СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
02 ДЕКАБРЯ 2012

1 КУРС

1. Пусть $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция, причём $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Обязательно ли найдётся $\xi \in [0,1]$ такое, что $f(\xi)f'(\xi)^2 \geq 4/9$?

2. Некоторые подмножества вещественной прямой объявлены *хорошими*. Известно, что все лучи $(-\infty, a)$, где a — рациональное число, хорошие. Также известно, что разность двух хороших множеств и объединение любого семейства хороших множеств всегда является хорошим. Правда ли, что любое множество на прямой является хорошим?

3. В пространстве $\mathbb{R}^n$ отмечены все 2^n точек, все координаты которых — нули или единицы. Затем некоторые пары этих точек соединены единичными отрезками так, что от любой точки до любой другой существует единственный путь по этим отрезкам. Докажите, что один из таких путей имеет длину, не меньшую $2n - 1$.

4. Докажите, что если многочлен с рациональными коэффициентами имеет корень $1 + \cos(2\pi/9) + \cos^2(2\pi/9)$, то он имеет также корень $1 + \cos(8\pi/9) + \cos^2(8\pi/9)$.

5. Трёхмерный выпуклый многогранник комбинаторно эквивалентен правильному октаэдру, то есть имеет 8 вершин, из каждой выходит по 4 ребра, и грани являются треугольниками. Его грани раскрашены в чёрный и белый цвета так, что соседние по ребру грани разноцветны. Оказалось, что при каждой вершине сумма чёрных углов равна сумме белых. Докажите, что сумма площадей чёрных граней равна сумме площадей белых.

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
02 ДЕКАБРЯ 2012

2–6 КУРС

1. Некоторые подмножества вещественной прямой объявлены *хорошими*. Известно, что все лучи $(-\infty, a)$, где a — рациональное число, хорошие. Также известно, что разность двух хороших множеств и объединение любого семейства хороших множеств всегда является хорошим. Правда ли, что любое множество на прямой является хорошим?

2. В евклидовом пространстве E даны два подпространства U и V. Оператор $A : U \to U$ действует так: всякий вектор $x \in U$ сначала ортогонально проецируется на V, а потом полученный вектор ортогонально проецируется на U. Докажите, что A самосопряжён.

3. В пространстве $\mathbb{R}^n$ отмечены все 2^n точек, все координаты которых — нули или единицы. Затем некоторые пары этих точек соединены единичными отрезками так, что от любой точки до любой другой существует единственный путь по этим отрезкам. Докажите, что один из таких путей имеет длину, не меньшую $2n - 1$.

4. Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый шар радиуса 1 с центром в нуле, а B' — шар большего радиуса с тем же центром. Функция $f : B' \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема, и для любого $x \in B$ выполняется неравенство $|\nabla f(x)| \geq 1$. Докажите, что
$$\max_{x \in B} f(x) - \min_{x \in B} f(x) \geq 2.$$

5. Пусть X — конечное подмножество решётки $\mathbb{Z}^2$, состоящее из более чем одной точки. Предположим, что сдвигами X на целочисленные векторы можно без пересечений (в один слой) покрыть $\mathbb{Z}^2$. Докажите, что функция $P \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$
$$P(x, y) = \sum_{(n,m) \in X} e^{inx + imy}$$
обращается в нуль в некоторой точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.