

- (1) Гладкие отображения открытых подмножеств \mathbb{R}^n , теорема об обратном отображении и криволинейные системы координат. Вложенные в \mathbb{R}^n гладкие многообразия и абстрактное определение гладкого многообразия. Многообразия с краем. Действительное и комплексное проективные пространства как гладкие многообразия. Многообразии Грассмана и клетки Шуберта.
- (2) Гладкие функции на гладком многообразии, разбиение единицы на компактном многообразии и в некомпактном случае. Гладкие отображения между гладкими многообразиями и диффеоморфизмы. Классификация одномерных компактных многообразий с точностью до диффеоморфизма.
- (3) Определение касательного вектора в точке как дифференцирования функций. Геометрическое определение касательного вектора. Касательное и кокасательное расслоение гладкого многообразия, определение структуры гладкого многообразия на них. Векторные поля и тензоры.
- (4) Дифференциальные формы первой и высших степеней. Внешнее дифференцирование, его существование и единственность. Тожество $d^2 = 0$. Прямой образ вектора и обратный образ дифференциальной формы при гладком отображении многообразий.
- (5) Ориентация многообразия и его края. Интегрирование дифференциальных форм степени n с компактным носителем в \mathbb{R}^n , условие гомологичности двух форм через интеграл, замена координат. Интегрирование дифференциальных форм с компактным носителем по ориентированному многообразию, формула Стокса.
- (6) Интегрирование векторных полей, однопараметрические группы диффеоморфизмов. Формулы для производной Ли дифференциальных форм и векторных полей. Скобка Ли векторных полей и тождество Якоби для неё.
- (7) Теорема Фробениуса об интегрируемости системы векторных полей. Подрасслоения и факторрасслоения касательного расслоения, их тензоры кривизны и их интегрирование. Слоения и структура погружения их слоёв в исходное многообразие.
- (8) Понятие о группах и алгебрах Ли. Алгебра Ли левоинвариантных векторных полей на группе Ли. Однопараметрические подгруппы групп Ли и их соответствие левоинвариантным векторным полям. Линейные группы Ли, явный вид их однопараметрических подгрупп и левоинвариантных векторных полей на них.
- (9) Построение подгруппы группы Ли по подалгебре Ли. Замкнутые и незамкнутые подгруппы групп Ли. Дискретные и замкнутые подгруппы группы \mathbb{R}^n по сложению. Мера Хаара на группе Ли и усреднение по компактной группе Ли.
- (10) Накрытие связного многообразия, поднятие путей и гомотопий между путями. Отображения между накрытиями многообразий с отмеченной точкой и определение универсального накрытия. Универсальность односвязного накрытия. Конструкция универсального накрытия и односвязность универсального накрытия.
- (11) Фундаментальная группа, её связь с универсальным накрытием и связными накрытиями связного многообразия. Фундаментальная группа тора и проективного пространства.
- (12) Связные группы Ли и их универсальные накрытия. Соответствие между гомоморфизмами групп Ли и гомоморфизмами их алгебр Ли. Примеры классических групп и их накрытий. Описание коммутативных групп Ли, замкнутые подгруппы в торах $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.
- (13) Когомологии де Рама многообразия. Их функториальность относительно классов гомотопии гладких отображений, вычисление для стягиваемых пространств. Когомологии с компактным носителем. Сравнение с другими теориями гомологий.
- (14) Критические и регулярные значения гладкого отображения, теорема Сарда.
- (15) Степень гладкого отображения между компактными многообразиями равных размерностей, корректность её определения. Определение степени отображения через интеграл и когомологии. Отображения многообразий, понижающие размерность, и обобщение понятия степени до инвариантов в бордизмах и конструкции Понтрягина.

- (16) Теорема Брауэра о неподвижной точке. Существование нигде не нулевых векторных полей на сфере. Степень отображения для многообразий с краем. Теорема Тома о трансверсальности к точке. Степень нечётного отображения сферы в себя.
- (17) Обзор базовых понятий римановой геометрии. Риманова структура и риманова метрики, функционалы длины и энергии. Риманов объём.
- (18) Ковариантная производная векторного поля, уравнение геодезической. Параллельный перенос вектора вдоль кривой.
- (19) Экспоненциальное отображение на (полу)римановом многообразии и выпуклые окрестности. Полнота и геодезическая полнота риманова многообразия. Трубочатые окрестности подмногообразий, объём трубочатой окрестности в первом приближении.
- (20) Тензор кривизны Римана, его симметрии. Уравнение Якоби для вариации геодезической, скалярная кривизна и кривизна Риччи.
- (21) Модельные пространства римановой геометрии. Сфера и гиперболическое пространства. Метрика Фубини–Штуди на комплексном проективном пространстве, её совместимость с комплексной структурой.
- (22) Линейная симплектическая геометрия, канонический вид кососимметричной формы, её вырожденность и невырожденность. Лагранжевы подпространства, параметризация лагранжевых подпространств, дополнительных к данному.
- (23) Линейные симплектические преобразования, их примеры. Линейные симплектические преобразования, сохраняющие все векторы некоторого лагранжева подпространства. Формула для аналитической функции от линейного оператора.
- (24) Симплектическая «диагонализация» положительно определённых квадратичных форм. Связь между симплектической формой, положительно определённой квадратичной формой и комплексной структурой. Описание унитарных преобразований в симплектических терминах. Полярное разложение симплектического преобразования и связность группы линейных симплектических преобразований.
- (25) Симплектические многообразия, ориентируемость, симплектический объём. Деформации симплектических структур, метод Мозера для порождения деформации векторным полем и теорема Дарбу о локальном виде симплектического многообразия.
- (26) Косаутельное расслоение и его каноническая симплектическая структура. Преобразование Лежандра выпуклых функций и гамильтонов формализм классической механики, лагранжево и гамильтоново действие.
- (27) Гамильтоновы векторные поля и векторные поля, сохраняющие симплектическую форму. Сохранение энергии в автономных гамильтоновых системах. Теорема Ли Хуачжуня о дифференциальных формах, инвариантных относительно всех гамильтоновых преобразований.
- (28) Скобка Пуассона функций, алгебра Ли функций на симплектическом многообразии. Описание координат Дарбу в терминах скобки Пуассона. Гамильтониан гармонического осциллятора, интегралы движения и периодические траектории его векторного поля.
- (29) Лагранжевы подмногообразия симплектических многообразий. Строение окрестностей лагранжевых подмногообразий. Деформации лагранжевых подмногообразий и их гамильтоновы деформации. Симплектоморфизмы как лагранжевы подмногообразия и их производящие функции. Задание лагранжевых многообразий в косаутельном расслоении через графики дифференциалов функций на базе, а также с помощью послойных критических точек функций на произведении многообразия и евклидова пространства.
- (30) Контактные формы и контактный объём. Гиперповерхности контактного типа в симплектических многообразиях и лиувиллевы векторные поля. Контактные формы на гиперповерхностях в косаутельных расслоениях. Стандартная контактная форма на нечётномерной сфере, контактные формы на поверхности выпуклого тела в \mathbb{R}^{2n} . Понятие о контактной структуре.
- (31) Векторное поле Реба контактной формы и его вариационное описание. Теорема Дарбу о локальном строении контактной формы. Векторные поля, сохраняющие контактную форму и контактную структуру. Гамильтонианы контактных векторных полей. Деформации контактных структур и теорема Грея о стабильности.

- (32) Почти комплексные и римановы структуры, совместимые с симплектической структурой. Их существование и (неоднозначная) параметризация римановыми структурами. Интегрируемость почти комплексных структур, ситуация в двумерном случае. Форма Фубини–Штуди на проективном пространстве.
- (33) Симплектический объём, пфаффиан и детерминант кососимметричной матрицы. Неравенство между римановым объёмом и симплектическим объёмом подмногообразий, минимальность комплексных подмногообразий кэлерова многообразия.
- (34) Теорема Тома о трансверсальности. Число пересечения подмногообразий дополнительных размерностей со знаком и по модулю два. Число пересечения двух отображений многообразий в многообразии, его гомотопическая и гомологическая инвариантность. Свойства числа пересечения комплексных подмногообразий.
- (35) Определение эйлеровой характеристики многообразия через векторные поля, её независимость от выбора векторного поля. Неподвижные точки гладкого отображения и самопересечение диагонали. Эйлерова характеристика полиэдра, её выражение через количество граней и через его клеточные гомологии. Число Лефшеца непрерывного отображения.
- (36) Основы теории Морса для гладких многообразий. Существование функций с только невырожденными критическими точками. Лемма Морса о локальном строении невырожденной критической точки. Градиентный поток функции, индексы критических точек и критических подмногообразий.
- (37) Понятие о сингулярных гомологиях, гомотопическая инвариантность, длинная точная последовательность гомологий, свойство вырезания. Приклеивание ручек и соответствующее изменение гомологий многообразия. Равенство эйлеровой характеристики многообразия в смысле градиентного векторного поля и в смысле гомологий многообразия. Оценки количества невырожденных критических точек через гомологии многообразия.
- (38) Изучение геодезических на римановых многообразиях с помощью теории Морса в пространстве путей или петель. Существование замкнутых геодезических, дискретизация и переход к конечномерному подпространству в пространстве петель. Доказательство существования замкнутой геодезической на сфере с любой римановой метрикой с помощью степени отображения.
- (39) Теория Люстерника–Шнирельмана для вырожденных критических точек. Категория Люстерника–Шнирельмана топологических пространств, её значения для вещественного и комплексного проективного пространства. Применение теоремы о степени нечётного отображения сферы в себя.
- (40) Связь геодезических на римановых и финслеровых многообразиях с контактной и симплектической геометрией. Теорема Пуанкаре о возвращении для отображений пространства с конечной мерой в себя. Лемма Пуанкаре–Биркгофа о неподвижных точках и её следствие для замкнутых геодезических на двумерной сфере.
- (41) Симплектические и гамильтоновы действия групп на многообразии и отображение момента. Инвариантные относительно действия компактной группы римановы метрики, инвариантная почти комплексная структура, совместимая с инвариантной симплектической структурой. Строение множества неподвижных точек изометричного действия компактной группы на многообразии. Теорема Дарбу в окрестности неподвижной точки симплектического действия компактной группы Ли.
- (42) Критические точки гамильтониана действия окружности. Локальное строение отображения моментов для гамильтонова действия тора. Выпуклость образа связного замкнутого многообразия при отображении момента для гамильтонова действия тора. Комплексное проективное пространство как торическое многообразие.
- (43) Характеристическая форма первой степени для действия окружности на многообразии. Симплектическая форма на редукции поверхности уровня гамильтониана действия окружности, её линейная зависимость от уровня. Кусочная полиномиальность для формы объёма при отображении момента и формула Даюстермаата–Хекмана. Преобразование Фурье характеристической функции многогранника.

Основными учебниками являются [1, 2, 7, 3].

РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО КУРСУ

- [1] Ш. Стернберг. *Лекции по дифференциальной геометрии*. Мир, 1970.
- [2] Ф. Уорнер. *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*. Мир, 1987.
- [3] Д. Макдафф, Д. Саламон. *Введение в симплектическую топологию*. R&C Dynamics, Москва–Ижевск, 2012.
- [4] Дж. Милнор. *Теория Морса*. Мир, 1965.
- [5] M. F. Atiyah. Convexity and commuting Hamiltonians. *Bull. London Math. Soc.* 14 (1982), 1–15.
- [6] M. F. Atiyah, R. Bott. The moment map and equivariant cohomology. *Topology* 23:1 (1984), 1–28.
- [7] A. Cannas da Silva. *Lectures on Symplectic Geometry*. Lecture Notes in Mathematics 1764, Springer, 2008.
- [8] F. H. Clarke. A classical variational principle for periodic Hamiltonian trajectories. *Proceedings of the American Mathematical Society* 76:1 (1979), 186–188.
- [9] H. Hofer, E. Zehnder. *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*. Birkhäuser, 1994.
- [10] H. Geiges. *An Introduction to Contact Topology*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 109, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [11] V. Guillemin, A. Pollack. *Differential Topology*. American Mathematical Society, Reprint edition, 2008
- [12] C. Viterbo. Symplectic topology as the geometry of generating functions. *Mathematische Annalen* 292 (1992), 685–710.