ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА. III ТУР. МАТЕМАТИКА.

Студент ______________________________ $\frac{\text{ВУЗ}}{\text{группа}}$ ____________

заполнять разборчиво печатными буквами,
ФИО писать полностью!

1.(10 очков) Пусть у функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в каждой точке x_0 существует конечный предел

$$g(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Верно ли, что функция $g(x)$ непрерывна?

2.(10 очков) Пусть A — несчетное множество действительных чисел. Доказать, что существует строго возрастающая последовательность $\{a_n\}$, все члены которой принадлежат A.

3.(10 очков) Пусть T — невырожденная положительно определенная симметричная матрица; (p, x) — скалярное произведение векторов p, x; $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, Tx) \le 1\}$. Найти

$$\max_{x \in A} (p, x).$$

4.(10 очков) Матрица A обратима. Верно ли, что существует многочлен p такой, что $A^{-1} = p(A)$?

5.(10 очков) Пусть $P(y)$ — многочлен степени не менее первой. При каких значениях $y_0 \in \mathbb{R}$ решение задачи Коши $y' = P(y)$, $y(0) = y_0$, существует на полуоси $[0, +\infty)$?

6.(15 очков) Пусть $f \in C^2([0, 1])$. Найти $\min \int\limits_0^1 |f''(x)|^2 \, dx$ при условии $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) = 1$.

7.(15 очков) Комплексное векторное пространство $\mathbb{C}^n$ можно рассматривать также как вещественное векторное пространство размерности $2n$. Доказать, что любое вещественное подпространство $L \subset \mathbb{C}^n$ вещественной размерности $2n-1$ содержит ровно одно комплексное подпространство $L' \subset \mathbb{C}^n$ комплексной размерности $n - 1$.

8.(15 очков) Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна. Доказать, что для любого интервала $(a, b) \subset \mathbb{R}$ найдется точка $x_0 \in (a, b)$ и число l такие, что для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$f(x) \ge f(x_0) + l \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0.$$

9.(20 очков) Определим последовательность $\{t_n(q)\}$ следующим образом

$$t_0(q) = 0, \quad t_{n+1}(q) = \frac{q}{1 - t_n(q)}, \text{ для } n \ge 0.$$

Найти для каждого $n \ge 1$ минимальное действительное положительное q, для которого $t_n(q)$ определено и равно 1.

10.(пункт а) 10 очков, пункт б) 20 очков) Рассмотрим множество векторов V_{16}, состоящее из всех векторов размерности 16, у которых координаты принимают значения $-1, 0, 1$, и количество нулевых координат в точности равно 8.
Доказать, что найдётся подмножество $W \subseteq V_{16}$, состоящее из попарно неортогональных векторов, размера
а) не менее 12000;
б) не менее 28000.