x и $-x$ на V совпадают.

Пространство V имеет ненулевой класс Эйлера в $H^{d-m}_{Z_2}(\mathrm{pt}, Z_2)$, а значит и в $H^{d-m}_{Z_2}(K_i, Z_2)$.

Остальная часть доказательства проходит без изменений. $\square$

4.5 Формулировки теорем о центральной точке

Мы будем формулировать двойственные теоремы о центральной точке для случая мер и для случая конечных множеств. Сначала сформулируем двойственную теорему о центральной точке конечного множества.

Теорема 4.7. *Пусть в $\mathbb{R}^d$ дано семейство $\mathcal{F}$ из n гиперплоскостей общего положения. Тогда найдётся точка x такая, что всякий проходящий через неё луч пересекает как минимум $\left\lfloor \frac{n+d}{d+1} \right\rfloor$ гиперплоскостей из $\mathcal{F}$.*

Под общим положением семейства гиперплоскостей в $\mathbb{R}^d$ подразумевается, что пересечение любых $k \leq d$ гиперплоскостей является $d-k$-плоскостью, а любые $d+1$ и более не имеют общей точки.

Множество k-плоскостей в $\mathbb{R}^d$ будем отождествлять с γ_d^{d-k}.

Определение. Множество k-плоскостей, пересекающих данное множество $X \subseteq \mathbb{R}^d$ обозначим $I(X, k)$.

Сформулируем двойственную теорему о центральной точке для мер.

Теорема 4.8. *Пусть на многообразии гиперплоскостей γ_d^1 задана абсолютно непрерывная вероятностная мера μ с компактным носителем. Тогда найдётся точка x такая, что для всякого луча r с* *началом в x*

$$\mu(I(r, d-1)) \geq \frac{1}{d+1}.$$

Определение. *k-полуплоскостью* в $\mathbb{R}^d$ называется непустое собственное подмножество некоторой k-плоскости L, выделяемое некоторым линейным неравенством $l(x) \geq 0$. При этом $k-1$-плоскость $\{x \in L : l(x) = 0\}$ называется краем полуплоскости.

Сформулируем также теорему, двойственную для теоремы о центральной трансверсали из [65, 81, 82].

Теорема 4.9. *Пусть на множестве γ_d^{d-k} задано $d-k$ абсолютно непрерывных вероятностных мер $\mu_1, \dots, \mu_{d-k}$ с компактными носителями. Тогда найдётся $d-k-1$-плоскость L такая, что для всякой $d-k$-полуплоскости M с краем L и любого $i = 1, \dots, d-k$*

$$\mu_i(I(M, k)) \geq \frac{1}{k+2}.$$

Из теоремы 4.7 выводится двойственная теорема Тверберга (см. [58]) на плоскости.

Следствие 4.10. *Пусть на плоскости дано семейство из $3n$ прямых общего положения. Тогда их можно разбить на тройки так, что все треугольники, образованные тройками, имеют общую точку.*

Дальнейшие двойственные аналоги теоремы Тверберга см. в разделе 4.8.

4.6 Сведения о мерах и их центральных точках

По теореме Радона-Никодима (см. [101]) абсолютно непрерывные меры в $\mathbb{R}^d$ задаются функцией плотности класса L_1, для многообразий будем рассматривать такие меры, которые в каждой координатной окрестности задаются плотностью класса L_1.

Далее в этой работе будут рассматриваться только абсолютно непрерывные меры на многообразии, для которых мера всего многообразия конечна.

В этом разделе будут даны несколько определений и доказаны несколько технических лемм о мерах. Возможно, в некоторых случаях терминология будет отличаться от стандартной.

Определение. Пусть P — топологическое пространство. Будем говорить, что мера μ_p на многообразии *непрерывно зависит* от параметра $p \in P$, если для всякого открытого множества U число $\mu_p(U)$ непрерывно зависит от p.

Определение. *Носителем* меры μ на многообразии X назовём множество

$$\operatorname{supp} \mu = \{x \in X : \mu(U) > 0 \text{ для любой окрестности } U \ni x\}.$$

Носитель меры, очевидно, замкнут.

Определение. Для всякого локально-тривиального расслоения многообразий $f : X \to Y$ мера μ с компактным носителем на X определяет *проекцию меры* $f_*\mu$ на Y по формуле

$$f_*\mu(A) = \mu(f^{-1}(A)).$$

Лемма 4.11. *Мера $f_*\mu$ локально задаётся функцией класса L_1 и если μ_p непрерывно зависит от p, то $f_*\mu_p$ тоже непрерывно зависит от p.*

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы Фубини (см. [101]), второе выполняется по определению непрерывности. □

Определение. На множестве непрерывных отображений многообразий $f : X \to Y$ определим *компактно-открытую* топологию следующим образом: базой открытых множеств будут множества

$$U_{K,V} = \{f : X \to Y : f(K) \subseteq V\}$$

для всякого компакта $K \subseteq X$ и открытого множества $V \subseteq Y$.

Лемма 4.12. *Пусть P — топологическое пространство, семейство отображений многообразий $f_p : X \to Y$ непрерывно зависит от параметра $p \in P$ и каждое f_p является локально тривиальными расслоением.*

Тогда для всякой меры μ с компактным носителем на X меры $f_{p*}\mu$ непрерывно зависят от p.

Доказательство. Пусть $C = \operatorname{supp} \mu$. Тогда для всякого параметра q можно взять относительно компактную окрестность $V \supseteq f_q(C)$ и по определению компактно-открытой топологии найдётся такая окрестность множества параметров $U \ni q$, что $f_p(C) \subseteq V$, значит можно считать, что носители проекций мер лежат в одном и том же компакте.

Возьмём некоторое открытое множество $W \subseteq Y$ и докажем, что $\mu(f_p^{-1}(W))$ непрерывно зависит от p в точке q. По сказанному выше, можно считать, что W относительно компактно. Возьмём $W' = f_q^{-1}(W)$ и найдём такой компакт C_1 и открытое множество C_2, что $C_1 \subseteq W' \subseteq \operatorname{cl} W' \subseteq C_2 \cap C \subseteq C$ и

$$|\mu(C_1) - \mu(W')|, |\mu(C_2) - \mu(W')| < \varepsilon.$$

Это можно сделать, там как мера μ задаётся функцией класса L_1.

Тогда $f_p(C_1) \subseteq W$ и $f_p(C \setminus C_2) \cap \operatorname{cl} W = \emptyset$ для p из некоторой окрестности q по определению компактно-открытой топологии. Но тогда и множества $f_p^{-1}(W)$ заключены между C_1 и C_2, а значит их меры отличаются от $\mu(W')$ не более чем на ε. $\square$

Мы усилим предыдущую лемму на случай, когда отображения являются локально тривиальными расслоениями почти всюду, почти всюду непрерывно зависящими от параметра.

Лемма 4.13. *Пусть дано топологическое пространство P и семейство отображений $f_p : X \setminus S_p \to Y$, где для всякого $p \in P$ множество S_p замкнуто, каждое f_p является локально тривиальными расслоением на своём множестве определения. Пусть дана мера μ с компактным носителем на X и для всякой $q \in P$ выполняется условие: для каждого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U \ni q$ такая что $\mu(\bigcup_{p\in U} S_p) < \varepsilon$.*

Также предположим, что для всякого U из предыдущего условия отображение f_p, ограниченное на $X \setminus \bigcup_{p\in U} S_p$, непрерывно зависит от $p \in U$. Тогда меры $f_{p*}\mu$ непрерывно зависят от $p \in P$.

Доказательство. Для всякой $q \in P$ выкинем $\bigcup_{p\in U} S_p$ из X и воспользуемся леммой 4.12. Далее заметим, что получившиеся меры отличаются от исходной не более чем на ε и получим требуемое переходом $\varepsilon \to 0$. □

Определение. Меру назовём *связной*, если ее носитель связен.

Определение. Мера μ с компактным носителем в $\mathbb{R}^d$ 1-*выпукла*, если носитель ее проекции на любую прямую связен.

Определение. *Полосой* в $\mathbb{R}^d$ назовём пространство между двумя параллельными гиперплоскостями, включая эти гиперплоскости. Толщиной полосы назовём расстояние между гиперплоскостями.

Докажем леммы о мерах полос и полупространств.

Лемма 4.14. *Пусть в $\mathbb{R}^d$ дано семейство вероятностных мер $\{\mu_p\}_{p\in P}$, непрерывно параметризуемых компактом P. Пусть носители всех мер лежат в одном и том же компакте. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$*

найдётся такое $\delta > 0$, что для любой полосы L толщины $< \delta$ и любого $p \in P$

$$\mu_p(L) < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть все носители мер лежат в множестве S.

Предположим противное, тогда найдётся последовательность полос L_i и значений параметра p_i, при этом толщина полос стремится к нулю, а их меры $\mu_{p_i}(L_i) > \varepsilon$. Так как все полосы задевают S, то их множество компактно, то есть можно считать, что они приближаются к некоторой гиперплоскости H. Параметры p_i также можно считать стремящимися к некоторому p. Возьмём теперь такое δ, чтобы мера $\mu_p(H + B_\delta)$ (δ-окрестности H) была меньше $\varepsilon/2$. Множества $L_i \cap S$ при достаточно большом i лежат в $H + B_\delta$, а меры $\mu_{p_i}(H + B_\delta)$ стремятся к числу, меньшему $\varepsilon/2$, что приводит к противоречию. □

Лемма 4.15. *Пусть в $\mathbb{R}^d$ дано семейство вероятностных мер $\{\mu_p\}_{p\in P}$ и носители всех мер лежат в одном и том же компакте. Тогда мера полупространства $\mu_p(H)$ непрерывно зависит от пары (p, H).*

Полупространство можно задать соотношением $(n, x) \geq d$, таким образом полупространства параметризуются множеством $S^{d-1} \times \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть все носители мер лежат в компакте S.

Рассмотрим последовательность полупространств $H_i \to H$ и значений параметра $p_i \to p$. Если H задаётся неравенством

$$(n, x) \geq d,$$

то положим

$$H_\delta^- = \{x \in \mathbb{R}^d : (n, x) \geq d + \delta\}, \quad H_\delta^+ = \{x \in \mathbb{R}^d : (n, x) \geq d - \delta\}.$$

При достаточно малом δ меры $\mu_p(H_\delta^+)$, $\mu_p(H_\delta^-)$ и $\mu_p(H)$ отличаются не более, чем на ε. Более того, начиная с некоторого значения индекса i будем иметь

$$S \cap H_\delta^- \subseteq S \cap H_i \subseteq S \cap H_\delta^+.$$

Также при достаточно больших i разности $\mu_{p_i}(H)-\mu_p(H)$, $\mu_{p_i}(H_\delta^-)-\mu_p(H_\delta^-)$ и $\mu_{p_i}(H_\delta^+)-\mu_p(H_\delta^+)$ не превосходят по модулю ε.

Отсюда следует, что меры $\mu_{p_i}(H_i)$ отличаются от $\mu_p(H)$ не более чем на 2ε для достаточно больших i. ☐

Лемма 4.16. *Пусть в* $\mathbb{R}^d$ *дано семейство вероятностных мер* $\{\mu_p\}_{p\in P}$*. Пусть носители всех мер лежат в одном и том же компакте. Тогда функция*

$$f_p(y) = \min_{H\ni y} \mu_p(H),$$

в которой минимум берётся по полупространствам H*, непрерывно зависит от* p *и* y*.*

Доказательство. Ясно, что в этом минимуме можно считать, что H содержит y на своей границе. Тогда H в определении функции можно параметризовать компактом — $d-1$-мерной сферой.

Остаётся заметить, что по лемме 4.15 выражение под знаком минимума непрерывно на $P\times\mathbb{R}^d\times S^{d-1}$, а минимум берётся по компакту S^{d-1}, значит и результат непрерывен. ☐

Определение. Точка x называется *центральной точкой вероятностной меры* μ с компактным носителем в $\mathbb{R}^d$, если

$$\mu(H) \geq \frac{1}{d+1}$$

для любого полупространства $H \ni x$. Обозначим множество центральных точек μ — $\operatorname{cent}\mu$, оно непусто в силу теоремы о центральной точке из [46, 49].

Определение. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^d$ — некоторое множество *ε-окрестностью* X назовём множество

$$U_\varepsilon(X) = \{y \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}(y, X) < \varepsilon\}.$$

Лемма 4.17. *Пусть μ — вероятностная мера с компактным носителем в $\mathbb{R}^d$. Тогда $\operatorname{cent}\mu$ — это либо выпуклое тело с непустой внутренностью, либо одна точка.*

Доказательство. Заметим, что

$$\operatorname{cent}\mu = \bigcap\{H : H\text{— полупространство и } \ \mu(H) \geq \frac{d}{d+1}\}.$$

Множество $\operatorname{cent}\mu$ — ограниченное пересечение полупространств, то есть выпуклый компакт. Назовём полупространство H плохим, если $\mu(H) \leq \dfrac{1}{d+1}$.

Всякая точка $y \notin \operatorname{cent}\mu$ лежит внутри некоторого плохого полупространства. Устремляя точку y к некоторой точке $x \in \operatorname{bd}(\operatorname{cent}\mu)$ из компактности множества нормалей полупространств и леммы 4.15 получим, что x также лежит в некотором плохом полупространстве.

Предположим, что внутренность $\operatorname{cent}\mu$ пуста и $\operatorname{cent}\mu$ не является одной точкой. Тогда обозначим аффинную оболочку $\operatorname{cent}\mu$ за L. Из предыдущего абзаца ясно, что $\mathbb{R}^d$ покрыто плохими полупространствами, край которых содержит L, обозначим их семейство $\mathcal{H}$.

Рассмотрим факторпространство $\mathbb{R}^d/L$ и проекцию меры μ на него. Применим лемму 4.14 к мере μ и числу $\varepsilon < \dfrac{1}{d(d+1)}$, получим соответствующее δ. Теперь рассмотрим проекции на $\mathbb{R}^d/L$ дополнений δ-окрестностей полупространств $\mathcal{H}$, пусть они образуют семейство замкнутых полупространств $\mathcal{G}$. Семейство $\mathcal{H}$ покрывает $\mathbb{R}^d/L$, следовательно семейство $\mathcal{G}$ имеет пустое пересечение, значит некоторые d или менее полупространств из $\mathcal{G}$ имеют пустое пересечение по теореме Хелли. Рассмотрев соответствующие им плохие полупространства из $\mathcal{H}$ найдём, что $\mathbb{R}^d$ покрыто ими и ещё не более чем d полосами толщины δ, но это невозможно, так как тогда получим

$$\mu(\mathbb{R}^d) < \frac{d}{d+1} + d\varepsilon < 1,$$

противоречие. □

Лемма 4.18. *Пусть семейство* 1*-выпуклых вероятностных мер с компактными носителями* μ_p *в* $\mathbb{R}^d$ *непрерывно зависит от параметра* $p \in P$ *и все носители мер не выходят за пределы фиксированного компакта. Тогда для любого параметра* $q \in P$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует окрестность* $U \ni q$ *такая, что для любого* $p \in U$

$$\operatorname{cent} \mu_p \subseteq U_\varepsilon(\operatorname{cent} \mu_q).$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{cent} \mu_q = C$.

Возьмём $\varepsilon > 0$, для всякой точки $y \notin U_\varepsilon(C)$ найдётся полупространство H, такое что $H \cap C = \emptyset$, $y \in \operatorname{int} H$ и $\mu_q(H) = \dfrac{1}{d+1}$, Из 1-выпуклости меры следует, что можно считать $\mu_q(H) < \dfrac{1}{d+1}$. Обозначим

$$f_q(y) = \min_{H \ni y} \mu_q(H),$$

эта функция непрерывна по лемме 4.16. Заметим, что $f_q(y) < \dfrac{1}{d+1}$ на $\mathbb{R}^d \setminus U_\varepsilon(C)$. Так как $f_q(y) = 0$ за пределами выпуклой оболочки носителя μ_q и эта функция непрерывно зависит от точки y, то она достигает максимум на $\mathbb{R}^d \setminus U_\varepsilon(C)$ и этот максимум меньше $\dfrac{1}{d+1}$. Значит неравенство $f_p(y) < \dfrac{1}{d+1}$ сохранится для $y \in \mathbb{R}^d \setminus U_\varepsilon(C)$ для некоторой окрестности точки q в множестве параметров. □

Лемма 4.19. *Пусть семейство* 1*-выпуклых вероятностных мер с компактными носителями* μ_p *в* $\mathbb{R}^d$ *непрерывно зависит от параметра* $p \in \mathbb{R}^k$ *и для некоторого компакта* $K \subset \mathbb{R}^d$ *и любого* p *носитель* $\operatorname{supp} \mu_p \subseteq K$*. Тогда для любого параметра* $q \in \mathbb{R}^k$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует окрестность* $U \ni q$ *такая, что для любого* $p \in U$

$$U_\varepsilon(\operatorname{cent} \mu_p) \supseteq \operatorname{cent} \mu_q.$$

Доказательство. Если $\operatorname{cent} \mu_q$ — одна точка, то лемма следует из леммы 4.18. Иначе $C = \operatorname{cent} \mu_q$ имеет непустую внутренность.

Рассмотрим выпуклое множество $C' \subset \operatorname{int} C$ такое, что $U_\varepsilon(C') \supseteq C$. Обозначим непрерывную по лемме 4.16 функцию

$$f_q(y) = \min_{H \ni y} \mu_q(H).$$

Из 1-выпуклости мер на C' f_q строго больше $\dfrac{1}{d+1}$. Значит, для некоторой окрестности $U \ni q$ при $p \in U$ это соотношение сохранится и $C' \subseteq \operatorname{cent} \mu_p$ для таких p. □

Итак, множество центральных точек непрерывно зависит от меры в метрике Хаусдорфа, если носители всех мер содержатся в одном и том же компакте и все меры 1-выпуклы.

4.7 Доказательства теорем о центральной точке

Следующая лемма обобщает одновременно теорему о центральной точке конечного множества и теорему Брауэра о неподвижной точке отображения.

Лемма 4.20. *Пусть в выпуклом компактном теле* $B \subset \mathbb{R}^d$ *заданы* n *отображений* $f_i : B \to \mathbb{R}^d$ $(i \in [n])$ *и*

$$l = \left\lfloor \frac{n+d}{d+1} \right\rfloor.$$

Пусть для всякой точки $x \in B$ *не более* $l-1$ *из точек* $f_i(x)$ *лежат за пределами* B. *Тогда найдётся* $x \in B$ *такая, что всякое полупространство* $H \ni x$ *содержит не менее* l *точек* $\{f_i(x)\}_{i\in[n]}$. *Иначе говоря,* x *является центральной точкой множества* $\{f_i(x)\}_{i\in[n]}$.

Доказательство. Для всякого $I \subseteq [n]$ обозначим множество точек.

$$f_I(x) = \{f_i(x) : i \in I\}.$$

Как и в стандартном доказательстве теоремы о неподвижной точке, найдём такое x, что

$$x \in \bigcap_{I\subseteq[n],|I|=n-l+1} \operatorname{conv} f_I(x).$$

Рассмотрим множества

$$C_I(x) = \operatorname{cl} U_\varepsilon(\operatorname{conv} f_I(x)),$$

они непрерывно зависят от x в метрике Хаусдорфа. Пересечение

$$C(x) = \bigcap_{I\subseteq[n],|I|=n-l+1} C_I(x) \cap B$$

имеет непустую внутренность, а значит непрерывно зависит от x в метрике Хаусдорфа (см., например, книгу [95]).

Значит, по теореме о неподвижной точке для многозначных отображений, найдётся $x \in B$ такое, что $x \in C(x)$. Устремляя ε к нулю и используя соображения компактности, получаем точку $x \in \bigcap_{I\subseteq[n],|I|=n-l+1} \operatorname{conv} f_I(x)$, что и требовалось. □

Также нам понадобится следующая лемма из [1].

Лемма 4.21. *Пусть $\mathcal{F} = \{h_1, \dots, h_n\}$ — семейство гиперплоскостей в $\mathbb{R}^d$, рассмотрим ортогональные проекции $\pi_1, \dots, \pi_n$ на соответствующие гиперплоскости. Тогда найдётся ограниченное выпуклое тело B, такое что*

$$\forall i = 1, \dots, n,\ \pi_i(B) \subseteq B.$$

Доказательство теоремы 4.7. Пусть $\mathcal{F} = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$. Для всякого $i \in [n]$ определим отображения $f_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ как ортогональные проекции точки x на h_i. По лемме 4.21 найдётся ограниченное выпуклое тело B, которое переводится в себя проекциями f_i.

Применим теперь лемму 4.20 к множеству B и отображениям f_i. Тогда получаем точку x такую, что всякое полупространство $H \ni x$ содержит не менее $l = \left\lfloor \dfrac{n+d}{d+1} \right\rfloor$ точек $f_i(x)$. Так как $f_i(x)$ — это проекции, получаем, что для всякого луча r с началом в x найдётся не менее l гиперплоскостей из $\mathcal{F}$, которые либо пересекаются с r, либо параллельны ему.

Теперь докажем, что на самом деле для всякого луча r с началом в x луч r пересекает не менее l гиперплоскостей из $\mathcal{F}$. Рассмотрим единичную сферу S с центром в x и спроецируем гиперплоскости из $\mathcal{F}$ на неё, получив семейство $\mathcal{G}$, состоящее из открытых полусфер, либо полных сфер (если x принадлежит соответствующей $h \in \mathcal{F}$). Уже доказано, что замыкания множеств из $\mathcal{G}$ покрывают S с кратностью не менее l, надо показать, что сами множества $\mathcal{G}$ покрывают S с кратностью не менее l.

Предположим противное: $e \in S$ покрыта $k < l$ множествами из $\mathcal{G}$ и лежит на границе как минимум $l - k$ множеств из $\mathcal{G}$, обозначим такие множества $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$. Из общего положения исходных гиперплоскостей следует, что $|\mathcal{H}| \leq d - 1$ и в любой окрестности точки e найдётся точка, которая не лежит ни в каком замыкании $\operatorname{cl} X$ множества

$X \in \mathcal{H}$. Тогда достаточно близкая к e точка e' лежит в точности в тех же множествах из $\mathcal{G}$, что и e (из открытости этих множеств) и не лежит на границе никакого из множеств $\mathcal{G}$. Значит, она принадлежит замыканиям не более чем k множеств из $\mathcal{G}$ — противоречие. □

Доказательство следствия 4.10. Применим к семейству прямых теорему 4.7 и найдём центральную точку x.

Всякой прямой l сопоставим единичный вектор e, направленный из x в ближайшую к x точку этой прямой. Если x лежит на прямой, то такой прямой сопоставим любой нормальный к ней вектор e. Занумеруем эти вектора (и прямые) по кругу $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{3n}\}$ $(\{l_1, l_2, l_3, \dots, l_{3n}\})$ против часовой стрелки.

Тогда возьмём тройки $l_k l_{k+n} l_{k+2n}$ (коэффициенты считаем по модулю $3n$). Покажем, что каждая из них образует треугольник, содержащий x. Действительно, если x лежит на одной из прямых, то это очевидно.

Иначе вектора e_k, e_{k+n}, e_{k+2n} не лежат ни в какой открытой полуплоскости H, содержащей x на своей границе, так как в этом случае луч r, являющийся внешней нормалью к H в точке x, пересекал бы менее $n-2$ прямых из l_i, что противоречит центральности x. Значит выпуклая оболочка e_k, e_{k+n}, e_{k+2n} содержит ноль, из общего положения ноль находится строго внутри неё, следовательно, треугольник из прямых $l_k l_{k+n} l_{k+2n}$ содержит x. □

Доказательство теоремы 4.8. Сначала докажем теорему для связной меры.

Для всякой точки $x \in \mathbb{R}^d$ рассмотрим отображение

$$\pi_x : \gamma_d^1 \to \mathbb{R}^d,$$

которое отображает гиперплоскость H в проекцию точки x на H. Это отображение однозначно везде кроме множества меры нуль, поэтому корректно определены меры $\lambda_x = \pi_{x*}\mu$.

По лемме 4.13 эти меры непрерывно зависят он x. Эти меры связны и все они имеют компактные носители. Если множество значений x ограничить некоторым компактом, то и носители λ_x окажутся в некотором компакте.

Теперь для всякого x можно рассмотреть $\operatorname{cent} \lambda_x$. Он непрерывно зависит от x в метрике Хаусдорфа по леммам 4.18 и 4.19, поэтому можно выбрать непрерывную функцию $f(x) \in \operatorname{cent} \lambda_x$. Будем применять теорему о неподвижной точке 3.2 к отображению $f(x)$, для этого надо показать, что найдётся константа M, такая что для всякого x

$$|x| > M \implies (x, x - f(x)) > 0.$$

Применим лемму 4.14 к мере λ_0 и числу $\varepsilon = \dfrac{1}{2(d+1)}$, найдём такое $\delta > 0$, что всякая полоса T ширины не более δ имеет меру $\lambda_0(T) < \varepsilon$. Пусть носитель λ_0 лежит в круге радиуса R, возьмём число $M > R^2/\delta$. Для точки $x \in \mathbb{R}^d$, такой что $|x| > M$, обозначим $H_x = \{y \in \mathbb{R}^d : (y, x) \geq (x, x)\}$. Посмотрим, чему равна мера $\lambda_x(H_x)$. Для этого переведём H_x отображением $\pi_0 \circ \pi_x^{-1}$ в множество L_x. Покажем, что

$$L_x = \{y \in \mathbb{R}^d : (y, x) \geq 0 \text{ и } |y - x/2| \geq |x|/2\}.$$

Действительно, для всякого $z \in H_x$ гиперплоскость $h = \pi_x^{-1}(z)$ либо параллельна вектору x, либо пересекает луч, выходящий из x в направлении x. Отсюда ясно, что $\pi_0(h)$ лежит в описанном выше множестве L_x, для доказательства этого достаточно перейти в двумерную плоскость, содержащую $x, z, 0$.

Значит пересечение $L_x \cap S$ лежит в полосе толщины менее δ, а значит $\lambda_0(L_x) = \lambda_x(H_x) < \varepsilon$. Это значит, что $\operatorname{cent} \lambda_x \cap H_x = \emptyset$ и для рассматриваемых x имеем $(x, x - f(x)) > 0$.

По теореме о неподвижной точке найдётся $x \in B_M$ такая, что $x \in \operatorname{cent} \lambda_x$. Аналогично доказательству теоремы 4.7 можно проверить, что эта точка и есть та, что нужна в теореме.

Теперь рассмотрим случай несвязной меры μ. Возьмём такое пространство шаров $B_R(\gamma_d^1)$ расслоения γ_d^1 радиуса R, что $\operatorname{supp}\mu \subseteq B_R(\gamma_d^1)$. На $B_R(\gamma_d^1)$ возьмём вероятностную меру μ_1 которая инвариантна относительно вращений из $O(d)$ и на каждом слое расслоения совпадает со стандартной мерой на шаре в $\mathbb{R}^{d-1}$ с точностью до умножения на константу. Мера μ_1 связна и связны все меры $\mu_t = (1-t)\mu + t\mu_1$, которые к тому же непрерывно зависят от $t \in [0, 1]$.

По доказанному ранее при $t > 0$ для меры μ_t можно выбрать точку $x_t \in \operatorname{cent} \pi_{x_t *}(\mu_t)$. Приведённое ранее число M не будет зависеть от t, так как лемму 4.14 можно применить ко всему семейству мер $\pi_{0*}(\mu_t)$. Значит по компактности, последовательность точек $x_{1/n} \in B_M$ будет иметь частичный предел x_0, который, по непрерывности, будет искомой точкой. □

Доказательство теоремы 4.9. Аналогично предыдущей теореме будем считать меры связными.

Рассмотрим некоторое линейное подпространство $L \subseteq \mathbb{R}^d$ размерности $k + 1$. С помощью ортогональной проекции k-плоскости в $\mathbb{R}^d$ проецируются в l-плоскости ($l \le k$) в L, причём, за исключением множества меры нуль, k-плоскости проецируются в k-плоскости.

Таким образом проекция даёт меры $\nu_{i,L}$ на множестве гиперплоскостей γ_L^1. Эти меры непрерывно зависят от L. Как в предыдущей теореме для каждой точки $x \in L$ рассмотрим меры $\lambda_{i,L,x}$ на L, получающиеся из $\nu_{i,L}$ проекцией π_x в L. Их центральные точки зависят непрерывно от x и L, то есть найдутся отображения

$$f_i : \gamma_d^{k+1} \to \gamma_d^{k+1} \quad (i = 1, \dots, d-k),$$

которые, аналогично предыдущей теореме, удовлетворяют условиям теоремы 3.2 (с учётом теоремы 3.3).

Тогда получаем x и L такие, что $x \in \operatorname{cent} \lambda_{i,L,x}$ для любого $i = 1, \dots, d-k$. Очевидно, что $d-k-1$-плоскость, перпендикулярная к L в точке x, является искомой. □

4.8 Двойственные теоремы типа Тверберга

Сформулируем двойственную теорему Тверберга для произвольной размерности. Для этого сделаем определение.

Определение. Будем говорить, что $d{+}1$ гиперплоскость $h_1, \dots, h_{d+1}$ общего положения в $\mathbb{R}^d$ образует симплекс S, если S является выпуклой оболочкой множества точек $\{x_i\}$, где для $i = 1, \dots, d+1$

$$x_i = \bigcap_{j \neq i} h_j.$$

Очевидно, что каждая гипергрань S лежит на соответствующей гиперплоскости h_i.

Гипотеза 4.2 (Двойственная теорема Тверберга)**.** *Пусть в $\mathbb{R}^d$ дано семейство из $(d{+}1)n$ гиперплоскостей общего положения. Тогда их можно разбить на наборы из $d+1$ штук так, что все симплексы, образованные наборами, имеют общую точку.*

В этой работе доказывается частный случай этой гипотезы с помощью топологических методов. Доказывается только случай, когда n является степенью простого, что идентично ограничению, возникающему в топологическом аналоге теоремы Тверберга в [74].

Теорема 4.22. *Пусть в $\mathbb{R}^d$ дано семейство из $(d+1)n$ гиперплоскостей общего положения, причём $n = p^k$, где p — простое число.*

Тогда эти плоскости можно разбить на n непересекающихся наборов из $d+1$ штук так, что все симплексы, образованные наборами, имеют общую внутреннюю точку.

Будет доказана и двойственная версия цветной теоремы Тверберга из работы [67].

Теорема 4.23. *Пусть в* $\mathbb{R}^d$ *дано семейство из* $(d+1)t$ *гиперплоскостей общего положения, где* $t \geq 2r-1$, $r = p^k$, p *— простое число. Пусть эти гиперплоскости разбиты на* $d+1$ *семейство (цвет) по* t *элементов.*

Тогда из данных плоскостей можно выбрать $r-d$ *непересекающихся наборов по* $d+1$ *гиперплоскости в каждом наборе так, что все симплексы, образованные наборами, имеют общую внутреннюю точку и каждый набор разноцветный, то есть не содержит пары одноцветных плоскостей.*

Доказательство теорем 4.22 и 4.23. Приведём доказательство для теоремы 4.22, доказательство теоремы 4.23 получается заменой комплекса $\Delta^{n(d+1)-1}$ на комплекс $K(d+1,t)$ и соответствующей заменой их вырезанных джойнов.

Положим $N = n(d+1)$ и занумеруем гиперплоскости $\{h_i\}_{i=1}^N$. Положим $G = (Z_p)^k$.

Как в доказательстве теоремы 4.7, определим отображение f_i как проекцию на h_i. Также рассмотрим выпуклое тело B, которое этими отображениями переводится в себя.

Полный симплициальный комплекс, вершины которого соответствуют гиперплоскостям h_i отождествим с симплексом Δ^{N-1}.

Зафиксируем точку $b \in B$. Определим отображение $s_b : (\Delta^{N-1})^{*n}_{\Delta} = EG_N \to J^n_A(\mathbb{R}^d)$. Отображение $t_b : \Delta^{N-1} \to \mathbb{R}^d$ определим на вершинах Δ^{N-1} как $f_i(b)-b$ для вершины v_i. Далее продолжим по линейности на Δ^{N-1}. Отображение s_b будет n-кратным джойном отображения t_b. Теперь, рассматривая отображение s_b в зависимости от точки b, можем считать его непрерывным отображением $s : B \times (\Delta^{N-1})^{*n}_{\Delta} = B \times EG_N \to J^n_A(\mathbb{R}^d)$.

Отображение s эквивариантно относительно действия группы G на EG_N и $J^n_A(\mathbb{R}^d)$ и может считаться сечением соответствующего эквивариантного расслоения.

Проверим теперь, что сечение s некоторые точки отображает в нуль. Заметим, что эквивариантный класс Эйлера $e(D_A^n(\mathbb{R}^d))$ имеет размерность $(d+1)(n-1)$ и не равен нулю в $H_G^*(EG_N, Z_p)$, так как отображение

$$S_p^{(d+1)(n-1)}(k) \to H_G^{(d+1)(n-1)}(EG_N, Z_p)$$

инъективно. Более того, по лемме 2.12 найдётся такой элемент $e' \in \Lambda^d(k)$, что образ $e(D_A^n(\mathbb{R}^d))e'$ в $H_G^{n(d+1)-1}(EG_N, Z_p)$ не равен нулю.

Рассмотрим композицию $s_2 = \pi \circ s$ с проекцией π пространства $J_A^n(\mathbb{R}^d)$ на ортогональное дополнение к $D_A^n(\mathbb{R}^d)$, изоморфное $\mathbb{R}^d$, получим, что относительный класс Эйлера частичного сечения s_2 тривиального расслоения $(B, \partial B) \times \mathbb{R}^d$ не равен нулю в $H^d(B, \partial B)$. Тогда, по свойству мультипликативности, относительный класс Эйлера сечения s не равен нулю в $H_G^{N-1}(B \times EG_N, \partial B \times EG_N, Z_p)$, что гарантирует отображение в нуль некоторых пар $b \times y$, множество всех таких пар обозначим Z.

Распишем условие $b \times y \in Z$ для $b \in B$, $y \in EG_N$ более подробно. Точка y является выпуклой комбинацией точек из Δ^{N-1} (в соответствии с определением вырезанного джойна)

$$y = c_1 x_1 \oplus \dots c_n x_n,$$

где точки $x_i \in \Delta^{N-1}$ имеют попарно дизъюнктные носители. Отображение в ноль означает, что $c_1 = \dots = c_n = 1/n$ и $t_b(x_1) = \dots = t_b(x_n) = b$. Каждое $c_i x_i$ представляется как выпуклая комбинация вершин симплекса Δ^{N-1}

$$c_i x_i = a_{i1} v_1 \oplus \dots \oplus a_{iN} v_N.$$

Заметим, что по определению вырезанного джойна при каждом фиксированном $j \in [N]$ $a_{ij} \neq 0$ не более чем для одного индекса $i \in [n]$. Нам понадобится лемма:

Лемма 4.24. *В текущих обозначениях пусть* $J \subseteq [N]$, $F = \{t_b(v_j) : j \in J\}$. *Тогда* $b \in \operatorname{conv} F$ *в следующих случаях:*

1) либо $b \in F$*;*

2) либо в F *не менее* $d+1$ *элемента и* b *лежит строго внутри* $\operatorname{conv} F$.

Обозначим теперь для данной точки $b \times y \in Z$

$$J_b = \{j \in [N] : f_j(b) = t_b(v_j) = b\}.$$

Предположим, что для всех пар $b \times y \in Z$ множество J_b непусто, тогда рассмотрим отображение $p : B \times EG_N \to EG_N$, которое для пары $b \times y$ из координат $\{a_{ij}\}$ точки y зануляет все, кроме тех, у которых $j \in J_b$, а потом нормирует оставшиеся координаты на единичную сумму, точка b при этом отображении отбрасывается. Это отображение определено не на всем $B \times EG_N$, но по предположению, оно определено на некоторой окрестности $U \supseteq Z$.

Образ этого отображения $p(U)$ лежит в $d-1$-мерном скелете EG_N, так как в образе отличаться от нуля могут не более d чисел из a_{ij}, соответствующих тем гиперплоскостям, которые содержат данную точку b. К тому же это отображение G-эквивариантно.

Вспомним теперь про класс $e' \in \Lambda_p^d(k)$. Его естественный образ в $H_G^d(p(U), Z_p)$ равен нулю по соображениям размерности, а значит его естественный образ в $H_G^d(U, Z_p)$ тоже равен нулю. Также ясно, что класс Эйлера $e(J_A^n(\mathbb{R}^d))$ в когомологиях $H_G^*(B \times EG_N, \partial B \times EG_N, Z_p)$ обращается в нуль на $B \times EG_N \setminus Z$. По лемме 2.25 произведение $e(J_A^n(\mathbb{R}^d))e'$ должно обратиться в нуль в $H_G^*(B \times EG_N, \partial B \times EG_N, Z_p)$, однако это противоречит тому, что $e(D_A^n(\mathbb{R}^d))e' \neq 0 \in H_G(EG_N, Z_p)$ и формуле Кюннета в сумме с мультипликативностью класса Эйлера.

Значит наше предположение неверно и для какой-то пары $b \times y \in Z$ множество J_b пусто. Тогда множества

$$S_i = \{j \in [J] : a_{ij} \neq 0\}$$

не пересекаются, и $\operatorname{conv} t_b(S_i) \ni b$ для всех $i \in [n]$. По предыдущей лемме все эти множества обязаны иметь по $d+1$ элементу и $\operatorname{int} \operatorname{conv} t_b(S_i) \ni b$. В этом случае наборы гиперплоскостей $\{h_j\}_{j \in S_i}$ образуют симплексы, содержащие b внутри себя. □

4.9 Некоторые гипотезы

Помимо уже сформулированной гипотезы о двойственной теореме Тверберга для произвольного n, приведём ещё две гипотезы, которые могли бы обобщить результаты этой главы.

Следующее утверждение является некоторой интерполяцией между обычной и двойственной теоремой о центральной точке.

Гипотеза 4.3 (Теорема о центральной точке для k-плоскостей)**.** *Существует константа $c(k,d) > 0$ такая, что для всякой абсолютно непрерывной вероятностной меры μ с компактным носителем на множестве k-плоскостей в $\mathbb{R}^d$ найдётся точка x такая, что для всякой $(n-k)$-полуплоскости $M \ni x$*

$$\mu(I(M,k)) \geq c(k,d).$$

Следующая гипотеза была бы двойственным аналогом цветной теоремы Тверберга на плоскости из работы [5].

Гипотеза 4.4 (Двойственная цветная теорема Тверберга на плоскости)**.** *Пусть на плоскости дано семейство из $3n$ прямых общего положения, раскрашенных в три цвета по n штук. Тогда их можно разбить на разноцветные тройки так, что все треугольники, образованные тройками, имеют общую точку.*

Глава 5

Теоремы о покрытиях и разбиениях

В этой главе доказываются несколько результатов в духе теоремы Кнастера-Куратовского-Мазуркевича (ККМ). В частности, теорема ККМ обобщается на случай кратного покрытия несколькими семействами множеств. Один результат такого рода был ранее известен из работы [2].

Теорема 5.1 является обобщением аналога теоремы ККМ из [2] для нескольких покрытий симплекса на случай, когда количество покрытий не равно количеству вершин симплекса. В качестве следствия теоремы 5.1 приводятся обобщения теоремы Брауэра о неподвижной точке для семейства отображений симплекса в себя.

В отличие от работы [2], в которой доказывается обобщение теоремы Шпернера о триангуляциях симплекса, а затем из него выводится аналог теоремы ККМ, далее в этой главе обобщение теоремы ККМ выводится из топологических соображений, аналогично доказательству собственно теоремы ККМ в книге [94]. Тем не менее, далее будут сформулированы и доказаны два обобщения теоремы Шпернера, соответствующие теоремам типа ККМ.

Теорему 5.1 можно назвать «цветным» вариантом теоремы ККМ, в духе цветных теорем Каратеодори, Хелли, Тверберга из работ [4, 5]. Также в работе доказывается близкая к теореме 5.1 по формулировке и по способу доказательства теорема 5.12, которая в некотором смысле является «цветным» вариантом теоремы о неподвижной точке и из этой теоремы выводится цветная теорема Хелли.

Также в этой главе доказывается некоторое обобщение теоремы из работ [56, 57], которое можно назвать аналогом теоремы ККМ для произведения симплексов.

5.1 Цветная теорема Кнастера-Куратовского-Мазуркевича

Симплекс размерности d будем обозначать Δ^d, его множество вершин отождествляем с $[d+1]$. Гипергрань симплекса Δ^d, не содержащую вершину i, обозначим $\partial_i\Delta^d$, а за $\partial\Delta^d$ обозначим всю границу Δ^d.

Теорема 5.1. *Рассмотрим множество X из n точек в $\mathbb{R}^d$ и множество индексов $[m]$, где $m \geq n$. Пусть $\{A(x,j)\}$, где $x \in X$, $j \in [m]$ — семейство замкнутых множеств, для которого*

$$\forall j \in [m]\ \forall Y \subseteq X\ \operatorname{conv} Y \subseteq \bigcup_{x \in Y} A(x,j).$$

Пусть каждому $x \in X$ сопоставлено такое натуральное число $a(x)$, что $\sum_{x \in X} a(x) = m$. Тогда найдётся такое отображение множества индексов $\sigma : [m] \to X$, что

$$\forall x \in X\ |\sigma^{-1}(x)| = a(x) \quad \text{и} \quad \bigcap_{j=1}^{m} A(\sigma(j), j) \neq \emptyset,$$

здесь $|\sigma^{-1}(x)|$ обозначено количество элементов в прообразе x относительно σ.

Теорема 5.1 для случая $m = n$ сформулирована и доказана в [2]. Сформулируем также ещё один вариант цветной теоремы ККМ.

Теорема 5.2. *Рассмотрим семейство $\{A_{ij}\}$ замкнутых подмножеств Δ^d, где $i \in [d+1]$, $j \in [m]$ $(m \geq d+1)$, для которого*

$$\forall j\ \forall i\ A_{ij} \supseteq \partial_i \Delta^d, \quad \forall j\ \bigcup_i A_{ij} = \Delta^d.$$

Пусть дано $d+1$ натуральное число $a_1, a_2, \dots, a_{d+1}$, где $\sum_i a_i = m$. Тогда найдётся такое отображение множества индексов $\sigma : [m] \to [d+1]$, что

$$\forall i \in [d+1]\ |\sigma^{-1}(i)| = a_i \quad \text{и} \quad \bigcap_{j=1}^{m} A_{\sigma(j)j} \neq \emptyset.$$

Приведём два следствия вышеуказанных теорем. Эти следствия дают теорему о неподвижной точке, если все отображения f_j в их формулировке одинаковые.

Следствие 5.3. *Пусть заданы $m \geq d+1$ непрерывных отображений $f_j : \Delta^d \mapsto \Delta^d$. Пусть дано $d+1$ натуральное число $a_1, a_2, \dots, a_{d+1}$, где $\sum_i a_i = m$. Тогда найдётся такое отображение множества индексов $\sigma : [m] \to [d+1]$ и точка $x \in \Delta^d$, что*

$$\forall i \in [d+1]\ |\sigma^{-1}(i)| = a_i, \quad \forall j \in [m]\ x \in \operatorname{conv}(\{f_j(x)\} \cup \partial_{\sigma(j)} \Delta^d).$$

Следствие 5.4. *Пусть заданы $m \geq d+1$ непрерывных отображений $f_j : \Delta^d \mapsto \Delta^d$. Пусть дано $d+1$ натуральное число $a_1, a_2, \dots, a_{d+1}$, где $\sum_i a_i = m$. Тогда найдётся такое отображение множества индексов $\sigma : [m] \to [d+1]$ и точка $x \in \Delta^d$, что*

$$\forall i \in [d+1]\ |\sigma^{-1}(i)| = a_i, \quad \forall j \in [m]\ f_j(x) \in \operatorname{conv}(\{x\} \cup \partial_{\sigma(j)} \Delta^d).$$

Для доказательства аналогов теоремы ККМ нам понадобится лемма.

Лемма 5.5. *Пусть непрерывное отображение* $f : \Delta^d \to \Delta^d$ *отображает каждую грань* Δ^d *в себя. Тогда отображение* $f^* : H^d(\Delta^d, \partial\Delta^d) \to H^d(\Delta^d, \partial\Delta^d)$ *тождественно и само отображение* f *сюръективно.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по d. Случай $d = 0$ очевиден. Рассмотрим вложенный в Δ^d симплекс Δ^{d-1}. Для него утверждение верно.

Положим $K = \partial\Delta^d \setminus \operatorname{int} \Delta^{d-1}$. По предположению f^* индуцирует тождественное отображение на $H^{d-1}(\Delta^{d-1}, \partial\Delta^{d-1})$. По изоморфизму вырезания также тождественно отображение на $H^{d-1}(\partial\Delta^d, K)$, а значит и на $H^{d-1}(\partial\Delta^d)$. Теперь рассматривая кограничный изоморфизм $\partial : H^{d-1}(\partial\Delta^d) \to H^d(\Delta^d, \partial\Delta^d)$ получаем утверждение про когомологии.

Сюръективность докажем от противного: пусть нашлась точка $x \in \Delta^d$ такая, что $x \notin f(\Delta^d)$. По предположению индукции $x \notin \partial\Delta^d$. Тогда отображение f пропускается через вложение пары $i : (\Delta^d \setminus \{x\}, \partial\Delta^d) \to (\Delta^d, \partial\Delta^d)$, которое даёт нулевой гомоморфизм i^*. □

Заметим, что на самом деле из леммы 5.5 следует более общее утверждение:

Лемма 5.6. *Пусть непрерывное отображение симплициального комплекса* $f : K \to K$ *отображает всякий симплекс* K *в себя. Тогда для любого подкомплекса* A *отображение* $f^* : H^*(K, A) \to H^*(K, A)$ *тождественно и* f *сюръективно.*

Вариант леммы 5.6 неявно использован в работе [33] в доказательстве некоторого аналога теоремы ККМ (теорема 5.1 работы [33]).

Сформулируем и докажем частный случай теоремы 5.1, из которого можно вывести общий случай.

Лемма 5.7. *Пусть* $\{A_{ij}\}$, *где* $i \in [d+1]$, $j \in [m]$ $(m \geq d+1)$ — *семейство замкнутых подмножеств* Δ^d, *для которого*

$$\forall j\ \forall i\ A_{ij} \cap \partial_i \Delta^d = \emptyset \quad \text{и} \quad \forall j\ \bigcup_i A_{ij} = \Delta^d.$$

Возьмём натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_{d+1}$, *для которых* $\sum_i a_i = m$. *Тогда найдётся такое отображение множества индексов* $\sigma : [m] \to [d+1]$, *что*

$$\forall i \in [d+1]\ |\sigma^{-1}(i)| = a_i \quad \bigcap_{j=1}^{m} A_{\sigma(j)j} \neq \emptyset.$$

Доказательство леммы 5.7. Возьмём $\varepsilon > 0$, не превосходящее всех расстояний $\operatorname{dist}(A_{ij}, \partial_i \Delta^d)$. Рассмотрим для каждого A_{ij} непрерывную функцию $\chi_{ij} : \Delta^d \mapsto [0,1]$ такую, что $\chi_{ij}(x) = 1$ для $x \in A_{ij}$ и $\chi_{ij(x)=0}$, если $\operatorname{dist}(x, A_{ij}) \geq \varepsilon$.

Положим

$$\phi_{ij}(x) = \frac{\chi_{ij}(x)}{\sum_{i' \in [d+1]} \chi_{i'j}(x)},$$

определение ϕ_{ij} корректно, так как $\bigcup_i A_{ij} = \Delta^d$ и знаменатель не обращается в 0.

Положим

$$\phi_i(x) = \frac{\sum_{j \in [m]} \phi_{ij}(x)}{m}.$$

Если рассматривать $\phi_i(x)$ как барицентрические координаты точки в симплексе Δ^d, то можно видеть, что ϕ_i задают отображение $\phi : \Delta^d \mapsto \Delta^d$, и из условий леммы следует, что всякая грань Δ^d отображается в себя. Следовательно, по лемме 5.5 отображение ϕ сюръективно и найдётся точка $x \in \Delta^d$ такая, что

$$\forall i \in [d+1]\ \phi_i(x) = a_i/m.$$

Рассмотрим матрицу $M = (\phi_{ij}(x))_{i\in[d+1]\ j\in[m]}$. Построим двудольный граф, множество вершин которого — это объединение множества столбцов $[m]$ и множества $[d+1]$ строк матрицы M. Соединим строку i со столбцом j, если $\phi_{ij}(x) > 0$. В этой матрице суммы в строках равны соответственно a_i, суммы в каждом столбце равны 1. Следовательно, этот граф удовлетворяет условию леммы 2.33 и существует $\sigma : [m] \mapsto [d+1]$ для которой $|\sigma^{-1}(i)| = a_i\ \phi_{\sigma(i)i}(x) > 0$. Это означает, что для множеств ε-окрестностей $U_\varepsilon(A_{ij})$ выполняется

$$\bigcap_{j=1}^{m} U_\varepsilon(A_{\sigma(j)j}) \ni x.$$

Устремляя ε к нулю и используя стандартные рассуждения, связанные с компактностью Δ^d и конечностью числа возможных отображений $\sigma(\varepsilon)$, получаем утверждение теоремы. □

Так же, как и в конце предыдущего доказательства, в доказательствах теорем 5.2, 5.8 будем пользоваться следующим приёмом. Если вместо множеств A из формулировки рассмотрим их ε-окрестности $U_\varepsilon(A) = \{x : \mathrm{dist}(x, A) \le \varepsilon\}$ и докажем утверждения для окрестностей при любых положительных ε, то исходное утверждение для $\varepsilon = 0$ будет следовать из стандартных соображений компактности.

Доказательство теоремы 5.1. Рассмотрим аффинное отображение f стандартного Δ^{n-1} в $\mathbb{R}^d$, переводящее вершины Δ^{n-1} в точки множества X. Рассмотрим прообразы $A'(x, j) = f^{-1}(A(x, j))$ – это замкнутые множества. Для доказательства теоремы нам достаточно доказать, что для некоторого отображения $\sigma : [m] \to X$ с заданным числом прообразов каждой точки имеем

$$\bigcap_{j=1}^{m} A'(\sigma(j), j) \neq \emptyset.$$

Множество вершин симплекса Δ^{n-1} для краткости будем отождествлять с X.

Теперь чтобы применить лемму 5.7 нам надо сделать так, чтобы $A'(x,j)$ не пересекалось с гипергранью $\partial_x\Delta^{n-1}$. Возьмём достаточно малое ε' и вычтем из $A'(x,j)$ открытую ε'-окрестность гиперграни $\partial_x\Delta^{n-1}$, получив множество $A''(x,j)$. Покажем, что при достаточно малом ε' для каждого $j \in [m]$ множества $\{A''(x,j)\}_{x\in X}$ покрывают Δ^{n-1}. Предположим противное: пусть для некоторого $j \in [m]$ какая-то точка p не покрывается ни одним из $A''(x,j)$ при любых ε'. Пусть p лежит в относительной внутренности грани Δ^{n-1}, вершины которой образуют множество Y или p совпадает с некоторой вершиной $y \in X$, тогда обозначим $Y = \{y\}$. Легко видеть, что $\operatorname{conv} Y \subseteq \bigcup_{x\in Y} A''(x,j)$ для достаточно малого ε', таким образом получается противоречие.

Применяя лемму 5.7 к симплексу Δ^{n-1} и множествам $A''(x,j)$, получаем требуемое утверждение. ☐

Доказательство теоремы 5.2. По замечанию выше утверждение достаточно доказать для множеств $U_\varepsilon(A_{ij})$, точнее для их замыканий $A'_{ij} = \operatorname{cl} U_\varepsilon(A_{ij})$ при любых $\varepsilon > 0$.

Вычтем из каждого A'_{ij} открытый шар радиуса $\varepsilon/2$ с центром в вершине с номером i, получим множества

$$A''_{ij} = A'_{ij} \setminus B_{\varepsilon/2}(v_i).$$

Тогда условие $\bigcup_{i=1}^{d+1} A''_{ij} = \Delta^d$ остаётся верным, так как эта окрестность вершины v_i покрыта $A'_{i'j}$ для любого $i' \neq i$.

Поместим симплекс Δ^d в больший симплекс Δ^d_1 так, что вершины Δ^d попадут в середины граней Δ^d_1. Если рассмотреть звезду вершины с номером i симплекса Δ^d_1 в барицентрическом подразделении Δ^d_1 и обозначить ее B_i, то множества $A'''_{ij} = A''_{ij} \cup (B_i \setminus \Delta^d)$ будут удовлетворять условиям леммы 5.7. Значит для соответствующего

$\sigma : [m] \mapsto [d+1]$

$$\bigcap_{j=1}^{m} A'''_{\sigma(j)j} \neq \emptyset.$$

Заметим, что это пересечение обязано лежать в Δ^d, значит

$$\bigcap_{j=1}^{m} A''_{\sigma(j)j} \neq \emptyset \quad \text{и} \quad \bigcap_{j=1}^{m} A'_{\sigma(j)j} \neq \emptyset.$$

□

Доказательство следствия 5.3. Предположим, что начало координат лежит в Δ^d и рассмотрим отображения $f_j(x,\varepsilon) = (1-\varepsilon)f_j(x)$. Если для каждого ε из некоторой последовательности $\varepsilon \to 0$ утверждение будет верно, то оно будет верно и для $\varepsilon = 0$. Действительно, переходя к подпоследовательности, можем считать, что отображение σ не зависит от ε и $x(\varepsilon) \to x$.

Далее рассматриваем случай $f_j(\Delta^d) \in \operatorname{int} \Delta^d$ для всех $j \in [m]$. Положим

$$A_{ij} = \{x : x \in \operatorname{conv}(\{f_j(x)\} \cup \partial_i \Delta^d)\}.$$

Эти множества удовлетворяют условиям теоремы 5.2, которая даёт в точности требуемое утверждение. □

Доказательство следствия 5.4. Аналогично предыдущему, рассматриваем случай $f_j(\Delta^d) \in \operatorname{int} \Delta^d$ для всех $j \in [m]$. Положим

$$A_{ij} = \{x : x \in \operatorname{conv}(\{f_j(x)\} \cup \partial_i \Delta^d)\}.$$

Эти множества удовлетворяют условиям теоремы 5.1, которая даёт в точности требуемое утверждение. □

5.2 Теоремы типа ККМ на произведениях симплексов

С помощью развитой в этой главе техники можно также просто и естественно доказать обобщение результата из работ [56, 57] о покрытиях произведения симплексов. В этих работах из теоремы о покрытии произведения симплексов выводится теорема о трансверсалях неоднородных 2-интервалов, то есть подмножеств дизъюнктного объединения пары прямых, состоящих из двух отрезков на разных прямых.

В работе [51] также приведено близкое утверждение про произведение сфер, являющееся обобщением теоремы Борсука-Улама.

Теорема 5.8. *Предположим, что произведение симплексов* $\Delta^{n-1} \times \Delta^{m-1}$ $(m \geq n)$ *покрыто семейством из* mn *замкнутых множеств* A_{ij} $(i \in [n], j \in [m])$, *причём каждое* A_{ij} *не пересекает* $\partial_i \Delta^{n-1} \times \Delta^{m-1}$ *и не пересекает* $\Delta^{n-1} \times \partial_j \Delta^{m-1}$. *Возьмём натуральные числа* $a_1, \dots a_n$, *сумма которых равна* m.

Тогда найдётся отображение $\sigma : [m] \to [n]$, *для которого*

$$\forall i \in [n]\ |\sigma^{-1}(i)| = a_i, \quad \bigcap_{j=1}^{m} A_{\sigma(j)j} \neq \emptyset.$$

Заметим, что из этого результата выводится лемма 5.7. Действительно, пусть A_{ij} — множества из формулировки леммы 5.7. Пусть множества $B_1, \dots, B_m$ — $m-1$-мерные клетки двойственного разбиения Δ^{m-1}. Тогда применяя теорему 5.8 к множествам $A_{ij} \times B_j \subseteq \Delta^{n-1} \times \Delta^{m-1}$, получаем требуемое.

Также наше доказательство теоремы 5.8 можно распространить на случай произведения большего числа симплексов и получить утверждение о взвешенном гиперграфе, которое используется в статье [32] для рассмотрения трансверсалей семейств неоднородных d-интервалов.

Приведём следствия теоремы 5.8.

Следствие 5.9. *Пусть в квадрате* $Q = [0,1] \times [0,1]$ *дана абсолютно непрерывная мера* μ. *Рассмотрим пары разбиений отрезков на отрезки* $[0,1] = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$ *и* $[0,1] = J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_m$ *порядков* $m \geq n$ *и соответствующие разбиения квадрата на прямоугольники*

$$Q = \bigcup_{i \in [n], j \in [m]} I_i \times J_j.$$

Пусть $c > 0$. *Тогда либо найдётся такая пара разбиений, что для любых* $i \in [n], j \in [m]$

$$\mu(I_i \times J_j) < c,$$

либо для любого разбиения числа $m = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ *найдётся пара разбиений отрезка* I *порядка* n, J *порядка* m *и отображение* $\sigma : [m] \to [n]$, *такое что*

$$\forall i \in [n] \ |\sigma^{-1}(i)| = a_i, \quad \forall j \in [m] \ \mu(I_{\sigma(j)} \times J_j) \geq c.$$

Следствие 5.10. *Рассмотрим конечное семейство связных ограниченных открытых множеств* $\mathcal{F}$ *в* $\mathbb{R}^2$. *Пусть* $m \geq n$ *— натуральные числа. Тогда либо все множества* $\mathcal{F}$ *можно пересечь набором из* m *горизонтальных и* n *вертикальных прямых, либо выполняется следующее утверждение:*

Для любого набора натуральных чисел $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ *с суммой, равной* $m+1$, *найдётся подсемейство* $\{X_1, \ldots, X_{m+1}\} \subseteq \mathcal{F}$ *и отображение* $\sigma : [m+1] \to [n+1]$, *для которого*

$$\forall i \in [n+1] \ |\sigma^{-1}(i)| = a_i,$$

проекции X_i *и* X_j *на вертикальную ось не пересекаются при* $i \neq j$, *проекции* X_i *и* X_j *на горизонтальную ось не пересекаются, если* $\sigma(i) \neq \sigma(j)$.

Это следствие верно и для замкнутых множеств: этот случай выводится из случая открытых множеств, если вместо замкнутых множеств взять их ε-окрестности, применить утверждение, устремить ε к нулю и воспользоваться соображениями компактности. Сформулируем очевидное следствие из следствия 5.10, которое имеет более простую формулировку. Получается теорема типа Хелли для линейных трансверсалей.

Следствие 5.11. *Рассмотрим конечное семейство связных ограниченных открытых (замкнутых) множеств* $\mathcal{F}$ *в* $\mathbb{R}^2$. *Пусть* $m \geq n$ *— натуральные числа. Предположим, что всякое подсемейство* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, *у которого* $|\mathcal{G}| \leq m+1$, *можно пересечь либо* m *горизонтальными, либо* n *вертикальными прямыми. Тогда всё семейство* $\mathcal{F}$ *можно пересечь набором из* m *горизонтальных и* n *вертикальных прямых.*

Доказательство теоремы 5.8. Как и в доказательстве леммы 5.7, от множеств A_{ij} перейдём к функциям $\chi_{ij} : \Delta^{n-1} \times \Delta^{m-1} \to \mathbb{R}$, которые равны 1 на A_{ij} и обращаются в нуль в некоторой ε-окрестности A_{ij}.

Так как множества A_{ij} покрывают $\Delta^{n-1} \times \Delta^{m-1}$, то можно перейти к нормированным функциям

$$\phi_{ij}(x) = \frac{\chi_{ij}(x)}{\sum_{k,l} \chi_{kl}(x)}.$$

Далее рассмотрим функции

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{m} \phi_{ij}(x) \quad g_j(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_{ij}(x).$$

Оба набора дают отображения $f : \Delta^{n-1} \to \Delta^{n-1}$ (при фиксированном вложении $\Delta^{n-1} \times \{y\} \to \Delta^{n-1} \times \Delta^{m-1}$) и $g : \Delta^{m-1} \to \Delta^{m-1}$

(при фиксированном вложении $\{x\} \times \Delta^{m-1} \to \Delta^{n-1} \times \Delta^{m-1}$), при достаточно малом ε удовлетворяющие условиям леммы 5.5. Тогда по лемме 5.5 отображения

$$f^* : H^*(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \to H^*(\Delta^{n-1} \times \Delta^{m-1}, \partial\Delta^{n-1} \times \Delta^{m-1})$$

и

$$g^* : H^*(\Delta^{m-1}, \partial\Delta^{m-1}) \to H^*(\Delta^{n-1} \times \Delta^{m-1}, \Delta^{n-1} \times \partial\Delta^{m-1})$$

тождественны. По свойству $\times$-произведения когомологий отображение $(f\times g)^*$ тождественно на $H^{n+m-2}(\Delta^{n-1}\times\Delta^{m-1}, \partial(\Delta^{n-1}\times\Delta^{m-1}))$.

Значит, аналогично доказательству леммы 5.5 $f \times g$ сюръективно и найдётся точка x, для которой

$$\forall i \in [n] \ f_i(x) = \frac{a_i}{m} \quad \forall j \in [m] \ g_j(x) = \frac{1}{m}.$$

Возвращаясь к матрице $\phi_{ij}(x)$ видим, что у неё суммы по строкам равны a_i/m, а по столбцам $1/m$. Значит по лемме 2.33 найдётся отображение $\sigma : [m] \to [n]$, для которого

$$\forall i \in [n] \ |\sigma^{-1}(i)| = a_i, \quad \forall j \in [m] \ \phi_{\sigma(j)j}(x) \neq 0.$$

Далее утверждение теоремы получается аналогично доказательству леммы 5.7 переходом к пределу $\varepsilon \to 0$. ☐

Доказательство следствия 5.9. Пространство всевозможных пар разбиений порядка n и m параметризуется $P = \Delta^{n-1}\times\Delta^{m-1}$. Определим в P подмножества

$$A_{ij} = \{(I_1, \dots, I_n, J_1, \dots, J_m) : \mu(I_i \times J_j) \geq c\}.$$

Множества A_{ij} удовлетворяют условиям теоремы 5.8 о пересечениях с границей. Если они покрывают P, то по этой теореме для всякого разбиения числа $a_1 + \ldots + a_n = m$ есть отображение $\sigma : [m] \to [n]$ и выполняется вторая альтернатива данного следствия, если A_{ij} не покрывают P, то выполняется первая альтернатива. □

Доказательство следствия 5.10. Можно считать, что все множества семейства $\mathcal{F}$ содержатся строго внутри некоторого квадрата Q.

Аналогично предыдущему доказательству, пространство всевозможных наборов из n горизонтальных и m вертикальных прямых, пересекающих Q, естественно изоморфно пространству пар разбиений отрезка порядков $n+1$ и $m+1$, которое равно $P = \Delta^n \times \Delta^m$. Определим в P подмножества

$$A_{ij} = \{(I_1, \ldots, I_{n+1}, J_1, \ldots, J_{m+1}) : \exists X \in \mathcal{F} \ : \ X \subset \operatorname{int}(I_i \times J_j)\}.$$

Множества A_{ij} замкнуты и удовлетворяют условиям теоремы 5.8 о пересечениях с границей. Если они покрывают P, то по этой теореме для всякого разбиения числа $a_1 + \ldots + a_{n+1} = m+1$ есть отображение $\sigma : [m+1] \to [n+1]$ и выполняется вторая альтернатива данного следствия, если A_{ij} не покрывают P, то выполняется первая альтернатива. □

5.3 Теорема об отображениях и цветная теорема Хелли

Приведём ещё один результат в духе цветной теоремы ККМ.

Теорема 5.12. *Предположим, что в $\mathbb{R}^d$ даны $d+1$ конечное семейство открытых множеств $\mathcal{F}_i$ $(i = 1, \ldots, d+1)$, причём каждое семейство покрывает $\mathbb{R}^d$ и существует такое отображение $n : \bigcup_i \mathcal{F}_i \to S^{d-1}$, что*

$$\forall U \in \bigcup_i \mathcal{F}_i \ \inf_{u \in U} (u, n(U)) > -\infty.$$

Рассмотрим $d+1$ непрерывное отображение $f_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ такое, что все отображения $x \mapsto f_i(x) - x$ ограничены.

Тогда найдётся точка $x \in \mathbb{R}^d$ и система представителей $U_i \in \mathcal{F}_i$ такие, что

$$\forall i = 1, \dots, d+1 \ f_i(x) \in U_i \quad \text{и} \quad 0 \in \operatorname{conv}\{n(U_1), \dots, n(U_{d+1})\}.$$

Из теоремы 5.12 выведем цветную теорему Хелли (из работы [4]).

Теорема 5.13 (Цветная теорема Хелли)**.** *Если в $d+1$ конечном семействе замкнутых выпуклых множеств $\mathcal{F}_i$ $(i = 1, \dots, d+1)$ каждое семейство не имеет общей точки, то найдётся система представителей $K_i \in \mathcal{F}_i$, для которой*

$$\bigcap_{i=1}^{d+1} K_i = \emptyset.$$

Доказательство теоремы 5.12. Обозначим $\mathcal{F} = \bigcup_i \mathcal{F}_i$.

Сначала заменим каждое множество U семейства $\mathcal{F}$ открытым множеством V, таким что $\operatorname{cl} V \subseteq U$ и каждое новое семейство $\mathcal{F}_i$ все ещё покрывает $\mathbb{R}^d$. Далее будем работать с новыми семействами.

По условию теоремы существует положительная константа C, такая что

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \ \forall i = 1, \dots, d+1 \ |f_i(x) - x| \le C$$

и

$$\forall V \in \mathcal{F} \ \forall u \in V \ (u, n(V)) \ge -C.$$

Найдём для всякого $V \in \mathcal{F}$ неотрицательную гладкую функцию $\phi_V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, такую что $V = \{x : \phi_V(x) > 0\}$. По теореме трансверсальности (см. [72], Приложение), можно выбрать все функции ϕ_V так, что для любых $V, W \in \mathcal{F}_i$ множество $\{x : \phi_V(x) = \phi_W(x) > 0\}$ является многообразием коразмерности 1 в $\mathbb{R}^d$.

Возьмём некоторое $i \in 1, \dots, d+1$ и точку $x \in \mathbb{R}^d$, набор значений $\{\phi_V(x)\}_{V \in \mathcal{F}_i}$ расположим по убыванию. Второе по порядку из этих значений назовём $\psi_i(x)$, оно существует, так как в каждом $\mathcal{F}_i$ не менее двух элементов. Функция $\psi_i(x)$ очевидно непрерывна и для всякого $i = 1, \dots, d+1$ и $V \in \mathcal{F}_i$ функция

$$\chi_V(x) = \max\{\phi_V(x) - \psi_i(x), 0\}$$

непрерывна. Заметим, что для всякого $i = 1, \dots, d+1$ и всякой точки x не более чем одна из функций $\chi_V(x)$ $(V \in \mathcal{F}_i)$ отлична от нуля и множество точек, в которых они все равны нулю (обозначим это множество Z_i) является объединением многообразий коразмерности 1.

По теореме трансверсальности, изменив отображения f_i не более чем на ε в метрике C^0, можно считать, что образ отображения $f_1 \times f_2 \times \ldots \times f_{d+1} : (R^d)^{d+1} \to (R^d)^{d+1}$ не задевает $Z_1 \times Z_2 \times \ldots \times Z_{d+1}$. Будем также считать, что определённая в начале доказательства константа C имела запас ε и её определение остаётся в силе для новых отображений f_i.

Для $V \in \mathcal{F}$ введём полупространство $H_V = \{x : (x, n(V)) \geq -2C\}$ и его границу — гиперплоскость h_V. Теперь рассмотрим шар B в $\mathbb{R}^d$ с центром в нуле и радиусом настолько большим, что все непустые пересечения любого количества гиперплоскостей h_V пересекаются с $\operatorname{int} B$; границу B обозначим S.

Рассмотрим отображение

$$f(x) = \sum_{V \in \mathcal{F}} \chi_V(x) n(V).$$

Докажем, что $f(x) = 0$ для некоторого $x \in B$. Предположим противное, тогда отображение f отображает B в $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, следовательно степень отображения $f|_S$ равна нулю. Но если для любого $x \in S$ вектор $f(x)$ не противоположен x, то степень отображения

$f : S \to \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ будет равна единице. Значит для некоторого x вектор $\sum_{V\in\mathcal{F}} \chi_V(x)n(V)$ ему противоположен. Далее рассматриваем такой x.

Пусть $\mathcal{G} = \{V \in \mathcal{F} : \chi_V(x) > 0\}$, тогда $x \in H_V$ для всякого $V \in \mathcal{G}$. Скалярное произведение $(x, \cdot)$ ограничено на $\bigcap_{V\in\mathcal{G}} H(V)$ и обязано принимать на этом множестве максимум, который не менее (x, x). Множество, на котором достигается этот максимум — это пересечение гиперплоскостей $\{h_V\}_{V\in\mathcal{G}}$, которое не пересекается с $\operatorname{int} B$ — противоречие с выбором B.

Значит, найдётся точка x, для которой $f(x) = 0$. В каждом семействе $\mathcal{F}_i$ есть не более одного V_i, для которого $\chi_{V_i}(x) > 0$, и выпуклая оболочка соответствующих $n(V_i)$ содержит 0. Дополнив эту систему представителей $\mathcal{F}_i$ до полной, получим утверждение, требуемое в теореме для данных f_i.

Заметим, что теорема доказана для отображений f_i, которые могут отличаться от исходных не более чем на ε. Найденная точка x_ε всегда лежала в множестве B. Устремим ε к нулю. Из соображений компактности можно считать, что система представителей $\{V_i\}$ одна и та же, x_ε стремится к некоторой точке $x \in B$. В начале теоремы мы перешли от множеств U к содержащимся в них вместе с замыканием множествам V, поэтому получаем, что $x \in \operatorname{cl} V_i \subset U_i$ для всех i. □

Докажем лемму, которая понадобится в доказательстве цветной теоремы Хелли.

Лемма 5.14. *Пусть $\mathcal{F}$ — семейство выпуклых замкнутых множеств в $\mathbb{R}^d$, не имеющее общей точки, и хотя бы одно из множеств $K \in \mathcal{F}$ компактно. Тогда для всякого $K \in \mathcal{F}$ можно выбрать полупространство $H(K) \supseteq K$ таким образом, что семейство $\{H(K)\}_{K\in\mathcal{F}}$ не будет иметь общей точки.*

Доказательство. Для каждого $K \in \mathcal{F}$ рассмотрим конус $C(K)$ в пространстве линейных функций (многочленов степени 1) на $\mathbb{R}^d$, заданный соотношением

$$C(K) = \{l : \forall x \in K\ l(x) \geq 0\}.$$

Возьмём функцию, тождественно равную -1 и рассмотрим два случая.

Случай 1: $-1 \in \operatorname{conv} \bigcup_{K \in \mathcal{F}} C(K)$. Тогда по теореме Каратеодори

$$-1 \equiv \sum_{K \in \mathcal{F}} \alpha(K) l_K(x),$$

где коэффициенты $\alpha_K \geq 0$, причём не равны нулю не более $d + 1$ из них, а $l_K(x) \in C(K)$ — некоторые функции. Если $\alpha_K \neq 0$ и $l_K(x) \not\equiv 0$, то обозначим

$$H(K) = \{x \in \mathbb{R}^d : l(x) \geq 0\},$$

для остальных K выберем $H(K)$ произвольно. Тогда, очевидно,

$$\bigcap_{K \in \mathcal{F}} H(K) = \emptyset.$$

Случай 2: $-1 \notin \operatorname{conv} \bigcup_{K \in \mathcal{F}} C(K)$. Тогда по теореме Хана-Банаха найдётся ненулевой набор $(x_0, x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$, для которого $-x_0 \leq 0$, и для любой линейной функции из некоторого $C(K)$, задаваемой формулой $a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$, мы имеем

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \geq 0.$$

Если $x_0 > 0$, то поделив последнее равенство на x_0 получим, то точка $x = (x_1/x_0, \dots, x_n/x_0)$ обладает свойством

$$\forall K \in \mathcal{F},\ \forall l \in C(K)\ l(x) \geq 0.$$

Следовательно, x принадлежит каждому $K \in \mathcal{F}$ по теореме Хана-Банаха.

Если же $x_0 = 0$, возьмём компактное $K \in \mathcal{F}$ и заметим, что неравенство $a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n \geq 0$ не может выполняться для всех $l \in C(K)$. □

Доказательство цветной теоремы Хелли. Предположим, что теорема доказана для семейств компактных множеств. Тогда рассмотрим семейства $\mathcal{F}_i$ выпуклых замкнутых множеств, каждое множество из $\bigcup \mathcal{F}_i$ заменим на его пересечение с шаром B_R. Для получившихся пересечений теорема верна при любом R, поэтому устремим R к $+\infty$. Из соображений конечности можно считать, что система представителей получается одна и та же, следовательно, она имеет пустое пересечение.

Далее доказываем для выпуклых компактов. По лемме 5.14 можно компакты заменить на полупространства.

Теперь возьмём для каждого полупространства H из наших семейств его дополнение U, задаваемое неравенством $(n(U), x) > c(U)$. Составленные из этих U семейства $\mathcal{G}_i$ покрывают все пространство, так как исходные $\mathcal{F}_i$ не имели общей точки. Применим к этим $\mathcal{G}_i$, их $n(U)$ и функциям $f_i(x) \equiv x$ теорему 5.12. Получим, что некоторая система представителей $U_i \in \mathcal{G}_i$ имеет непустое пересечение и их нормали $n(U_i)$ содержат нуль в своей выпуклой оболочке. Тогда семейство соответствующих H_i будет иметь пустое пересечение, что и требовалось. □

5.4 Цветные обобщения леммы Шпернера

В этой главе теоремы типа ККМ доказываются топологическими методами. Однако, можно действовать в обратном порядке, как это делалось в работах [53, 2]. В этих работах доказывается лемма про триангуляцию симплекса, далее из неё выводится теорема ККМ или её аналог, также можно вывести теорему Брауэра о неподвижной точке. Докажем одну теорему типа леммы Шпернера, выведя её из соответствующего аналога теоремы ККМ, а другое обобщение леммы Шпернера докажем комбинаторно.

Теорема 5.15. *Рассмотрим триангуляцию T симплекса Δ^d с множеством вершин V, и некоторое множество индексов $[m]$, где $m \geq d+1$. Предположим, что множество $[m] \times V$ покрашено в $d+1$ цвет и каждый цвет $i \in [d+1]$ не встречается на $[m] \times \partial_i \Delta^d$. Пусть дано $d+1$ натуральное число $a_1, a_2, \dots, a_{d+1}$, где $\sum_i a_i = m$. Тогда найдётся такое отображение $\sigma : [m] \to V$, что его образ является симплексом триангуляции T и среди точек $(i, \sigma(i))$ ровно a_k точек имеют цвет $k \in [d+1]$.*

Тем не менее, цветное обобщение теоремы Шпернера в работе [2] сильнее утверждения теоремы 5.15. Приведём некоторое обобщение соответствующего результата работы [2].

Введём понятие $\wedge$-произведения комбинаторных симплициальных комплексов (далее просто комплексов):

Определение. Для комплексов K и L с множествами вершин $V(K), V(L)$ обозначим $K \wedge L$ комплекс с множеством вершин $V(K) \times V(L)$, симплексами в котором являются такие подмножества $\sigma \subset V(K) \times V(L)$, которые при проекциях на $V(K)$ и $V(L)$ однозначно проецируются на симплексы K и L.

Определение. Рассмотрим d-мерный симплициальный комплекс K, на максимальных симплексах которого выбрана некоторая ориентация. Пусть множество его вершин $V(K)$ раскрашено в $d+1$ цвет, то есть задано отображение $c : V(K) \to [d+1]$. Предположим, что отображение $c|_\sigma$ биективно. Если ориентация σ в K и ориентация, задаваемая отображением $c|_\sigma$ совпадают, будем говорить, что симплекс σ раскрашен положительно, если ориентации не совпадают, будем говорить, что σ раскрашен отрицательно.

Теорема 5.16. *Рассмотрим симплициальный комплекс T, дающий триангуляцию Δ^d. Предположим, что вершины комплекса $L = \Delta_d \wedge \Delta_d \wedge \ldots \wedge T$ (k сомножителей Δ_d) раскрашены в $d+1$ цвет, и раскраска согласована с гипергранями T в том смысле, что i-й цвет не встречается на $\Delta_d \wedge \Delta_d \wedge \ldots \wedge \partial_i T$.*

Комплекс T имеет естественную ориентацию, а отображение проекции $L \to T$ даёт соответствующую ориентацию максимальных симплексов L. Тогда разность между количеством положительно и отрицательно раскрашенных симплексов в L равна $((d+1)!)^k$.

Это утверждение для $k = 0$ является обычной леммой Шпернера, случай этого утверждения для $k = 1$ является утверждением из [2].

Доказательство теоремы 5.15. Рассмотрим двойственное к T клеточное разбиение Δ^d. Вершину $v \in V$ и соответствующую ей клетку двойственного разбиения отнесём к множеству A_{ij}, если цвет (j, v) равен i. Применив к A_{ij} лемму 5.7, получим требуемое утверждение. □

Доказательство теоремы 5.16. Следуя работе [2] перейдём к случаю, когда край $\partial\Delta^d$ не подразделён триангуляцией T. Тогда заметим, что всякий $(d-1)$-мерный симплекс L лежит либо в одном d-симплексе L (если его проекция на T равна грани $\partial_i\Delta^d$) или в двух d-симплексах L. Причём ориентация $(d-1)$-симплекса и d-симплексов согласована. Значит можно применить к L стандартное рассуждение о входах и выходах из доказательства леммы Шпернера (см. [2, 53]) и остаётся только подсчитать количество $(d-1)$-симплексов L, проецирующихся в гипергрань $\partial_{d+1}\Delta^d \subseteq T$, которое равно $((d+1)!)^k$. □

Глава 6

Геометрия пространства плоскостей

В этой главе приведены геометрические следствия результатов о топологии пространства k-плоскостей в $\mathbb{R}^n$, приведённых в разделе 2.8 и главе 3.

Теоремы типа Борсука-Улама о покрытиях из раздела 2.8 дают следствия о существовании плоских трансверсалей для семейств подмножеств $\mathbb{R}^n$, результаты о делении мер гиперплоскостями.

Также приводятся теоремы типа Хелли для плоских трансверсалей, являющихся следствиями теорем типа Люстерника-Шнирельмана из главы 2.

6.1 Геометрические свойства грассманиана

В этом разделе собраны утверждения о конфигурационном пространстве γ_n^{n-k} (см. главу 3) k-плоскостей в $\mathbb{R}^n$ и соответствующем грассманиане G_n^{n-k}. Для начала введём определения, относящиеся к отделимости.

Определение. Подмножества X и Y линейного пространства L *отделимы*, если найдётся линейная функция (многочлен степени не выше первой) $l : L \to \mathbb{R}$ такая, что $l(X) < 0$ и $l(Y) > 0$.

Определение. Семейства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ подмножеств линейного пространства L *отделимы*, если найдётся линейная функция $l : L \to \mathbb{R}$ такая, что $l(X) < 0$ для любого $X \in \mathcal{F}$ и $l(Y) > 0$ для любого $Y \in \mathcal{G}$.

Определение. Два семейства отрезков на прямой $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ назовём *выравненными*, если выполняется одна из альтернатив:

1) все правые концы $\mathcal{A}$ попали в одну и ту же точку a, все левые концы $\mathcal{B}$ попали в одну и ту же точку b, и либо a левее b, либо все отрезки семейства $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ содержат отрезок $[ba]$;

2) все правые концы $\mathcal{B}$ попали в одну и ту же точку b, все левые концы $\mathcal{A}$ попали в одну и ту же точку a, и либо b левее a, либо все отрезки семейства $\mathcal{B} \cup \mathcal{A}$ содержат отрезок $[ab]$.

Непрерывная зависимость выпуклого компакта от параметра далее понимается в смысле метрики Хаусдорфа.

Теорема 6.1. *Рассмотрим $n+1$ замкнутое подмножество $V_1, V_2, \dots, V_{n+1}$ в γ_n^1, для которых пересечение V_i с любым слоем L является непустым отрезком (возможно, точкой), непрерывно зависящим от L. Тогда выполняется одна из альтернатив:*

1) найдётся такой слой L и индекс $i \in [n+1]$, что $V_i \cap L$ содержится в остальных $V_j \cap L$;

2) для всякого разбиения семейства $\{V_i\}$ на два семейства $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ найдётся такой слой L, что семейства

$$\mathcal{F}_1(L) = \{U \cap L : U \in \mathcal{F}_1\} \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_2(L) = \{U \cap L : U \in \mathcal{F}_2\}$$

выравнены в L.

Очевидно, пара выравненных семейств либо отделима, либо имеет общую точку. Поэтому из теоремы 6.1 следует такое утверждение:

Следствие 6.2. *Рассмотрим* $n+1$ *замкнутое подмножество* $V_1, V_2, \dots, V_{n+1}$ *в* γ_n^1, *для которых пересечение* V_i *с любым слоем* L *является непустым отрезком (возможно, точкой), непрерывно зависящим от* L. *Тогда либо множества* V_i *имеют общую точку; либо для всякого разбиения семейства* $\{V_i\}$ *на два семейства* $\mathcal{F}_1$ *и* $\mathcal{F}_2$ *найдётся такой слой* L, *что семейства*

$$\mathcal{F}_1(L) = \{U \cap L : U \in \mathcal{F}_1\} \quad \textit{и} \quad \mathcal{F}_2(L) = \{U \cap L : U \in \mathcal{F}_2\}$$

отделимы в L.

Теперь сформулируем утверждения для произвольного k и расслоения γ_n^k. Сначала нам понадобятся несколько определений.

Определение. Пару точек на границе выпуклого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ назовём *антиподальной* по отношению к K, если их можно заключить в пару опорных гиперплоскостей к K с противоположными внешними нормалями.

Слово «антиподальный» уже использовалось ранее для пространств с Z_2-действием, но далее из контекста всегда понятно, что имеется в виду. Заметим, что точки x и y антиподальны относительно K тогда и только тогда, когда они являются концами аффинного диаметра K, иначе говоря, отрезок xy имеет максимальную длину среди отрезков $\ell \cap K$, где ℓ — любая прямая, параллельная xy.

Определение. Семейство компактов $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}^n$ назовём *неантиподальным*, если никакое $V \in \mathcal{F}$ не содержит пары антиподальных точек по отношению к $\operatorname{conv} \bigcup \mathcal{F}$.

Далее при рассмотрении векторных расслоений будем считать, что на каждом слое задана норма с гладким единичным шаром и эта норма непрерывно зависит от слоя. В частности, на γ_n^k расстояние может быть стандартным евклидовым.

Теорема 6.3. *Рассмотрим* $n+1$ *компактное множество* $V_1, V_2, \dots, V_{n+1}$ *в* γ_n^k, *для которых при любом* $i = 1, \dots, n+1$ *пересечение* $V_i \cap L$ *непусто и непрерывно зависит от* L *в метрике Хаусдорфа. Предположим, что для всякого слоя* $L \in G_n^k$ *семейство* $\{V_i \cap L\}_{i=1}^{n+1}$ *неантиподально как семейство компактов в* L. *Тогда найдётся точка* x *в некотором слое* L, *которая находится на одинаковом расстоянии от всех* $V_i \cap L$.

Теорема 6.4. *Рассмотрим* $n+1$ *компактное множество* $V_1, V_2, \dots, V_{n+1}$ *в* γ_n^k, *для которых при любом* $i = 1, \dots, n+1$ *пересечение* $V_i \cap L$ *непусто и непрерывно зависит от* L *в метрике Хаусдорфа. Предположим, что для всякого слоя* $L \subset \gamma_n^k$ *семейство* $\{V_i \cap L\}_{i=1}^{n+1}$ *неантиподально как семейство компактов в* L *и множество* $\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} V_i\right) \cap L$ *выпукло. Тогда множества* V_i *имеют общую точку.*

Следующая теорема даёт частичное продвижение по гипотезе о полях многогранников в расслоении γ_n^k (см. [91], Гипотеза 1 и Теорема 12).

Теорема 6.5. *Пусть в расслоении* γ_n^k *даны* m *непрерывных сечений* $s_1, \dots, s_m$, *причём для всякого* $L \in G_n^k$ *многогранник* $P(L) = \operatorname{conv}\{s_1(L), \dots, s_m(L)\}$ *имеет непустую внутренность. Тогда найдётся такой слой* $L \in G_n^k$ *и пара непересекающихся опорных к* $P(L)$ *полупространств* $H_1, H_2 \subset L$, *что множество* $H_1 \cup H_2$ *содержит не менее* $n+1$ *точки из* $\{s_1(L), \dots, s_m(L)\}$.

В разделах 6.2, 6.3, 6.4 содержатся формулировки следствий из вышеприведённых теорем и некоторые другие результаты, полученные применением аналогичной техники.

Доказательство теоремы 6.1. Можно выбрать такие размеры шара в каждом слое расслоения γ_n^1, что все наши множества будут лежать в пространстве шаров $B(\gamma_n^1)$.

Теперь определим подмножества U_i пространства сфер следующим образом. Возьмём некоторую точку $s \in S(\gamma_n^1)$, лежащую в слое L. На каждом отрезке $V_i \cap L$ выберем самую дальнюю от s точку $f_i(s)$. Эти точки очевидно зависят от s непрерывно. Теперь обозначим ближайшую к s из этих точек за $f(s)$, эта функция также непрерывно зависит от s. Тогда положим

$$U_i = \{s \in S(\gamma_n^1) : f(s) = f_i(s)\}.$$

Эти множества замкнуты. Если какое-то U_i содержит пару антиподальных точек $s, s' \in S(\gamma_n^1)$, то отрезок $V_i \cap L$ удовлетворяет первой альтернативе теоремы.

Иначе применим теорему 3.6. Для всякого разбиения множества индексов $\{1, 2, \dots, n+1\} = I_1 \cup I_2$ найдётся такая пара антиподальных точек $s, s' \in S(\gamma_n^1)$, что

$$s \in \cap_{i \in I_1} U_i, \quad s' \in \cap_{i \in I_2} U_i.$$

Рассмотрим семейства отрезков $\mathcal{A} = \{V_i \cap L\}_{i \in I_1}$ и $\mathcal{B} = \{V_i \cap L\}_{i \in I_2}$ и будем считать, что s лежит левее s'. Тогда все правые концы $\mathcal{A}$ совпадают с точкой a, все левые концы $\mathcal{B}$ совпадают с точкой b и либо a левее b, либо все отрезки обоих семейств содержат $[ba]$. То есть семейства отрезков выравнены. □

Доказательство теоремы 6.3. Обозначим

$$U_i = \{x \in \gamma_n^k : x \text{ лежит в слое } L,\ \operatorname{dist}(x, V_i \cap L) = \min_{j=1,\dots,n+1} \operatorname{dist}(x, V_j \cap L)\}.$$

Из непрерывной зависимости $V_i \cap L$ от слоя следует замкнутость множеств U_i. Будем рассматривать сферы радиуса R в расслоении γ_n^k, обозначим расслоение сфер $S(\gamma)n^k)$. Покажем, что для достаточно большого R множества $U_i \cap S(\gamma_n^k)$ не содержат антиподальных точек.

Предположим противное, тогда можно считать, множество $U_i \cap S(\gamma_n^k)$ содержит пару антиподальных точек $R_m x_m$ и $-R_m x_m$ для некоторой последовательности радиусов $R_m \to +\infty$. Это значит, что ближайшие к $R_m x_m$ и $-R_m x_m$ точки объединения $\bigcup V_i$ принадлежат одному и тому же V_i, обозначим эти точки y_m и z_m. Из соображений компактности можно считать, что точки x_m, y_m, z_m стремятся к некоторым точкам x, y, z в слое L. Тогда получим, что семейство множеств $\{V_i \cap L\}$ имеет на границе своей выпуклой оболочки пару точек y, z, принадлежащую одному и тому же V_i, кроме того, рассматривая пределы соответствующих сфер с центрами $R_m x_m, -R_m x_m$ и радиусами $|R_m x_m - y_m|, |-R_m x_m - z_m|$, которые являются полупространствами, получим противоречие с неантиподальностью семейства $\{V_i \cap L\}$. Значит, для некоторого R множества $U_i \cap S(\gamma_n^k)$ не содержат антиподальных точек.

Применяя теорему 3.6 находим общую точку семейства $\{U_i\}$, что в точности даёт утверждение теоремы. □

Доказательство теоремы 6.4. Применим теорему 6.3 и найдём точку $x \in L$, находящуюся на равных расстояниях от всех $V_i \cap L$.

Предположим, что это расстояние положительно. Обозначим множество ближайших к x точек $\bigcup_{i=1}^{n+1} V_i \cap L$ через K. Очевидно, K пересекается со всеми V_i, кроме того, оно выпукло и имеет пустую внутренность, следовательно оно содержится в некоторой опорной к $\bigcup_{i=1}^{n+1} V_i \cap L$ гиперплоскости H. Но тогда противоположная к H опорная гиперплоскость не может содержать точек никакого из множеств V_i из неантиподальности семейства $\{V_i \cap L\}$. □

Доказательство теоремы 6.5. Рассмотрим пространство $S(\gamma_n^k)$ и определим в нем замкнутые подмножества

$$U_i = \{(n, L) : L \in G_n^k,\ n \in S(L),\ (n, s_i(L)) = \max_{j\in[m]}(n, s_j(L))\}.$$

Из непустоты внутренности $P(L)$ следует неантиподальность этих подмножеств. Теперь применим теоремы 3.4 и 2.30 и получим в точности утверждение данной теоремы. □

6.2 Разбиение мер гиперплоскостями

Сначала сформулируем обобщение известной теоремы (см. [10, 13, 39]) о том, что всякие $n+1$ выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$ либо могут быть пересечены гиперплоскостью; либо каждые два непересекающихся подсемейства этого семейства отделимы гиперплоскостью.

Далее будут рассматриваться абсолютно непрерывные меры в $\mathbb{R}^n$ (см. раздел 4.6). Сделаем несколько определений.

Определение. Пару из абсолютно непрерывной вероятностной меры с компактным носителем μ и числа $\varepsilon \in [0, 1/2)$ будем называть *мерой с допуском*. Для краткости при рассмотрении нескольких мер μ_i допуск каждой будем обозначать $\varepsilon(\mu_i)$.

Определение. Пусть в $\mathbb{R}^n$ дана мера с допуском μ. Будем говорить, что гиперплоскость h *пересекает (с допуском)* меру μ, если h делит $\mathbb{R}^n$ на два полупространства H_1 и H_2 и

$$\mu(H_1), \mu(H_2) \geq \varepsilon(\mu).$$

Определение. Пусть в $\mathbb{R}^n$ дана мера с допуском μ. Будем говорить, что полупространство H *содержит (с допуском)* меру μ, если

$$\mu(H) > 1 - \varepsilon(\mu).$$

Определение. Пусть в $\mathbb{R}^n$ даны два семейства мер с допусками $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$. Будем говорить, что гиперплоскость h *разделяет (с допуском)* семейства $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, если h делит $\mathbb{R}^n$ на два полупространства H_1 и H_2, для любой $\mu \in \mathcal{M}_1$ H_1 содержит с допуском μ и для любой $\mu \in \mathcal{M}_2$ H_2 содержит с допуском μ.

Из следствия 6.2 выводится следующее утверждение.

Следствие 6.6. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ дано семейство из $n+1$ меры с допуском $\mathcal{M}$. Тогда либо найдётся гиперплоскость, которая пересекает с допуском все меры $\mathcal{M}$; или для всякого разбиения $\mathcal{M}$ на два непустых семейства $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ найдётся гиперплоскость, которая разделяет с допуском $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$.*

Доказательство. Если $\mathcal{M} = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n+1}\}$, то обозначим за V_i множество гиперплоскостей, пересекающих с допуском μ_i. Применяя к этим множествам следствие 6.2, получаем требуемое утверждение. □

Докажем ещё одну теорему, обобщающую результат работы [6].

Определение. Рассмотрим семейство из n мер с допуском $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Обозначим за $X \subseteq \gamma_n^1$ множество гиперплоскостей, пересекающих с допуском все эти меры и рассмотрим естественную проекцию $p : X \to G_n^1$. Будем говорить, что семейство мер с допуском $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ *плоское*, если отображение p пропускается через отображение универсального накрытия $\pi : S^{n-1} \to G_n^1$, то есть $p = \pi \circ \tilde{p}$.

Теорема 6.7. *Рассмотрим плоское семейство мер с допуском $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и числа $\{\alpha_i\}$ такие, что либо $\alpha_i = \varepsilon(\mu_i)$, либо $\alpha_i = 1-\varepsilon(\mu_i)$. В таком случае существует полупространство $H \subset \mathbb{R}^n$ такое, что для всех $i = 1, \dots, n$*

$$\mu_i(H) = \alpha_i.$$

Условие на отображение p здесь обобщает условие отделимости носителей мер из Теоремы 1 работы [6], так как семейство мер, носители которых отделимы, является плоским при любых допусках. В формулировке участвуют допуски, не равные $1/2$, но предельным переходом можно убедиться, что для допусков, некоторые из которых равны $1/2$ она тоже верна. Если все допуски равны $1/2$, мы получаем «теорему о бутерброде».

Доказательство. Обозначим за V_i множество гиперплоскостей, пересекающих с допуском меру μ_i. Дальше будем действовать аналогично доказательству теоремы 6.1.

Рассмотрим пространство достаточно больших шаров $B(\gamma_n^1)$, содержащее все V_i и определим отображения $f_i : S(\gamma_n^1) \to B(\gamma_n^1)$ $(i = 1, \dots, n)$ и $f : S(\gamma_n^1) \to B(\gamma_n^1)$ как в доказательстве теоремы 6.1. Теперь определим замкнутые подмножества $U_0, U_1, \dots, U_n \subseteq S(\gamma_n^1)$.

Возьмём проекцию множества X на G_n^1 и обозначим ее Y. Определим множество $Z = p^{-1}(Y) \cap S(\gamma_n^1)$. Множество Z является двукратным накрытием Y и по условию на отображение p накрытие $Z \to Y$ тривиально, то есть $Z = Z_1 \cup Z_2$, причём $p : Z_1 \to Y$ и $p : Z_2 \to Y$ — биекции.

Положим теперь $U_0 = Z_1$, и

$$U_i = \{s \in S(\gamma_n^1) \setminus \operatorname{int} U_0 : f(s) = f_i(s)\}.$$

Множество U_0 не содержит антиподальных точек по построению. Предположим, что U_i содержит антиподальные точки $s, s' \in S(\gamma_n^1)$ в слое L. Тогда пересечение $V_i \cap L$ содержится во всех пересечениях $V_j \cap L$. Заметим, что длина $V_i \cap L$ больше нуля, так как $\varepsilon(\mu_i) < 1/2$. Тогда $p(s) = p(s') \in \operatorname{int} Y$, то есть одна из точек s, s' лежит внутри U_0 — противоречие.

Теперь положим $I = \{0, 1, \dots, n\}$,

$$I_1 = \{i = 1, \dots, n : \alpha_i = 1 - \varepsilon(\mu_i)\}$$

и $I_2 = I \setminus I_1$. Применив теорему 3.6 видим, что найдётся пара антиподальных точек $s, s' \in S(\gamma_n^1)$, для которых

$$\forall i \in I_1\ f(s) = f_i(s), \quad \forall i \in I_2 \setminus \{0\}\ f(s') = f_i(s'), \quad s' \in \operatorname{bd} U_0.$$

Значит, отрезки $V_i \cap L$ пересекаются по одной точке, которая является правой для $i \in I_1$ и левой для $i \in I_2 \setminus \{0\}$. Легко видеть, что эта точка определяет соответствующее полупространство, требуемое в условии. $\square$

6.3 Теоремы типа Борсука-Улама для плоскостей

Сделаем определения и выведем следствие из теорем 6.3 и 6.4.

Определение. Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *l-выпуклым*, если его проекция на любое l-мерное подпространство $\mathbb{R}^n$ выпукла.

Определение. k-трансверсалью семейства множеств называется k-плоскость, пересекающая каждое множество семейства.

Следствие 6.8. *Если в $\mathbb{R}^n$ дано неантиподальное семейство компактов $\mathcal{F}$, $|\mathcal{F}| = n + 1$, то найдётся k-плоскость, находящаяся от всех множеств семейства на равном расстоянии. Если кроме того $\bigcup \mathcal{F}$ $(n - k)$-выпукло, то у него существует k-трансверсаль.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F} = \{K_i\}_{i=1}^{n+1}$. Обозначим за V_i множество k-плоскостей, пересекающих K_i. Тогда пересечения $V_i \cap L$ — это просто проекции K_i на L, следовательно они образуют неантиподальное семейство. Применив к V_i теоремы 6.3 или 6.4, получим требуемое. □

Определение. Пусть даны два множества $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$. *Уклонением* X от Y называется величина

$$\delta(X, Y) = \sup_{x \in X} \operatorname{dist}(x, Y).$$

Следствие 6.9. *Если в $\mathbb{R}^n$ дано неантиподальное семейство компактов $\mathcal{F}$, $|\mathcal{F}| = n + 1$, то найдётся такая k-плоскость M, что уклонения всех множеств семейства $\mathcal{F}$ от M одинаковы.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F} = \{K_i\}_{i=1}^{n+1}$. Обозначим

$$V_i = \{M \in \gamma_n^{n-k} : \delta(\bigcup \mathcal{F}, M) = \delta(K_i, M)\}.$$

Тогда аналогично доказательству теоремы 6.3 можно заметить, что при достаточно большом радиусе шара в расслоении шаров $B(\gamma_n^{n-k})$, никакое V_i не содержит антиподальных точек в соответствующем расслоении сфер $S(\gamma_n^{n-k})$. Отсюда следует существование непустого пересечения $\bigcap_{i=1}^{n+1} V_i$, что и требовалось доказать. ☐

Заметим, что в следствиях 6.8 и 6.9 расстояние можно брать в любой норме с гладким единичным шаром.

Из того, что $\operatorname{hind} S(\gamma_n^k) = n-1$ можно вывести ещё одну теорему о покрытиях сферы. Сначала сделаем пару определений.

Определение. Для единичной сферы $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ назовём *k-подсферой* всякое пересечение k-мерного линейного подпространства $L \subseteq \mathbb{R}^n$ с S^{n-1}.

Определение. Для единичной сферы $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ назовём *k-полусферой* половину (полусферу) некоторой k-подсферы.

Теорема 6.10. *Пусть на сфере S^{n-1} даны n открытых подмножеств $V_1, \dots, V_n$, причём всякое V_i пересекает всякую k-подсферу. Тогда найдётся k-полусфера, пересекающая все множества V_i.*

Доказательство. Множество k-подсфер параметризуется грассманианом G_n^k, а множество k-полусфер параметризуется полупространствами в слоях γ_n^k, границы которых содержат начало координат, то есть оно параметризуется $S(\gamma_n^k)$.

Обозначим за U_i множество k-полусфер, не пересекающих V_i. Это множество компактно и из условия теоремы следует, что оно не содержит антиподальных точек. Так как по теореме 3.4 $\operatorname{hind} S(\gamma_n^k) = n-1$, то по обобщённой теореме Борсука-Улама для покрытий (или по теореме 2.30 данной работы) множества U_i не могут покрыть $S(\gamma_n^k)$, из чего следует утверждение теоремы. ☐

Теорема 6.11. *Пусть на сфере S^{n-1} даны $n+1$ открытых подмножеств $V_1, \dots, V_{n+1}$, причём всякое V_i пересекает всякую k-подсферу. Тогда либо найдётся k-полусфера, пересекающая все множества V_i; либо для всякого разбиения $\{1, 2, \dots, n+1\} = I_1 \cap I_2$ найдётся пара k-полусфер H_1 и H_2, являющихся половинками одной k-подсферы, такая что $V_i \cap H_1 = \emptyset$ для любого $i \in I_1$ и $V_i \cap H_2 = \emptyset$ для любого $i \in I_2$.*

Доказательство. Как и в предыдущей теореме обозначим за U_i множество k-полусфер, не пересекающих V_i. Теперь утверждение теоремы следует из теорем 2.29 и 3.4. □

6.4 Теоремы типа Хелли для плоских трансверсалей

Приведём несколько теорем, близких к теореме о существовании трансверсали из [15], теорема 9. Можно также сравнить результаты этого раздела с теоремами Хорна-Кли и Дольникова о трансверсалях.

Теорема 6.12. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ даны $n+1$ семейство 1-выпуклых компактов $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in[n+1]}$. Пусть в каждом семействе любые два компакта пересекаются.*

Тогда выполняется одна из следующих альтернатив:

1) семейство $\bigcup_{i\in[n+1]} \mathcal{F}_i$ имеет $n-1$-трансверсаль;

2) для всякого разбиения множества индексов $[n+1]$ на два множества I_1 и I_2 найдётся такая гиперплоскость h и набор представителей $C_i \in \mathcal{F}_i$ $(i \in [n+1])$, что множества $\{C_i\}_{i\in I_1}$ лежат с одной стороны от h, а $\{C_i\}_{i\in I_2}$ лежат с другой стороны от неё.

Доказательство. Для всякой прямой $l \in G_n^1$ ортогональную проекцию на эту прямую обозначим π_l и положим

$$V_i(l) = \bigcap_{C \in \mathcal{F}_i} \pi_l(C).$$

Эти множества непусты, так как в каждом семействе отрезков $\{\pi_l(C)\}_{C \in \mathcal{F}_i}$ любые два пересекаются. Также ясно, что они непрерывно зависят от l. Обозначим $V_i = \bigcup_{l \in G_n^1} V_i(l)$.

Применим к $\{V_i\}$ следствие 6.2. Тогда первая альтернатива следствия 6.2 в точности соответствует первой альтернативе данной теоремы.

Иначе для всякого разбиения $[n+1] = I_1 \cup I_2$ будем иметь гиперплоскость h, разделяющую $\{V_i\}_{i \in I_1}$ и $\{V_i\}_{i \in I_2}$. Рассмотрим проекции на прямую $l \perp h$, введём на ней направления «слева» и «справа». Тогда можно считать, что на l $\{V_i\}_{i \in I_1}$ лежат слева от $\pi_l(h)$, а $\{V_i\}_{i \in I_2}$ лежат справа от $\pi_l(h)$. Тогда каждый правый конец V_i $(i \in I_1)$ является правым концом некоторого $\pi_l(C_i)$ $(C_i \in \mathcal{F}_i)$ и каждый левый конец V_i $(i \in I_2)$ является левым концом некоторого $\pi_l(C_i)$ $(C_i \in \mathcal{F}_i)$. Тогда $\{C_i\}_{i \in [n+1]}$ дают искомую систему представителей для разбиения $[n+1] = I_1 \cup I_2$. □

Теорема 6.13. *Пусть* $0 < k < n$ *и в* $\mathbb{R}^n$ *дано* $n - k + 1$ *семейство* $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in [n-k+1]}$ *выпуклых компактов. Тогда выполняется одна из следующих альтернатив:*

1) Найдётся система представителей $K_i \in \mathcal{F}_i$*, такая что* $\bigcap_{i \in [n-k+1]} K_i = \emptyset$*;*

2) В некотором из семейств $\mathcal{F}_i$ *любые* $k+1$ *или менее множеств имеют* $k-1$*-трансверсаль.*

3) Найдётся семейство параллельных k*-плоскостей* $\{\alpha_i\}_{i \in [n-k+1]}$*, такое что для всех* $i \in [n-k+1]$ α_i *является* k*-трансверсалью* $\mathcal{F}_i$*.*

Причём третья альтернатива возможна только если $2k \le n$*,* $k = 1$ *или* $k = 2$ *и* $n = 2^l$*.*

Доказательство. Предположим, что первая альтернатива не выполняется. Тогда возьмём любое $L \in G_n^{n-k}$ и спроецируем на него всю нашу систему множеств. По цветной теореме Хелли (см. [4]) некоторое семейство $\pi_L(\mathcal{F}_i)$ имеет общую точку, такой точке соответствует некоторая перпендикулярная L k-трансверсаль для $\mathcal{F}_i$. Обозначим

$$U_i = \{L \in G_n^{k^+} : \bigcap \pi_L(\mathcal{F}_i) \neq \emptyset\}.$$

Пусть условие (2) не выполнено. Тогда возьмём соответствующий набор множеств без $k-1$-трансверсали (их должно быть ровно $k+1$) $K_1, K_2, \dots, K_{k+1} \in \mathcal{F}_i$. Для всякой $L \in U_i$ можно взять соответствующую L k-трансверсаль α для $\mathcal{F}_i$ и сравнить ориентацию на α, задаваемую любым набором точек $x_i \in K_i \cap \alpha$ $(i \in [k+1])$ с ориентацией α, соответствующей ориентации L. По отрицанию условия (2) все такие наборы $(x_1, \dots, x_{k+1})$ задают одну и ту же ориентацию, так как они не лежат ни в какой $k-1$-плоскости. Если ориентации совпали, припишем L знак $+$, иначе припишем $-$.

Таким образом показано, что при невыполнении условия (2) все множества U_i несущественны, теперь по теореме 3.7 и следствию 2.31 все U_i должны иметь общую точку, что равносильно условию (3). По теореме 3.7 такое возможно только при $k = 1$ или при $k = 2$ и $n = 2^l$. □

В случае, когда количество семейств невелико по сравнению с n, утверждение теоремы 6.13 можно уточнить.

Теорема 6.14. *Пусть $n = 2k + 1 \geq 3$ и в $\mathbb{R}^n$ дано 2 семейства $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ выпуклых компактов. Тогда выполняется одна из следующих альтернатив:*

1) Найдётся два представителя $K_1 \in \mathcal{F}_1$, $K_2 \in \mathcal{F}_2$, для которых $K_1 \cap K_2 = \emptyset$;

2) В некотором из семейств $\mathcal{F}_i$ любые $k+2$ или менее множеств имеют k-трансверсаль.

Теорема 6.15. *Пусть $k > 2, 2k < n + 2$ и в $\mathbb{R}^n$ дано k семейств $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ выпуклых компактов. Пусть для некоторого $m \le n - k + 1$ выполняется*

$$2^{\lceil \log_2 n \rceil} \ge k 2^{\lceil \log_2 (n-m) \rceil} + 2.$$

Тогда выполняется одна из следующих альтернатив:

1) Найдётся система представителей $K_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, K_k \in \mathcal{F}_k$, для которых $\bigcap_{i=1}^k K_i = \emptyset$;

2) В некотором из семейств $\mathcal{F}_i$ любые $m + 1$ или менее множеств имеют $m - 1$-трансверсаль.

Неравенство в условии теоремы 6.15 выглядит достаточно сложно, но будет заведомо выполнено, если например $n \ge k(2n - 2m - 1) + 2$.

Следующая лемма обобщает рассуждения из доказательства теоремы 6.13.

Лемма 6.16. *Предположим, что $k + 1 \le m \le n - 1$ и семейство строго выпуклых компактов $\mathcal{F} = \{K_1, K_2, \dots, K_{k+1}\}$ в $\mathbb{R}^n$ не имеет $k - 1$-трансверсали. Тогда множество ориентированных m-трансверсалей $\mathcal{F}$ можно Z_2-эквивариантно отобразить в G_{n-k}^{m-k+}.*

Доказательство. Определим векторное расслоение $\eta \to K_1 \times \dots \times K_{k+1}$ следующим образом. У всякого набора точек $(x_1, \dots, x_{k+1}) \in K_1 \times \dots \times K_{k+1}$ аффинная оболочка $L(x_1, \dots, x_{k+1})$ имеет размерность ровно k, так как иначе у $\mathcal{F}$ нашлась бы $k - 1$-трансверсаль. Факторпространство $M(x_1, \dots, x_{k+1}) = \mathbb{R}^n / L(x_1, \dots, x_{k+1})$ является $n - k$-мерным векторном пространством, и объединение всех таких пространств даёт расслоение η.

Пространство $K_1 \times \dots \times K_{k+1}$ стягиваемо, значит любое векторное расслоение над ним тривиально, то есть можем зафиксировать изоморфизм векторных расслоений

$$\phi : \eta \to \mathbb{R}^{n-k} \times K_1 \times \dots \times K_{k+1}$$

и его композицию с проекцией на первое слагаемое

$$\psi : \eta \to \mathbb{R}^{n-k}.$$

Обозначим теперь множество ориентированных m-трансверсалей для $\mathcal{F}$ через $T \subseteq \gamma_n^{m+}$. Для каждой $\tau \in T$ можем непрерывно (из строгой выпуклости) по τ выбрать $k+1$ точку в пересечениях

$$x_1(\tau) \in \tau \cap K_1\ x_2(\tau) \in \tau \cap K_2,\ \dots,\ x_{k+1}(\tau) \in \tau \cap K_{k+1}.$$

Образ τ в естественной проекции $\mathbb{R}^n \to M(x_1(t), \dots, x_{k+1}(t))$ является ориентированным $m-k$-мерным линейным подпространством $M(x_1(t), \dots, x_{k+1}(t))$, а после отображения $\psi : M \to \mathbb{R}^{n-k}$ является ориентированным $m-k$-мерным подпространством в $\mathbb{R}^{n-k}$, что даёт искомое отображение T в G_{n-k}^{m-k+}. □

Доказательство теоремы 6.14. Из соображений компактности ясно, что достаточно доказать теорему для семейств строго выпуклых компактов.

Обозначим множество ориентированных гиперплоских трансверсалей семейства $\mathcal{F}_i$ через $Y_i \subseteq \gamma_n^{1+}$. Обозначим естественную проекцию этого множества на $G_n^{1+} = S^{n-1}$ через $X_i = \pi_\gamma(Y_i)$.

Тогда, если первая альтернатива не выполняется, то очевидно $X_1 \cup X_2 = S^{n-1}$ и по лемме 2.18 для одного из X_i имеем

$$\operatorname{hind} X_i \geq k.$$

В дальнейших рассуждениях фиксируем i и предполагаем противное. Пусть в $\mathcal{F}_i$ найдутся $k+2$ множества $K_1, \dots, K_{k+2}$ без k-трансверсали.

По лемме 6.16 множество Y_i эквивариантно отображается в $G_k^{1+} = S^{k-1}$ некоторым отображением f_i. Естественная проекция $\pi_\gamma : Y_i \to X_i$ в качестве слоёв имеет отрезки, непрерывно зависящие от слоя. Следовательно, $\pi_\gamma|_{Y_i}$ имеет (очевидно, эквивариантное) сечение τ_i :

$X_i \to Y_i$. Значит получаем эквивариантное отображение $f_i \circ \tau_i : X_i \to S^{k-1}$, что невозможно по свойствам индекса. □

Доказательство теоремы 6.15. Из соображений компактности ясно, что достаточно доказать теорему для семейств строго выпуклых компактов.

Обозначим $Y_i \subseteq {\gamma_n^{k-1}}^+$ — множество $n-k+1$-трансверсалей для $\mathcal{F}_i$, $X_i = \pi_\gamma(Y_i) \subseteq {G_n^{k-1}}^+$ — множество соответствующих направлений. Заметим, что проекция $\pi_\gamma : Y_i \to X_i$ имеет слоем выпуклое множество, непрерывно (из строгой выпуклости) зависящее от слоя, и эта проекция имеет сечение $\tau_i : X_i \to Y_i$.

Тогда, если первая альтернатива не выполняется, то по цветной теореме Хелли для проекций наших семейств на $k-1$-мерные плоскости $\bigcup_{i=1}^k X_i = {G_n^{n-k+1}}^+$.

Если же не выполняется вторая альтернатива, то по лемме 6.16 каждое Y_i (а значит и X_i) можно отобразить в ${G_{n-m}^{n-k-m+1}}^+$. По монотонности индекса и теореме 3.7

$$\operatorname{hind} X_i \leq 2^{\lceil \log_2(n-m) \rceil} - 1.$$

Тогда по лемме 2.18 получаем

$$\operatorname{hind} {G_n^{n-k+1}}^+ \leq k 2^{\lceil \log_2(n-m) \rceil} - 1.$$

Но теорема 3.7 даёт оценку $\operatorname{hind} {G_n^{n-k+1}}^+ \geq 2^{\lceil \log_2 n \rceil} - 2$, что приводит к противоречию с неравенством из условия теоремы. □

Глава 7

Бильярды в выпуклом теле

В данном разделе доказывается результат о бильярдных траекториях в гладком выпуклом теле. В этом результате активно используется топологическая техника, связанная с действием группы Z_p и вычислением индекса этого действия. Также доказывается некоторое утверждение о квазинеподвижных точках (см. [99], гл. IV, §6).

Изучение бильярдных траекторий имеет долгую историю. Бильярды на плоскости изучались в работе [9], где уже были выдвинуты основные идеи, связанные с вариационным принципом и критическими точками функционала.

Люстерник и Шнирельман [85, 86] ввели понятие категории для изучения разного рода вариационных задач, которое также используется при изучении бильярдов и, конкретно, в результатах данной работы.

7.1 Задача о количестве замкнутых траекторий

Введём несколько определений, касающихся бильярдных траекторий в выпуклых телах.

Определение. *Бильярдной траекторией* в выпуклом гладком теле $T \in \mathbb{R}^d$ назовём ломаную $P \subset T$, которая имеет точки излома только на границе T и в каждой точке излома меняет направление по закону упругого отражения.

Определение. *Длиной* замкнутой бильярдной траектории P назовём количество точек излома на P.

Заметим, что в данной работе рассматриваются такие замкнутые траектории с множеством изломов $(x_1, x_2, \dots, x_l)$, что точки x_i и x_j могут совпадать, если $i - j \neq 0, \pm 1 \mod l$. Также допускаются самопересечения во внутренних точках отрезков ломаной.

Вопрос о количестве различных замкнутых траекторий данной длины n был поставлен довольно давно, в работе [9] была получена оценка снизу в двумерном случае. В книге [38] была сформулирована такая задача (Задача 1.7):

Задача. Пусть T — d-мерное гладкое выпуклое тело. Верно ли, что в нем есть не менее d замкнутых бильярдных траекторий длины 3?

В этой работе будет доказано следующее утверждение.

Теорема 7.1. *Пусть T — d-мерное гладкое выпуклое тело, $d \geq 3$, а $p > 2$ — простое число. Тогда в T найдётся не менее $(d-2)(p-1)+2$ различных замкнутых бильярдных траекторий длины p.*

Как уже было отмечено, случай плоского бильярда ($d = 2$) изучен в [9], полученная оценка имеет вид $\varphi(l)$, где φ — функция Эйлера. Случай $p = 2$ здесь не рассматривается, так как уже в работе

Люстерника и Шнирельмана [86] была получена оценка количества траекторий (d штук) для данного случая, эта же оценка переоткрыта в работе [42]. Эта оценка является точной, так как у эллипсоида с попарно различными длинами осей имеется ровно d хорд, перпендикулярных к его поверхности в своих концевых точках.

Важная часть требуемой для доказательства техники была развита в [70] применительно к трёхмерному случаю, однако, как указано в [20, 21], в доказательстве оценки количества траекторий содержались ошибки.

Случай произвольной размерности d и траекторий нечётной (не обязательно простой) длины изучался в статьях [20, 21], где были получены отдельно оценки для простых p (получше) и для непростых нечётных p (похуже). Приведённые ниже оценки для простых p во всех случаях лучше оценок работы [21]. Однако, результаты работ [20, 21] по вычислению когомологий конфигурационного пространства существенно используются в этой главе. В случае траекторий непростой нечётной длины методы данной работы, видимо, неприменимы, и лучшей оценкой остаётся оценка из [20].

7.2 Конфигурационное пространство, его индекс

Следуя работам [20, 21], опишем конфигурационное пространство, естественным образом возникающее в задаче о бильярде. Для топологического пространства X обозначим

$$G(X,p) = \{(x_1,\dots,x_p) \in X^p : x_1 \neq x_2, x_2 \neq x_3, \dots, x_{p-1} \neq x_p, x_p \neq x_1\}.$$

На пространстве $G(X,p)$ свободно действует группа симметрий правильного p-угольника D_p, которая имеет подгруппу циклических перестановок, изоморфную Z_p.

Из результатов работы [20] (Proposition 4.1) следует, что $G(\partial T, p)$ содержит D_p-инвариантное компактное многообразие с краем $G_\varepsilon(\partial T, p)$, которое D_p-эквивариантно гомотопически эквивалентно ему.

Целью данного раздела будет нахождение когомологического Z_p-индекса $G(\partial T, p)$, очевидно, равного когомологическому индексу $G_\varepsilon(\partial T, p)$. Пространство ∂T гомеоморфно сфере размерности $d-1$, поэтому далее пишем $G(S^{d-1}, p)$.

Получим сначала оценку снизу на индекс $G(S^{d-1}, p)$, рассмотрев другое пространство — $G(\mathbb{R}^d, p)$. Напомним частный случай теоремы (Proposition 2.2) из [20].

Теорема 7.2. *Пусть $d \geq 2$. Алгебра когомологий $H^*(G(\mathbb{R}^d, p), Z_p)$ порождена $d-1$-мерными классами $s_1, \dots, s_p$ и соотношениями*

$$s_1^2 = s_2^2 = \dots = s_p^2 = 0, \quad s_1 s_2 \dots s_{p-1} + s_2 s_3 \dots s_p + s_3 s_4 \dots s_p s_1 + s_p s_1 \dots s_{p-2} = 0.$$

Группа Z_p действует на образующих $s_1, \dots, s_p$ циклическими перестановками.

Рассматривая действие $G = Z_p$ на $(G(\mathbb{R}^d, p)$, получаем следствие из этой теоремы:

Теорема 7.3. *Пусть $d \geq 2$. Тогда* $\operatorname{hind} G(\mathbb{R}^d, p) = (d-1)(p-1)$.

Эта теорема непосредственно следует из теоремы 2.16.

Таким образом, если некоторое пространство X содержит $\mathbb{R}^d$, то $G(X, p)$ содержит $G(\mathbb{R}^d, p)$. Значит по монотонности индекса получаем для X оценку $\operatorname{hind} G(X, p) \geq (d-1)(p-1)$, в частности $G(S^{d-1}, p) \geq (d-2)(p-1)$.

Теперь посчитаем индекс $G(S^{d-1}, p)$ более точно. Напомним две теоремы из [21] (Theorem 18, Theorem 19), описывающие строение алгебры $H^*(G(S^{d-1}, p), Z_p)$ в зависимости от чётности d. Обозначим $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

Теорема 7.4. *Пусть $d \geq 4$ чётно. Тогда $H^*(G(S^{d-1}, p), Z_p)$ порождено элементами*

$$u \in H^{d-1}(G(S^{d-1}, p), Z_p), \quad s_i \in H^{i(d-2)}(G(S^{d-1}, p), Z_p), i \in [p-2]$$

и соотношениями

$$u^2 = 0, \quad s_i s_j = \frac{(i+j)!}{i!j!} s_{i+j}, \text{ если } i+j \leq p-2, \text{ иначе } s_i s_j = 0.$$

Теорема 7.5. *Пусть $d \geq 3$ нечётно. Тогда $H^*(G(S^{d-1}, p), Z_p)$ порождено элементами*

$$w \in H^{2d-3}(G(S^{d-1}, p), Z_p), \quad t_i \in H^{i(2d-4)}(G(S^{d-1}, p), Z_p), i \in \left[\frac{p-3}{2}\right]$$

и соотношениями

$$w^2 = 0, \quad t_i t_j = \frac{(i+j)!}{i!j!} t_{i+j}, \text{ если } i+j \leq \frac{p-3}{2}, \text{ иначе } t_i t_j = 0.$$

Заметим, что теорема 7.4 сформулирована в [21] для случая поля коэффициентов $\mathbb{Q}$, но доказательство проходит и для Z_p, так как деление используется только на числа $i!$, где $i \leq p-2$.

Также заметим, что G действует на когомологиях из этих теорем тривиально, так как в каждой размерности имеется не более чем одномерное пространство когомологий.

Оценим снизу когомологический индекс $G(S^{d-1}, p)$ ещё одним способом. Построим D_p-эквивариантное отображение из пространства Штифеля 2-реперов в $\mathbb{R}^d$ $V_d^2 \to G(S^{d-1}, p)$. Выберем в двумерной плоскости правильный p-угольник. Всякий репер $(e_1, e_2) \in V_d^2$ даёт вложение этого p-угольника в $\mathbb{R}^d$, причём D_p-эквивариантность очевидна. Ясно, что $\operatorname{hind} G(S^{d-1}, p) \geq \operatorname{hind} V_d^2$, а последний индекс, как известно (см. [88]), равен $2d-3$.

Теорема 7.6. *При* $d \geq 3$ $\operatorname{hind} G(S^{d-1}, p) = (d-2)(p-1)+1$.

Заметим, что эта теорема вместе с леммой 2.26 даёт оценку

$$\operatorname{cat} G(S^{d-1}, p)/D_p \geq (d-2)(p-1)+2.$$

Но эта оценка должна обращаться в равенство, так как конфигурационное пространство гомотопически эквивалентно CW-комплексу размерности $(d-2)(p-1)+1$ и оценка снизу совпадает с оценкой сверху леммы 2.24. Таким образом получаем следствие.

Следствие 7.7. *При* $d \geq 3$

$$\operatorname{cat} G(S^{d-1}, p)/D_p = (d-2)(p-1)+2.$$

Доказательство теоремы 7.6. При $p = 3$ $(p-1)(d-2)+1 = 2d-3$ и доказывать нечего, так как грубая оценка даёт $\operatorname{hind} G(S^{d-1}, 3) \geq 2d-3$, а когомологическая размерность равна $2d-3$. Далее считаем $p \geq 5$.

Заметим, что $H^*(G(S^{d-1}, p), Z_p)$ мультипликативно порождается (u, s_1) и (w, t_1) для чётных и нечётных d соответственно.

Сначала рассмотрим случай чётного d. Обозначим для краткости $A_G = H^*(BG, Z_p)$. Рассмотрим спектральную последовательность с членом E_2, равным $H^*(G(S^{d-1}, p), Z_p) \otimes A_G$ (так как действие G на $H^*(G(S^{d-1}, p), Z_p)$ тривиально). Заметим, что максимальная размерность мультипликативных образующих $H^*(G(S^{d-1}, p), Z_p)$ равна $d-1$. Тогда, если дифференциалы спектральной последовательности d_m тривиальны при $m \leq d$, то они останутся тривиальными и при $m > d$ из соображений степени образующих. Но в таком случае в итоге выйдет $\operatorname{hind} G(S^{d-1}, p) = +\infty$, что противоречит конечности размерности $G(S^{d-1}, p)/G$ — значит какой-то из дифференциалов d_m нетривиален при $m \leq d$.

Заметим, что в члене E_2 снизу идёт строка, равная A_G, следующая строка снизу — $s_1 A_G$, далее — $u A_G$. Пусть d_m — первый нетривиальный дифференциал. Он не может отобразить u или s_1 в нетривиальный элемент нижней строки, так как в этом случае $\operatorname{hind} G(S^{d-1}, p)$ окажется равным $d-1$ или $d-2$ соответственно. Единственный остающийся вариант нетривиального d_m — это d_2 и $d_2(u) = as_1y$ ($a \in Z_p^*$). Тогда E_3 будет мультипликативно порождаться элементами $v, y \in A_G$, образом s_1 и образом us^{p-2}, который обозначим z. Соотношения будут такими (помимо соотношений A_G):

$$s_1^{p-1} = 0, \quad s_1y = 0, \quad z^2 = 0.$$

То есть в спектральной последовательности останутся две полные строки сверху и снизу, и некоторое количество строк, содержащих только s_1^k и s_1^kv при $k \in [p-2]$.

Следующие d_m при $m \leq (p-1)(d-2)+1 = \dim z$ не смогут нетривиально отобразить z, также они не смогут отобразить нетривиально s_1 в силу соображений размерности и оценки снизу на когомологический индекс. Поэтому в конце $d_{(p-1)(d-2)+2}$ придётся отобразить z в нижнюю строку и тогда получим $\operatorname{hind} G(S^{d-1}, p) = (p-1)(d-2)+1$.

Теперь перейдём к случаю нечётных d. Ситуация развивается примерно также, но помимо альтернативы, дающей вариант $\operatorname{hind} G(S^{d-1}, p) = (p-1)(d-2)+1$ остаётся вариант, когда d_2 тривиален, а нетривиален d_{2d-2}, который отобразит w в соответствующий элемент A_G. Тогда получится, что $\operatorname{hind} G(S^{d-1}, p) = 2d-3$, но это противоречит нижней оценке на индекс $(d-2)(p-1)$ при $p \geq 5$. □

Доказательство теоремы 7.1. Возьмём последовательность точек $(x_1, \dots, x_p) \in G(\partial T, p)$ и сопоставим ей функцию

$$f(x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^{p} |x_i x_{i+1}|,$$

далее везде полагаем $x_{p+1} = x_1$. Рассмотрим f как функцию на $G(\partial T, p)$. Ясно, что если производная $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, то в точке x_i ломаная $x_1 x_2 \dots x_p x_1$ отражается от границы по закону упругого отражения. Значит, критические точки f соответствуют периодическим бильярдным траекториям длины p.

Заметим, что в случае нестрого выпуклого T могло оказаться так, что некоторые отрезки траектории лежат на границе T. Тогда легко заметить, что все отрезки траектории обязаны лежать на границе и более того, лежать на одной прямой. Но тогда эта траектория не является критической точкой f.

Из результатов работы [20] (Proposition 4.1) следует, что вместо $G(\partial T, p)$ можно рассмотреть гомотопически эквивалентное ему $G_\varepsilon(\partial T, p)$, к последнему пространству и функции f применима лемма 2.23, что с учётом следствия 7.7 даёт требуемое. $\square$

7.3 Квазинеподвижные точки Z_p-действия

Из теоремы 7.3 можно вывести утверждение, уточняющее результат [43], Теорема 1.

Теорема 7.8. *Пусть группа Z_p свободно действует на топологическом пространстве X и* $\operatorname{hind} X > (d-1)(p-1)$. *Обозначим образующую Z_p за T. Тогда для всякого непрерывного отображения $f : X \to \mathbb{R}^d$ найдётся точка $x \in X$, для которой $f(x) = f(T(x))$.*

В [43] этот результат доказан для $X = S^m$, где $m > (d-1)(p-1)$ и по сути,приведённое там доказательство доказывает и эту теорему. Уточнение заключается в том, что вычисление индекса в теореме 7.3 показывает точность оценки $\operatorname{hind} X > (d-1)(p-1)$. Примером, показывающим точность оценки, является отображение $f : G(\mathbb{R}^d, p) \to \mathbb{R}^d$, заданное как $(x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto x_1$.

Доказательство. Если утверждение теоремы неверно, то получаем эквивариантное отображение $X \to G(\mathbb{R}^d, p)$ и противоречие с теоремой 7.3 и леммой 2.13. $\square$

Аналогично из теоремы 7.6 следует утверждение.

Теорема 7.9. *Пусть группа Z_p свободно действует на топологическом пространстве X и $\operatorname{hind} X > (d-1)(p-1)+1$. Обозначим образующую Z_p за T. Тогда для всякого непрерывного отображения $f : X \to S^d$ найдётся точка $x \in X$, для которой $f(x) = f(T(x))$.*

Глава 8

Вписывание многогранников и деление меры

В данной главе доказываются результаты о вписывании кроссполитопов (многомерных аналогов октаэдра) в выпуклое тело (либо в некоторые невыпуклые гиперповерхности) в $\mathbb{R}^d$. Также доказываются близкие по духу результаты о соотношениях в произвольной непрерывной метрике на многообразиях.

Как и многие результаты предыдущих разделов, эти результаты доказываются через нетривиальность некоторого класса Эйлера расслоения.

8.1 Вписывание правильного кроссполитопа и кроссполитопа с $(Z_p)^k$-симметрией

Задачи о возможности вписать (или описать) многогранник из некоторого заданного семейства в произвольное (гладкое) выпуклое тело имеют давнюю историю. В работе [102] доказывалось, что во всякую простую гладкую замкнутую кривую на плоскости можно вписать квадрат (теорема Шнирельмана). В работе [34] доказывалось, что вокруг всякого выпуклого тела в $\mathbb{R}^3$ можно описать куб. В работе [77] доказывалось, что если гладкая замкнутая гиперповерхность $H \subset \mathbb{R}^d$ ограничивает область с ненулевой эйлеровой характеристикой, то в H можно вписать симплекс, подобный наперёд заданному.

Обсуждение вопросов вписывания некоторых классов многогранников имеется в книге [78]. Более современные ссылки по вопросам вписывания/описывания можно найти в работах [89, 90]. Кроме того, задачи о вписывании и описывании часто оказываются связаны с задачей Кнастера [40] о поверхностях уровня функции на сфере.

В книге [38] сформулирована задача (Задача 11.5) о вписывании правильного октаэдра в произвольное выпуклое тело в $\mathbb{R}^3$. Эта задача, по сути, была решена для размерности 3 и гладкого тела в [89]. Докажем это утверждение для некоторых размерностей, больших трёх.

Определение. *Ортогональным крестом* в $\mathbb{R}^d$ назовем d взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через точку o — *центр креста.*

Определение. Пусть $(e_1, \dots, e_d)$ — некоторый базис в $\mathbb{R}^d$. *Кроссполитопом* в $\mathbb{R}^d$ назовем выпуклую оболочку точек

$$e_1, -e_1, e_2, -e_2, \dots, e_d, -e_d$$

и все ее образы при движениях. Если базис ортогональный и длины всех векторов базиса равны, то будем говорить, что кросcполитоп *правильный.*

Определение. Назовём выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^d$ *неугловатым*, если никакая его граничная точка не является центром ортогонального креста C, для которого $C \cap \operatorname{int} K = \emptyset$.

Очевидно, гладкие выпуклые тела не угловаты. Сформулируем результаты работы:

Теорема 8.1. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$ — неугловатое выпуклое тело, а d — нечётная степень простого. Тогда найдётся правильный кросcполитоп $C \subset \mathbb{R}^d$, все вершины которого лежат на границе K.*

То же доказательство проходит и для утверждения:

Теорема 8.2. *Пусть $H \subset \mathbb{R}^d$ — образ гладкого вложения S^{d-1}, $d = p^k$ — нечётная степень простого. Пусть C — кросcполитоп, натянутый на базис $(e_1, \dots, e_d)$. Предположим, что группа $(Z_p)^k$ действует транзитивно на векторах базиса $(e_1, \dots, e_d)$ и её действие продолжается до действия на $\mathbb{R}^d$ ортогональными преобразованиями.*

Тогда найдётся кросcполитоп $C' \subset \mathbb{R}^d$, подобный C, все вершины которого лежат на H.

Заметим, что теорема 8.2 для правильного кросcполитопа была заявлена в [25], однако в качестве доказательства было указано, что оно аналогично двумерному случаю. Двумерный же случай (теорема Шнирельмана) в работе [25] также не был доказан, основная лемма этой работы о непрерывной зависимости вписанного квадрата от гладкой кривой принципиально неверна и к ней существуют простые контрпримеры. В доказательстве теоремы Шнирельмана [102] принципиально, что чётность количества вписанных квадратов не меняется при деформациях кривой, однако в многомерном случае вписанные кросcполитопы составляют многообразие положительной размерности и рассуждение с чётностью не проходит.

Следует заметить, что в случае $d = 2$ (теорема Шнирельмана) приведённая здесь техника не применима. В этом случае требуется рассмотреть действие группы Z_4 на квадрате.

Докажем сначала утверждение теоремы 8.1 для строго выпуклых неугловатых K. Также это будет доказательством теоремы 8.2 для случая, когда H — граница гладкого строго выпуклого тела K.

Доказательство для строго выпуклых неугловатых тел. Пусть R — пространство положительно ориентированных ортонормированных реперов в $\mathbb{R}^d$. А в случае теоремы 8.2 это будет пространство реперов, получающихся из исходного собственным ортогональным преобразованием. В обоих случаях R естественно отождествляется с $SO(d)$. Заметим, что в случае теоремы 8.2 длины векторов репера равны, будем считать их единичными.

Построим непрерывное отображение g пространства $K \times R$ в линейное пространство $V = \mathbb{R}^{2d}$ следующим образом. Для точки $p \in K$ и репера $(e_1, \dots, e_d) \in R$ положим для любого $i \in [d]$

$$a_i = \max\{a : p + ae_i \in K\}, \quad b_i = \max\{a : p - ae_i \in K\},$$

таким образом отображение построено. Легко заметить, что для строго выпуклых K оно непрерывно.

Заменим координаты в V на $s_i = a_i + b_i, t_i = a_i - b_i$. рассмотрим одномерное подпространство $L \subset V$, заданное соотношениями

$$t_1 = \dots = t_d = 0, \quad s_1 = \dots = s_d,$$

В факторе V/L обозначим d-мерную линейную оболочку $\{t_1, \dots, t_d\}$ за U, $d - 1$-мерную линейную оболочку $\{s_1, \dots, s_d\}$ за W. Заметим, что нам достаточно доказать, что построенное отображение $f : K \times R \to U \oplus W$ отображает некоторую пару $(p, r) \in \operatorname{int} K \times R$ в нуль.

Далее когомологии рассматриваются с коэффициентами в Z_p, обозначение коэффициентов опускается.

Заметим, что для неугловатого K отображение f не отображает в нуль ни одну пару $(p, r) \in \partial K \times R$. Также заметим, что если $d = p^k$, то в случае теоремы 8.1 можно задать свободное действие группы

$G = (Z_p)^k$ на реперах R перестановками векторов и на координатах t_i, s_i в U и V аналогичными перестановками. В случае теоремы 8.2 транзитивное действие G на R уже задано по условию теоремы.

Тогда отображение f превращается в сечение эквивариантного G-расслоения над G-пространством и первое препятствие к продолжению ненулевого сечения f с $\partial K \times R$ на $K \times R$ является относительным классом Эйлера и лежит в $H_G^{2d-1}(K \times R, \partial K \times R)$.

Наше сечение f разлагается в сумму сечений s_U и s_W соответствующих G-расслоений. При этом сечение s_U не обращается в нуль над $\partial K \times R$ и даёт некоторый относительный класс Эйлера $e(s_U) \in H_G^d(K \times R, \partial K \times R)$, сечение s_W имеет класс Эйлера $e(s_W) \in H_G^{d-1}(K \times R) = H_G^{d-1}(R)$. Первое препятствие к построению ненулевого f таким образом равно $e(f) = e(s_U)e(s_W)$.

По формуле Кюннета алгебра когомологий $H_G^*(K \times R, \partial K \times R)$ равна тензорному произведению $H^*(K, \partial K) \otimes H_G^*(R)$, то есть имеет вид $u \times H_G^*(R)$, где u — d-мерная образующая $H^*(K, \partial K)$.

Найдём класс $e(s_U)$. Заметим, что при непрерывных деформациях K, оставляющих его неугловатым, этот класс не изменится. Такими деформациями можно превратить K в единичный шар B. Но для B можно зафиксировать r в паре $(p, r) \in B \times R$ и заметить, что сечение s_U имеет один невырожденный нуль в $B \times \{r\}$. Следовательно, образ класса $e(s_U)$ при естественном отображении $H_G^d(B \times R, \partial B \times R) \to H^d(B, \partial B)$ даёт образующую $H^d(B, \partial B)$, значит $e(s_U) = u \times 1 \in H_G^*(K \times R, \partial K \times R)$.

Деформируем K в эллипсоид с разными полуосями. В этом случае условие $s_U = 0$ для пары $(p, r) \in K \times R$ равносильно тому, что p совпадает с центром эллипсоида. Тогда из рассмотрения условия $s_W = 0$ получаем, что класс $e(s_W)$ является тем же препятствием, которое требуется в частном случае гипотезы Кнастера. Этот частный случай утверждает, для всякой функции h на единичной сфере найдётся репер $r = (e_1, \dots, e_d)$ (ортонормированный в случае теоремы 8.1 и подобный данному для теоремы 8.2), такой что

$h(e_1) = \dots = h(e_d)$. В работе [73], в частности, показано, что для данного случая действия $(Z_p)^k$ $(p \neq 2)$ на $SO(d)$ это препятствие не равно нулю. Значит $e(f) = u \times e(s_W)$ также не равно нулю по формуле Кюннета. □

Теперь избавимся от условия строгой выпуклости.

Разбор случая нестрого выпуклых тел. Построим последовательность строго выпуклых гладких тел K_n, сходящуюся в метрике Хаусдорфа к K. Для каждой из них наша теорема даёт вписанный кросспολитоп C_n. Множество кросспολитопов, вершины которых принадлежат некоторому компакту, компактно, значит можно перейти к подпоследовательности и считать, что C_n стремятся к некоторому (возможно, вырожденному) кросспολитопу C.

Докажем, что C не может выродиться в точку. Если это так, то тогда направляющий крест кросспολитопа C должен иметь непустое пересечение с $\operatorname{int} K$ (из неугловатости в теореме 8.1 и гладкости в теореме 8.2) длины не менее ε, а значит, и направляющий крест C_n имеет непустое пересечение с $\operatorname{int} K_n$ длины не менее $\varepsilon/2$ для достаточно больших n. Следовательно, размеры C_n не стремятся к нулю и C_n не вырождается. □

Избавиться от условия неугловатости в теореме 8.1 автору пока не удалось, так как в угловатом случае возможно вырождение при рассмотрении последовательности выпуклых тел, то есть вписанный кросспολитоп может устремиться к одной точке. Следует отметить, что вопрос о неугловатости не является тривиальным. Даже в задаче о вписывании квадрата в замкнутую несамопересекающуюся кривую на плоскости (теорема Шнирельмана [102], см. также обзор в книге [38]) общий случай не доказан, хотя доказано много частных случаев с дополнительными условиями типа гладкости и неугловатости.

Докажем теперь теорему 8.2 для случая произвольной гиперповерхности H (являющейся гладко вложенной сферой).

Доказательство для невыпуклых гиперповерхностей. Опишем пространство всевозможных кросcполитопов, подобных C. Поверхность H может быть гладко деформирована в некоторый эллипсоид с разными полуосями, пусть при этой деформации её образ H_t остаётся внутри некоторого шара B. Множество кросcполитопов, подобных C и имеющих центр в B, параметризуется $B \times I \times SO(d)$, где B параметризует центры, $SO(d)$ параметризует вращения, $I = [a, b]$ параметризует гомотетии.

Если выбрать достаточно малое a и достаточно большое b, то кросcполитопы размеров a и b не будут вписаны в H_t ни при каком t. Положим $L = \partial B \times I \times SO(d) \bigcup B \times \partial I \times SO(d)$. Пусть $G = (Z_p)^k$ действует на $SO(d)$, как указано выше. Тогда по формуле Кюннета $H^*_G(B \times I \times SO(d), L) = u \times v \times H^*_G(SO(d))$, где u — образующая $H^d(B, \partial B)$, v — образующая $H^1(I, \partial I)$.

Каждая поверхность H_t может быть задана как множество невырожденных нулей некоторой гладкой функции f_t, которую можно считать непрерывно зависящей от t (так как гомотопия H_t может быть продолжена до изотопии всего пространства $\mathbb{R}^d$). Рассмотрим отображение $g_t : B \times I \times SO(d) \to \mathbb{R}^{2d}$, которое отображает набор (x, λ, ρ) в набор

$$(f_t(x + \lambda\rho(e_1)), f_t(x + \lambda\rho(-e_1)), \dots, f_t(x + \lambda\rho(e_d)), f_t(x + \lambda\rho(-e_d)))\,.$$

Отображение g_t коммутирует с действием G на $B \times I \times SO(d)$ и действием G на $\mathbb{R}^{2d}$ перестановками координат. Следовательно, имеет смысл рассмотреть класс Эйлера $e(g_t) \in H^{2d}_G(B \times I \times SO(d), L)$. При деформации этот класс не меняется, значит достаточно вычислить его в случае, когда H_t — эллипсоид. Действуя, как в первой части доказательства, находим, что в таком случае $e(g_t) = u \times v \times e(W) \neq 0$. Это значит, что множество нулей отображения g_t непусто и в каждую

H_t вписывается кросcполитоп, и даже (аналогично результатам [73]) семейство кросcполитопов размерности не менее $\dfrac{(d-1)(d-2)}{2}$. □

8.2 Деление меры конусами

Препятствие в виде класса Эйлера, использованное в доказательстве теоремы 8.2, позволяет доказать и следующую теорему о делении абсолютно непрерывной меры в $\mathbb{R}^d$.

Теорема 8.3. *Рассмотрим группу $G = (Z_p)^k$, пусть $d = p^k$ — нечётная степень простого. Предположим, что G действует на $\mathbb{R}^d$ ортогонально, транзитивно переставляя векторы некоторого базиса. Пусть замкнутый конус C с центром в начале координат таков, что семейство конусов $\{\pm g(C)\}_{g\in G}$ даёт разбиение $\mathbb{R}^d$, а его подсемейство $\{g(C)\}_{g\in G}$ имеет ровно один общий луч.*

Тогда для всякой абсолютно непрерывной вероятностной меры μ на $\mathbb{R}^d$ найдётся сохраняющее ориентацию движение ρ такое, что для любого $g \in G$

$$\mu(\rho(g(C))) = \mu(\rho(-g(C)) = \frac{1}{2d}.$$

В качестве конусов $\pm g(C)$ можно взять клетки разбиения Вороного, соответствующего точкам $\{\pm g(v)\}$. В случае $d = 3$ эта теорема по сути была доказана в [87].

Пусть E — группа собственных движений $\mathbb{R}^d$. Всякое движение ρ можно записать в виде

$$\rho(x) = s(x) + t,$$

где $s \in SO(d)$ — вращение, а $t \in \mathbb{R}^d$ — вектор параллельного переноса. Таким образом, топологически, $E = SO(d) \times \mathbb{R}^d$.

Определим непрерывное отображение g из E в $V = \mathbb{R}^{2d}$. Для $\rho \in E$ и индекса $i \in [d]$ положим

$$a_i = \mu(\rho(g(C)), \quad b_i = \mu(\rho(-g(C)),$$

и будем считать (a_i) и (b_i) координатами в линейном пространстве V. Мера μ абсолютно непрерывна, следовательно, отображение g непрерывно. Заметим, что G действует на E умножениями справа, и действует на V соответствующими перестановками $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$. Для таких действий g является G-эквивариантным.

Заменим координаты в V на $s_i = a_i + b_i, t_i = a_i - b_i$ и рассмотрим одномерное подпространство $L \subset V$, заданное уравнениями

$$t_1 = \cdots = t_d = 0, \quad s_1 = \cdots = s_d.$$

В факторпространстве V/L обозначим d-мерную линейную оболочку $\{t_1, \ldots, t_d\}$ за U, а $d-1$-мерную линейную оболочку $\{s_1, \ldots, s_d\}$ за W. Теперь нам достаточно доказать, что отображение $f : E \to U \oplus W$ отображает некоторое движение $\rho \in E$ в нуль.

Возьмём некоторое $\varepsilon < \frac{1}{2d}$ и шар B' с центром в начале координат, для которого $\mu(B') > 1 - \varepsilon$. По условию теоремы, конуса $\{\pm g(C)\}$ имеют ровно одну общую точку в начале координат. Поэтому для достаточно большого шара B выполняется следующее условие: для любого $\rho \in SO(d) \times \partial B$ хотя бы один из конусов $\pm\rho(g(C))$ не пересекает B'. Следовательно, сечение f не имеет нулей на $SO(d) \times \partial B \subset E$.

Теперь препятствие к отсутствию нулей f — это класс Эйлера $e(f) \in H_G^{2d-1}(SO(d) \times B, SO(d) \times \partial B)$. Меру μ можно деформировать непрерывно так, чтобы она оказалась сконцентрированной в B'. При этом f также меняется непрерывно, при этом нулей на $SO(d) \times \partial B$ не возникает и класс Эйлера не меняется.

Разложим f в прямую сумму сечений $s_U \oplus s_W$, в соответствии с разложением $V/L = U \oplus W$. Сечение s_U не имеет нулей на $SO(d) \times \partial B$ и его класс Эйлера лежит в $e(s_U) \in H_G^d(SO(d) \times B, SO(d) \times$

$\partial B)$, сечение s_W имеет класс Эйлера $e(s_W) \in H_G^{d-1}(SO(d) \times B) = H_G^{d-1}(SO(d))$. Полный класс Эйлера по мультипликативности $e(f) = e(s_U)e(s_W)$.

По формуле Кюннета

$$H_G^*(SO(d) \times B, SO(d) \times \partial B) = H^*(B, \partial B) \otimes H_G^*(SO(d)),$$

или равносильно $H_G^*(SO(d) \times B, SO(d) \times \partial B) = u \times H_G^*(SO(d))$, где u — d-мерная образующая $H^*(B, \partial B)$.

Найдём $e(s_U)$. Зафиксируем некоторое вращение s в паре $\rho = (s, t)$ и рассмотрим сужение s_U на $(\{s\} \times B, \{s\} \times \partial B)$, обозначим это сужение s'_U. Нам понадобится следующая лемма, доказательство которой будет приведено в конце раздела.

Лемма 8.4. *При обозначенных выше предположениях s'_U даёт отображение сфер $\partial B \to S(U)$ ненулевой степени $\mod p$.*

Из леммы и точной последовательности когомологий пары $(B, \partial B)$ следует, что класс Эйлера $e(s'_U)$ ненулевой в $H^*(B, \partial B)$.

Значит, класс $e(s_U)$ при естественном отображении $H_G^d(B \times SO(d), \partial B \times SO(d)) \to H^d(B, \partial B)$ переходит в ненулевой $e(s'_U) \in H^d(B, \partial B)$, что возможно только в случае $e(s_U) = u \times a \in H_G^*(B \times SO(d), \partial B \times SO(d))$, где a — некоторая константа $a \neq 0 \mod p$.

Как и в доказательстве теоремы 8.2, класс $e(s_W)$ ненулевой и по формуле Кюннета $e(f) = u \times ae(s_W) \neq 0$.

Доказательство леммы 8.4. Рассмотрим линейное подпространство $L \in \mathbb{R}^d$, соответствующее общему лучу конусов $\{g(C)\}_{g \in G}$ и возьмём его ортогональное дополнение $L^\perp$. $L^\perp$ является представлением G без тривиальных слагаемых. Также рассмотрим разложение $U = U^G \oplus U^\perp$ на тривиальное G-представление и его ортогональное дополнение.

Рассмотрим сферу $S = \partial B$ в $\mathbb{R}^d$ и сферы $SL = S \cap L, SL^\perp = S \cap L^\perp$. Отображение s'_U не отображает никакую точку S в нуль, поэтому гомотопически s'_U можно считать отображением в сферу $SU = SU^G * SU^\perp$. Образ $SL^\perp$ при отображении s'_U не пересекает U^G, поэтому s'_U также даёт G-отображение сфер $SL^\perp \to SU^\perp$. Степень отображения $SL^\perp \to SU^\perp$ не равна нулю по модулю p по Лемме 2.1 из работы [76], этот факт может быть легко установлен рассмотрением спектральных последовательностей из леммы 2.15 для обоих сфер и естественного отображения между этими спектральными последовательностями.

Пусть теперь некоторый вектор $e \in SL$ отображается в $f \in SU^G$. Легко видеть, что все прообразы вектора $-f$ находятся в некоторой малой (при малом ε) окрестности $-e$. Рассмотри теперь полусферу $H \subset S$, которая содержит e и имеет край $SL^\perp$. Пара $(H, SL^\perp)$ отображается в пару $(SU \setminus \{-f\}, SU \setminus U^G)$ и рассматривая точные последовательности когомологий пар и отображение между этими точными последовательностями, получаем, что отображение

$$\begin{aligned}(s'_U)^* : H^d(SU \setminus \{-f\}, SU \setminus U^G, Z_p) = H^d(SU, \{-f\}, Z_p) \to \\ H^d(H, SL^\perp, Z_p) = H^d(S, \{-e\}, Z_p)\end{aligned}$$

нетривиально. □

8.3 Теоремы существования для метрических соотношений на многообразиях

Докажем некоторую теорему существования, дающую метрически правильные множества из конечного числа точек на многообразии с произвольной непрерывной метрикой. Также будет приведена более общая формулировка, в которой метрика заменена на произвольную непрерывную функцию нескольких точек.

В этих теоремах в качестве многообразия можно взять поверхность произвольного выпуклого тела в $\mathbb{R}^d$, взять произвольную непрерывную метрику на $\mathbb{R}^d$ (или на этой поверхности) и получить результаты о вписывании в выпуклое тело конфигурации точек с заданными метрическими соотношениями между ними.

Теорема 8.5. *Пусть $p > 2$ — простое число, M — ориентируемое многообразие размерности d. Пусть на $M \times M$ задана непрерывная функция ρ.*

Пусть в группе $G = Z_p$ (с аддитивной записью) даны d элементов $g_1, \dots, g_d$. Тогда найдётся непостоянное отображение $\phi : G \to M$ такое, что

$$\forall g \in G,\ \forall i = 1, \dots, d \quad \rho(\phi(g), \phi(g + g_i)) = \rho(\phi(e), \phi(g_i)).$$

Эта теорема формулируется для произвольной функции ρ, но если ρ является метрикой, получаются дополнительные соотношения из симметричности ρ. Также в случае метрики автоматически получаем, что все фигурирующие в теореме величины $\rho(\phi(g), \phi(g + g_i))$ положительны, так как иначе отображение ϕ получится постоянным.

Первый нетривиальный случай этой теоремы ($d = 2$, $G = Z_5$) даёт такое утверждение: для всякой метрики ρ на двумерном ориентируемом многообразии найдутся пять различных точек $p_1, p_2, \dots, p_5$ такие, что

$$\rho(p_1p_2) = \rho(p_2p_3) = \rho(p_3p_4) = \rho(p_4p_5) = \rho(p_5p_1)$$

и

$$\rho(p_1p_3) = \rho(p_3p_5) = \rho(p_5p_2) = \rho(p_2p_4) = \rho(p_4p_1).$$

Это утверждение можно ещё более сузить: для всякого выпуклого тела $K \in \mathbb{R}^3$ найдётся вписанный в него (не обязательно плоский) пятиугольник, у которого равны все стороны и равны все диагонали.

Вот наиболее общая формулировка теоремы 8.5.

Теорема 8.6. *Пусть $p > 2$ — простое число, M — ориентируемое многообразие размерности d, $G = Z_p$ с аддитивной записью. Пусть для всякого $i = 1, \dots, d$ задано натуральное число m_i, непрерывная функция $\alpha_i : M^{m_i} \to \mathbb{R}$ и набор $g_{i1}, \dots, g_{im_i} \in G$.*

Тогда найдётся непостоянное отображение $\phi : G \to M$ такое, что для всякого $i = 1, \dots, d$ величина $\alpha_i\left(\phi(g_{i1} + g), \phi(g_{i2} + g), \dots, \phi(g_{im_i} + g)\right)$ не зависит от $g \in G$.

Для доказательства этих теорем рассмотрим немного более общий случай $G = (Z_p)^k$, обозначим $q = p^k$. Введём некоторое конфигурационное пространство и найдём его индекс.

Пространство непостоянных отображений $G \to M$ очевидно, допускает действие G, индуцированное действием G на себе сдвигами. Также очевидно, что это пространство равно $X = M^q \setminus \Delta$, где Δ — диагональ в M^q, состоящая из элементов $(x, \dots, x)$, $x \in M$.

Лемма 8.7. *Для индекса конфигурационного пространства с указанным действием G имеет место*

$$\operatorname{Ind} M^q \setminus \Delta \subseteq I_{d(q-1)+1}\Lambda_p(k).$$

Доказательство. Заметим, что G действует на X свободно. Действие G на M^q имеет неподвижные точки, поэтому $\operatorname{Ind} M^q = \{0\}$. Рассмотрим отображения когомологий

$$\dots \leftarrow H^k(X) \xleftarrow{i^*} H^k(M^q) \xleftarrow{\pi^*} H^k(M^q, X) \xleftarrow{\delta} H^{k-1}(X) \leftarrow \dots$$

и соответствующих G-эквивариантных когомологий

$$\dots \leftarrow H^k_G(X) \xleftarrow{i^*} H^k_G(M^q) \xleftarrow{\pi^*} H^k_G(M^q, X) \xleftarrow{\delta} H^{k-1}_G(X) \leftarrow \dots.$$

Заметим, что вторая последовательность отображается в первую естественным отображением f^*, соответствующим проекции $f : Y \times EG \to (Y \times EG)/G$ для всякого G-пространства Y.

Рассмотрев трубчатую окрестность $N(\Delta)$ в M^q заметим, что пара (M^q, X) с учётом вырезания гомотопически эквивалентна паре $(B(V), S(V))$, где V — векторное расслоение над M, входящее в точную последовательность векторных расслоений

$$0 \to T(M) \to \oplus_{g\in G} T(M) \to V \to 0,$$

а $B(V)$ и $S(V)$ — его пространства единичных шаров и единичных сфер. Заметим также, что на V естественным образом действует G.

По сформулированным ранее соглашениям, многообразие M Z_p-ориентируемо, значит расслоение V также Z_p-ориентируемо. Тогда по изоморфизму Тома когомологии $H^*(M^q, X)$ равны $uH^*(M)$, где u — $d(q-1)$-мерный фундаментальный класс расслоения V. Рассмотрение спектральной последовательности для G-когомологий этой пары показывает, что отображение $f^* : H_G^{d(q-1)}(M^q, X) \to H^{d(q-1)}(M^q, X)$ является изоморфизмом одномерных Z_p-пространств.

Заметим, что отображение $\pi^* : H^{d(q-1)}(M^q, X) \to H^{d(q-1)}(M^q)$ инъективно, что следует из двойственности Пуанкаре и инъективности отображения $H_d(N(\Delta)) = H_d(M) \to H_d(M^q)$.

Из строения алгебры $\Lambda_p(k)$ нам достаточно доказать, что для всякого ненулевого $w \in \Lambda_p^{d(q-1)}(k)$ его образ в $H_G^*(X)$ ненулевой. Образ этого элемента в $H_G^*(M^q)$ будем также обозначать w — он ненулевой из тривиальности индекса $\operatorname{Ind} M^q$.

Предположим противное утверждению леммы: образ w в $H_G^*(X)$ нулевой. Тогда из точной последовательности когомологий следует, что найдётся $w' \in H_G^{d(q-1)}(M^q, X)$, для которого $\pi^*(w') = w$. Из строения групп $H_G^{d(q-1)}(M^q, X)$ и $H^{d(q-1)}(M^q, X)$ следует, что для некоторого $a \in Z_p^*$ $au = f^*(w')$. Тогда из спектральной последовательности для G-когомологий $f^*(w) = 0$, но из коммутативности естественных отображений $f^*(w) = f^*(\pi^*(w')) = \pi^*(f^*(w')) = \pi^*(au) \neq 0$ по доказанному в предыдущем абзаце — противоречие. $\square$

Доказательство теоремы 8.6. Для каждого g_i из условия теоремы рассмотрим G-эквивариантное отображение конфигурационного пространства $f_i : X \to \mathbb{R}^q$, задаваемое формулой

$$f_i(\phi) = \oplus_{g \in G} \alpha_i \left(\phi(g_{i1} + g), \phi(g_{i2} + g), \dots, \phi(g_{im_i} + g) \right).$$

Рассмотрев факторпространство $\mathbb{R}^q$ по его диагонали — $\mathbb{R}^q/\mathbb{R} = W_i$, из f_i получим отображение $h_i : X \to W_i$.

Ясно, что утверждение теоремы равносильно тому, что $h = h_1 \oplus \dots \oplus h_d$ отображает некоторую точку X в нуль векторного пространства $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_d$. Но последнее пространство имеет действие G, значит h можно считать G-эквивариантным сечением G-эквивариантного расслоения над X.

Рассматриваемое G-расслоение над X индуцировано G-расслоением W над pt. Класс Эйлера последнего расслоения ненулевой в $H_G^{d(q-1)}(\mathrm{pt})$. А так как по лемме 8.7 $\operatorname{Ind} X \subseteq I_{d(q-1)+1}\Lambda_p(k)$, то образ этого класса в $H_G^{d(q-1)}(X)$ также ненулевой. Таким образом существование нуля сечения гарантировано. ☐

Глава 9

Категория Люстерника-Шнирельмана прообразов

В этом разделе будет аксиоматически обобщено понятие относительной категории Люстерника-Шнирельмана, доказано некоторое утверждение о категории прообразе точки и из него выведено геометрическое следствие, аналогичное теореме Борсука-Улама в формулировке для нечётных функций.

9.1 Обобщённая относительная категория

Для начала дадим определение, которое выделяет некоторые общие свойства разных видов понятия категории в духе Люстерника-Шнирельмана.

Определение. Пусть X — топологическое пространство, а k — функция, определённая на непустых открытых подмножествах X, обладающая следующими свойствами:

1) если $U \subseteq V$, то $k(U) \leq k(V)$ (монотонность);

2) $k(U_1 \cup \dots \cup U_n) \leq k(U_1) + \dots + k(U_n)$ (субаддитивность);

3) $k(U_1 \cup \dots \cup U_n) \leq \max\{k(U_1), \dots, k(U_n)\}$, если замыкания $\operatorname{cl} U_1, \dots, \operatorname{cl} U_n$ попарно не пересекаются.

Такую функцию k будем называть *обобщённой относительной категорией.*

Ясно, что относительная категория Люстерника-Шнирельмана $\operatorname{cat}_X U$ из [85] является обобщённой относительной категорией, если пространство X линейно связно. Есть и другие примеры обобщённой относительной категории.

Далее в примерах обобщённых относительных категорий топологические пространства будут предполагаться паракомпактными абсолютными окрестностными ретрактами, чтобы избежать возможных тонкостей с определениями категории.

Следующие примеры обобщённых относительных категорий основаны на понятиях рода, индекса, когомологической длины и т.п.

Пусть $\pi : Y \to Y/G$ — естественная проекция пространства со свободным действием G. Для величины $g_G(\pi^{-1}(U))$ свойства 1 и 3 обобщённой относительной категории выполняются очевидно. Субаддитивность следует из того, что $g_G(\pi^{-1}(U))$ является частным случае категории сечений (см. [52, 31]), или из теоремы 2.27. Если группа G имеет вид Z_p, то вместо $g_G(\pi^{-1}(U))$ можно в качестве категории взять $\operatorname{hind} \pi^{-1}(U) + 1$. Если в определении когомологического индекса берутся когомологии Чеха, свойство 3 будет следовать из леммы 2.18.

Далее для когомологий фиксируем некоторое кольцо коэффициентов A. Дадим ещё одно определение (более общие формулировки см. в [7], Глава 4).

Определение. Пусть X — топологическое пространство, $\iota : U \to X$ — естественное вложение подпространства. Тогда *относительной* *когомологической длиной* U назовём

$$\operatorname{hl}_X U = \max\{k : \exists u_1, \dots, u_k \in H^*(X, A),\\ \forall i\ \dim u_i > 0,\ \iota^*(u_1)\iota^*(u_2)\dots\iota^*(u_k) \neq 0\}.$$

Покажем, что $\operatorname{hl}_X U+1$ является обобщённой относительной категорией. Из леммы 2.25 сразу следует выполнение свойства 2 обобщённой относительной категории для числа $\operatorname{hl}_X U + 1$. Действительно, если некоторое произведение $N = \sum_{i=1}^n \operatorname{hl}_X U_i + n$ классов положительной размерности $u_1, \dots, u_N \in H^*(X, A)$ не обращается в нуль на $\bigcup_{i=1}^n U_i$, то это произведение можно разбить на n отрезков длин $\operatorname{hl}_X U_i + 1$ соответственно. По лемме 2.25, один из отрезков произведения не сможет обратиться в нуль на соответствующем U_i, что противоречит определению длины U_i. Свойства 1 и 3 для когомологической длины очевидны.

Рассуждение из предыдущего абзаца на также показывает, что $\operatorname{cat}_X U \geq \operatorname{hl}_X U + 1$. На самом деле для любой обобщённой относительной категории k, которая равна единице на стягиваемых по X подмножествах, верно что $k(U) \leq \operatorname{cat}_X U$.

Заметим также, что для всякого непрерывного отображения $f : X \to Y$ категория сужения отображения, определённая в [8], $f|_U$ является обобщённой относительной категорией. Также для всякого класса когомологий ξ (возможно обобщённых) категория сужения класса (определённая там же) $\xi|_U$ является обобщённой относительной категорией. Для некоторого расслоения $E \to X$ категория сечений (sectional category — обозначение работы [31]) $\operatorname{secat} E|_U$, определённая в [52], также является обобщённой относительной категорией.

Обзор разных обобщений понятия категории Люстерника-Шнирельмана содержится в [31]. Заметим, что разные варианты понятия *строгой категории* U, в которых, в отличие от обычной категории, требуется стягиваемость каждого множества покрытия по себе, не обладает требуемыми свойствами, в частности нарушается свойство 3.

Сформулируем основой результат этого раздела.

Теорема 9.1. *Пусть на пространстве X задана обобщённая относительная категория k, для которой $k(X) > n(d+1)$. Предположим, что $f : X \to Y$ — непрерывное отображение в d-мерное (в смысле покрытий) метрическое пространство Y и образ $f(X)$ относительно компактен. Тогда найдётся точка $c \in Y$ такая, что для любой окрестности $U \ni c$*

$$k(f^{-1}(U)) > n.$$

Если k является гомотопическим инвариантом и слой $f^{-1}(c)$ является ретрактом некоторой своей окрестности в X, то из теоремы следует, что $k(f^{-1}(c)) > n$. В частности, это выполнено для аналитических функций на вещественно-аналитическом многообразии X и приведённых выше примеров функций k.

Если функция $k(U)$ обладает свойством непрерывности (для всякого замкнутого $F \subseteq X$ для некоторой окрестности $U \supset F$ выполняется $k(F) \geq k(U)$), то из теоремы следует, что $k(f^{-1}(c)) > n$. Это выполняется, в частности, для рода G-действия и для некоторых случаев категории сечений и т. п.

Частный случай теоремы 9.1 для некоторого аналога рода Z_2-действия доказан в [63] (Лемма 3.1), где из него выведено содержательное геометрическое следствие. Для индекса Ind $(Z_p)^k$-пространств аналогичный результат доказан в [76] (Лемма 9.1 и следствие 9.1). Фактически, в [76] содержится и идея доказательства теоремы 9.1 для когомологической длины.

Близкий результат получен в работе [61], где отображение должно быть расслоением и в оценке $d+1$ заменено на категорию отображения. Сформулируем его для сравнения:

Теорема 9.2. *Пусть $F \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{p} B$ — расслоение со связными B и F. Тогда*

$$\operatorname{cat} E \leq \operatorname{cat} \iota \cdot \operatorname{cat} p.$$

9.2 Доказательство и следствия

Нам понадобится лемма (Лемма 2.4 из [47]).

Лемма 9.3. *Пусть пространство X паракомпактно и его размерность в смысле покрытий равна d. Тогда во всякое открытое покрытие $\mathcal{V}$ пространства X можно вписать открытое покрытие*

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{d+1} \mathcal{U}_i,$$

в котором каждое семейство $\mathcal{U}_i$ состоит из множеств с попарно непересекающимися замыканиями.

Доказательство теоремы 9.1. Пространство Y метрическое, и, следовательно, паракомпактное. По лемме 9.3 покроем Y семейством открытых множеств $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_{d+1}$ с диаметрами множеств покрытия не более ε. Обозначим $V_i = \bigcup \mathcal{U}_i$.

По свойству 2 обобщённой относительной категории для некоторого i $k(f^{-1}(V_i)) > n$. По свойству 3 найдётся множество $V \in \mathcal{U}_i$, для которого $k(f^{-1}(V)) > n$.

Устремляя ε к нулю, будем находить все более мелкие множества V, по соображениям компактности можно считать, что все они стремятся к некоторой точке $c \in Y$. Покажем, что c является нужной точкой от противного. Если найдётся окрестность $U \ni c$, для которой $k(f^{-1}(U)) \leq n$, то для достаточно мелкого покрытия будет $V \subseteq U$, значит получаем противоречие со свойством 1. □

Сформулируем некоторые следствия из теоремы 9.1. На самом деле эти следствия вытекают уже из версии теоремы 9.1, известной Янгу [64].

Следствие 9.4 (Обобщение теоремы Борсука-Улама)**.** *Пусть даны натуральные числа k, l, n, причём $k(l+1) \leq n$. Тогда для любых*

l чётных непрерывных функций на сфере S^n $(f_1, \dots, f_l)$ найдутся такие числа $(c_1, \dots, c_l)$, что для любых k нечётных непрерывных функций $(g_1, \dots, g_k)$ система

$$\begin{aligned} f_1(x) = c_1,\ f_2(x) = c_2, \dots, f_l(x) = c_l \\ g_1(x) = 0,\ g_2(x) = 0, \dots, g_k(x) = 0 \end{aligned}$$

имеет решение.

Доказательство. По лемме 2.22, Z_2-род S^n при действии $x \mapsto -x$ равен $n+1$. Применим теорему 9.1 к непрерывному отображению $f : S^n \to \mathbb{R}^l$, задаваемому функциями $(f_1, \dots, f_l)$. Тогда найдём такой набор $(c_1, \dots, c_l)$, что подмножество S^n (см. комментарий после теоремы 9.1)

$$Y = \{x \in S^n : f_1(x) = c_1,\ f_2(x) = c_2, \dots, f_l(x) = c_l\}$$

имеет род не менее $k+1$. Аналогично доказательству обычной теоремы Борсука-Улама, из леммы 2.22 и свойства монотонности рода следует, что любой набор нечётных непрерывных функций $(g_1, \dots, g_k)$ имеет нуль на Y, что и требовалось доказать. ☐

Можно также сформулировать следствие из этого обобщения теоремы Борсука-Улама, которое получается, если функции $(g_1, \dots, g_k)$ брать линейными.

Следствие 9.5. *Пусть даны натуральные числа k, l, n, причём $k(l+1) \le n$. Тогда для любых l чётных непрерывных функций $(f_1, \dots, f_l)$ на сфере $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ найдутся такие числа $(c_1, \dots, c_l)$, что множество*

$$Y = \{x \in S^n : f_1(x) = c_1,\ f_2(x) = c_2, \dots, f_l(x) = c_l\}$$

пересекается с любым линейным подпространством $\mathbb{R}^{n+1}$ размерности $n+1-k$.

Список литературы

[1] R. Aharoni, P. Duchet, B. Wajnryb, "Successive projections on hyperplanes", *J. Math. Anal. Appl.*, **103** (1984), 134–138.

[2] R.B. Bapat, "A constructive proof of a permutation-based generalization of Sperner's lemma", *Mathematical Programming*, **44** (1989), 113–120.

[3] I. Bárány, S.B. Shlosman, A. Szücs, "On a topological generalization of a theorem of Tverberg", *J. Lond. Math. Soc.*, **23** (1981), 158–164.

[4] I. Bárány, "A generalization of Carathéodory's theorem", *Discrete Math.*, **40** (1982), 141–152.

[5] I. Bárány, D.G. Larman, "A colored version of Tverberg's theorem", *J. London Math. Soc.*, **45**:2 (1992), 314–320.

[6] I. Bárány, A. Hubard, J. Jerónimo, "Slicing convex sets and measures by a hyperplane", *Discrete and Computational Geometry*, **39** (2008), 67–75.

[7] T. Bartsch, *Topological methods for variational problems with symmetries*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1993.

[8] I. Berstein, T. Ganea, "The category of a map and of a cohomology class", *Fund. Math.*, **50** (1961), 265–279.

[9] G. Birkhoff, "Dynamical systems", *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, **9** (1927).

[10] T. Bisztriczky, "On separated families of convex bodies", *Arch. Math.*, **54** (1990), 193—199.

[11] K. Borsuk, "Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre", *Fund. Math.*, **20** (1933), 177–190.

[12] L. Brouwer, "Über abbildung von mannigfaltigkeiten", *Mathematische Annalen*, **71** (1910), 97–115.

[13] S.E. Cappell S.E., J.E. Goodman, J. Pach, R. Pollack, M. Sharir, R. Wenger, "Common tangents and common transversals", *Adv. in Math.*, **106** (1994), 198—215.

[14] L. Danzer L., B. Grünbaum, V. Klee, "Helly's theorem and its relatives", *Convexity, Proc. of Symposia in Pure Math*, **7**, Amer. Math. Soc., Providence, 1963, 101–180.

[15] V.L. Dol'nikov, "Some generalizations of transversal theorems" (to appear).

[16] B. Eaves, "Homotopies for computation of fixed points", *Mathematical Programming*, **3** (1972), 1–22.

[17] J. Eckhoff, "Helly, Radon, and Carathéodory type theorems", *Handbook of Convex Geometry*, eds. P.M. Gruber, J.M. Wills, North-Holland, Amsterdam, 1993, 389–448.

[18] E. Fadell, S. Husseini, “An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk-Ulam and Bourgain-Yang theorems”, *Ergodic Theory and Dinamical Systems*, **8** (1988), 73–85.

[19] E. Fadell, S. Husseini, “Category weight and Steenrod operations”, *Boletin de la Sociedad Matemática Mexicana*, **37** (1992), 151–161.

[20] M. Farber, S. Tabachnikov, “Topology of cyclic configuration spaces and periodic trajectories of multi-dimensional billiards”, *Topology*, **41**:3 (2002), 553–589.

[21] M. Farber, “Topology of billiard problems, II”, *Duke Mathematica Journal*, **115** (2002), 587–621.

[22] A. Flores, “Über n-dimensionale Komplexe, die im R_{2n+1} absolut selbstverschlungen sind”, *Ergeb. Math. Kolloq.*, **6** (1932/1934), 4–7.

[23] S. Froloff, L. Elsholz, “Limite inférieure pour le nombre des valeurs critiques d’une fonction, donné sur une variete”, *Math. Sbornik*, **45**:5 (1935), 637–643.

[24] B. Grünbaum, “Partitions of mass-distributions and of convex bodies by hyperplanes”, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 1257–1261.

[25] H. Guggenheimer, “Finite sets on curves and surfaces”, *Israel Journal of Mathematics*, **3**:2 (1965), 104–112.

[26] H. Hadwiger, H. Debrunner, V. Klee, *Combinatorial Geometry in the Plane*, Holt, Rinehart, and Winston, New York, 1964.

[27] E. Helly, “Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten”, *Jber Deutsch. Math. Verein.*, **32** (1923), 175–176.

[28] H.L. Hiller, “On the cohomology of real grassmanians”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **257**:2 (1980), 521–533.

[29] H.L. Hiller, “On the height of the first Stiefel-Whitney class”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **79**:3 (1980), 495–498.

[30] A. Horn, “Some generalization of Helly’s theorem on convex sets”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 923–929.

[31] I.M. James, “On category, in the sense of Lusternik-Schirelmann”, *Topology*, **17** (1978), 331–348.

[32] T. Kaiser, “Transversals of d-intervals”, *Discrete and Computational Geometry*, **18** (1997), 195–203.

[33] T. Kaiser, Y. Rabinovich, “Intersection properties of families of convex (n, d)-bodies”, *Discrete and Computational Geometry*, **21** (1999), 275–287.

[34] S.A. Kakutani, “A proof that there exists a circumscribing cube around any bounded closed convex set in $\mathbb{R}^3$”, *Ann. of Math.*, **43**:2 (1942), 739–741.

[35] V. Klee, “On certain intersection properties of convex sets”, *Canad. J. Math.*, **3** (1951), 272–275.

[36] R. Kellogg, T. Li, J. Yorke, “Constructive proof of the Brouwer fixed point theorem and computational results”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **13** (1976), 473–483.

[37] M.A. Kervaire, “Relative Characteristic Classes”, *American Journal of Mathematics*, **79**:3 (1957), 517–558.

[38] V. Klee, S. Wagon, *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory*, Dolciani Mathematical Expositions, The Mathematical Association of America, 1996.

[39] V. Klee, T. Lewis, B. Von Hohenbalken, “Appollonius Revisited: Supporting Spheres for Sundered Systems”, *Discrete and Computational Geometry*, **18** (1997), 385—395.

[40] B. Knaster, “Problem 4”, *Colloq. Math.*, **30** (1947), 30–31.

[41] M.A. Krasnosel’skii, “On special coverings of a finite-dimensional sphere”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **103** (1955), 961–964.

[42] N.H. Kuiper, “Double normals of convex bodies”, *Israel Journal of Mathematics*, **2** (1964), 71–80.

[43] E.L. Lusk, “The mod p Smith index and a generalized Borsuk–Ulam theorem”, *Michigan Math. J.*, **22** (1975), 151–160.

[44] J. Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam theorem*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 2003.

[45] J. McCleary, *A user’s guide to spectral sequences*, Cambridge University Press, 2001.

[46] B.H. Neumann, “On an invariant of plane regions and mass distributions”, *J. London Math. Soc.*, **20** (1945), 226–237.

[47] R. Palais, “Homotopy theory of infinite dimensional manifolds”, *Topology*, **5** (1966), 1–16.

[48] R. Palais, “Lusternik-Schnirelmann theory on Banach manifolds”, *Topology*, **5** (1966), 115–132.

[49] R. Rado, “A theorem on general measure”, *J. London Math. Soc.*, **21** (1946), 291–300.

[50] J. Radon, “Mengen konvexer Korper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten”, *Math. Ann.*, **83** (1921), 113–115.

[51] E.A. Ramos, “Equipartiotion of mass distributions by hyperplanes”, *Discrete and Computational Geometry*, **15** (1996), 147–167.

[52] A.S. Šwarč, “The genus of a fibre space”, *Amer. Math. Soc. Transl.*, **55** (1966), 49–140.

[53] E. Sperner, “Neuer beweis fur die invarianz der dimensionszahl und des gebietes”, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar Universitat Hamburg*, **6** (1928), 265–272.

[54] H. Steinhaus, “Sur la division des ensembles de l’espaces par les plans et et des ensembles plans par les cercles”, *Fund. Math.*, **33** (1945), 245–263.

[55] A.H. Stone, J.W. Tukey, “Generalized ’Sandwich’ Theorems”, *Duke Math. J.*, **9** (1942), 356–359.

[56] G. Tardos, “Transversals of 2-intervals, a topological approach”, *Combinatorica*, **15**:1 (1995), 123–134.

[57] G. Tardos, “Transversals of d-intervals — comparing three approaches”, *Proceedings of the Second European Congress of Mathematics*, Progress in Mathematics, **169**, 1998, 234–243.

[58] H. Tverberg, “A generalization of Radon’s theorem”, *J. London Math. Soc.*, **41** (1966), 123–128.

[59] H. Tverberg H., S. Vrećica, “On generalizations of Radon’s theorem and the ham sandwich theorem”, *Europ. J. Combinatorics*, **14** (1993), 259–264.

[60] R.E. Van Kampen, “Komplexe in euklidischen Räumen”, *Abh. Math. Sem.*,, **9** (1932), 72–78.

[61] K. Varadarajan, “On fibrations and category”, *Mathematische Zeitschrift*, **88** (1965), 267–273.

[62] S.T. Vrećica, “Tverberg’s conjecture”, *Discrete and Computational Geometry*, **29** (2003), 505–510.

[63] C.-T. Yang, “Continuous Functions From Spheres to Euclidean Spaces”, *The Annals of Mathematics, 2nd Ser.*, **62**:2 (1955), 284–292.

[64] C.-T. Yang, “On Theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobo and Dyson, II”, *The Annals of Mathematics, 2nd Ser.*, **62**:2 (1955), 271–283.

[65] R.T. Živaljević, S.T. Vrećica, “An extension of the ham sandwich theorem”, *Bull. London Math. Soc.*, **22** (1990), 183–186.

[66] R.T. Živaljević, S.T. Vrećica, “The colored Tverberg’s problem and complexes of injective functions”, *Journal of Comb. Theory, Ser. A*, **61**:2 (1992), 309–318.

[67] R.T. Živaljević, S.T. Vrećica, “New cases of the colored Tverberg theorem”, *Jerusalem Combinatorics ’93*, Contemporary Mathematics, eds. H. Barcelo, G. Kalai, Amer. Math. Soc., Providence, 1994, 325–334.

[68] R.T. Živaljević, “User’s guide to equivariant methods in combinatorics”, *Publications de l’Institut Mathematique*, **64**:78 (1998), 107–132.

[69] R.T. Živaljević, “The Tverberg-Vrećica problem and the combinatorial geometry on vector bundles”, *Israel J. Math.*, **111** (1999), 53–76.

[70] И.К. Бабенко, “Периодические траектории трехмерных бильярдов Биркгофа”, *Мат. сборник*, **181**:9 (1990), 1155–1169.

[71] К. Браун, *Когомологии групп*, Наука, М., 1987.

[72] В.А. Васильев, *Лагранжевы и лежандровы характеристические классы*, МЦНМО, М., 2000.

[73] А.Ю. Воловиков, “Теорема типа Бужена–Янга для $\mathbb{Z}_p^n$-действия”, *Мат. сборник*, **183**:7 (1992), 115—144.

[74] А.Ю. Воловиков, “К топологическому обобщению теоремы Тверберга”, *Мат. заметки*, **59**:3 (1996), 454–456.

[75] А.Ю. Воловиков, Е.В. Щепин, “Антиподы и вложения”, *Мат. сборник*, **196**:1 (2005), 3–32.

[76] А.Ю. Воловиков, “Точки совпадения отображений Z_p^n-пространств”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:5 (2005), 53–106.

[77] М.Л. Громов, “О симплексах, вписанных в гиперповерхности”, *Мат. заметки*, **5**:1 (1969), 81–89.

[78] Б. Грюнбаум, *Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел*, Наука, М., 1971.

[79] Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли, *Теорема Хелли и ее применения*, Мир, М., 1968.

[80] В.Л. Дольников, “Обобщенные трансверсали семейств множеств в $\mathbb{R}^n$ и связи между теоремами Хелли и Борсука”, *Докл. АН СССР*, **297**:4 (1987), 777–780.

[81] В.Л. Дольников, “О разбиении системы мер подпространством многочленов”, *Конструирование алгоритмов и решение задач математической физики*, Доклады 8 Всесоюзного семинара «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики» (Красновидово 7–11 октября 1990), ИПМ им. Келдыша, Москва, 1991, 80–85.

[82] В.Л. Дольников, “Об одном обобщении теоремы о бутерброде”, *Мат. заметки*, **52**:2 (1992), 112–133.

[83] В.Л. Дольников, *Теоремы типа Хелли для трансверсалей семейств множеств и их приложения. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук*, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, 2001.

[84] П. Коннер, Э. Флойд, *Гладкие периодические отображения*, Мир, М., 1969.

[85] Л.А. Люстерник, Л.Г. Шнирельман, *Топологические методы в вариационных задачах*, ГИТТЛ, М., 1930.

[86] Л.А. Люстерник, Л.Г. Шнирельман, “Топологические методы в вариационных задачах и их приложения к дифференциальной геометрии поверхностей”, *УМН*, **2**:1(17) (1947), 166–217.

[87] В.В. Макеев, “Шестидольные разбиения трехмерного пространства”, *Вестник ЛГУ*, **2** (1988), 31–34.

[88] В.В. Макеев, “Задача Кнастера и почти сферические сечения”, *Мат. сборник*, **180**:3 (1989), 424—431.

[89] В.В. Макеев, *Универсально вписанные и описанные многогранники. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук*, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 2003.

[90] В.В. Макеев, “Вписанные и описанные многогранники для выпуклого тела и задача о непрерывных функциях на сфере в евклидовом пространстве”, *Алгебра и анализ*, **18** (2006), 187–204.

[91] В.В. Макеев, “Некоторые экстремальные задачи для векторных расслоений”, *Алгебра и анализ*, **19**:2 (2007), 131–155.

[92] Д. Милнор, Д. Сташеф, *Характеристические классы*, Мир, М., 1979.

[93] А.С. Мищенко, *Векторные расслоение и их применения*, Наука, М., 1984.

[94] Л. Ниренберг, *Лекции по нелинейному функциональному анализу*, Мир, М., 1977.

[95] Е.С. Половинкин, *Элементы теории многозначных отображений*, Московский физико-технический институт, М., 1982.

[96] У И Сян, *Когомологическая теория топологических групп преобразований*, Мир, М., 1979.

[97] Г. Хадвигер, Г. Дебруннер, *Комбинаторная геометрия на плоскости*, Наука, М., 1965.

[98] М. Холл, *Комбинаторика*, Мир, М., 1970.

[99] С. Улам, *Нерешённые математические задачи*, Наука, М., 1964.

[100] А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс, *Курс гомотопической топологии*, Наука, М., 1989.

[101] Г.Е. Шилов, Б.Л. Гуревич, *Интеграл, мера и производная*, Наука, М., 1967.

[102] Л.Г. Шнирельман, “О некоторых геометрических свойствах замкнутых кривых”, *Успехи мат. наук*, **10** (1944), 34–44.