

# МЕРА НЕВЫПУКЛОСТИ ПЛОСКИХ МНОЖЕСТВ И СУММА МИНКОВСКОГО

Р.Н. КАРАСЁВ

Аннотация. В этой работе рассматривается мера невыпуклости простой многоугольной области на плоскости. Доказывается, что для «не очень невыпуклых» областей эта мера не уменьшается при операции суммы Минковского, гарантируя таким образом отсутствие «дыр» в сумме Минковского.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Напомним определение суммы Минковского двух множеств  $A, B \subset \mathbb{R}^d$ .

**Определение 1.** Сумма Минковского  $A$  и  $B$  — это

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

В этой работе рассматривается сумма Минковского на плоскости. Известно, что сумма Минковского выпуклых множеств является выпуклым множеством. В случае выпуклых многоугольников она вычисляется с помощью алгоритма «слияния отсортированных ориентированных сторон» исходных многоугольников, который даёт стороны суммы Минковского. При рассмотрении невыпуклых многоугольников требуются более сложные алгоритмы, см. например [1, 2, 3]. В цитируемых работах задача вычисления суммы Минковского естественно возникает при решении задач плотной упаковки или планирования движения. В частности, множество всевозможных сдвигов множества  $A$ , которые не пересекают множество  $B$  соответствует сумме Минковского  $(-A) + B$ , где минус означает симметрию относительно начала координат.

Наиболее прямолинейный способ нахождения суммы Минковского невыпуклых областей — это разложение невыпуклых областей в объединение выпуклых, вычисление соответствующих сумм Минковского выпуклых частей и объединение результатов, см. например [1]. В практических применениях, когда области существенно невыпуклы, такой подход может быть слишком сложен. В таких случаях часто используются методы, основанные на интуитивно понятных процессах «скольжения» одного множества по другому, см. например [2, 3]. Такие методы могут неплохо справляться с невыпуклыми областями, но трудной частью этих методов является обнаружение «дыр» в сумме Минковского. Следовательно, важно иметь эффективно вычисляемые критерии того, что сумма Минковского не имеет «дыр» (то есть является односвязной).

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 52A10, 52A30.

*Key words and phrases.* сумма Минковского, слабая выпуклость.

Исследование выполнено при частичной поддержке фонда «Династия».

В разделе 2 мы определяем меру невыпуклости  $\text{асо } K$  для односвязного многоугольника (простого многоугольника)  $K$  на плоскости, причём  $\text{асо } K \leq 0$  всегда и  $\text{асо } K = 0$  тогда и только тогда, когда  $K$  выпуклый. Это определение использует существенно свойства плоских фигур, другие определения мер невыпуклости, применимые в случаях большей (или даже бесконечной) размерности рассмотрены в [4]. Другой вариант меры невыпуклости, основанный на метрике, заданной кратчайшими путями в  $K$ , описан в [5].

Сформулируем основной результат работы.

**Теорема 1.** Пусть  $K$  и  $L$  — простые многоугольники, такие что  $\text{асо } K, \text{асо } L > -\pi$ . Тогда  $K + L$  — тоже простой многоугольник и

$$\text{асо}(K + L) \geq \min\{\text{асо } K, \text{асо } L\}.$$

Эта теорема показывает, что свойство  $\text{асо } K > -\pi$  стабильно относительно операции суммы Минковского, и в этом случае сумма произвольного количества простым многоугольниками является простым многоугольником.

В доказательстве теоремы 1 мы используем следующий факт, имеющий собственную ценность. Он является естественным обобщением теоремы (Хана-Банаха) об отделенности для выпуклых множеств.

**Теорема 2.** Пусть  $K$  — простой многоугольник и  $\text{асо } K > -\pi$ . Тогда для любой точки  $x \notin K$  найдётся угол  $A$  с вершиной  $x$  с угловой мерой  $\angle A = \pi + \text{асо } K$ , такой что

$$A \cap K = \emptyset.$$

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВОЙ ВЫПУКЛОСТИ

Сделаем определения и зафиксируем некоторые обозначения.

**Определение 2.** Последовательность точек  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^2$  (вершин) и соответствующих отрезков  $v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n$  (рёбер) называется *ломаной*. Мы всегда требуем, чтобы последовательные вершины не совпадали  $v_i \neq v_{i+1}$ .

Для ломаной  $P = v_1 \dots v_n$  последовательность векторов  $v_2 - v_1, \dots, v_n - v_{n-1}$  назовём *последовательностью сдвигов* и обозначим её  $S(P)$ .

**Определение 3.** Ломаная  $v_1v_2 \dots v_{n+1}$  называется *замкнутой*, если  $v_1 = v_{n+1}$ . В таком случае мы часто нумеруем вершины по модулю  $n$ .

**Определение 4.** Ломаная называется *простой*, если она не имеет самопересечений, то есть её рёбра могут пересекаться в одной точке, если они соседние, иначе они не пересекаются. В замкнутой ломаной, естественно, начало первого ребра совпадает с концом последнего.

**Определение 5.** Компакт  $K \subset \mathbb{R}^2$  назовём *простым многоугольником*, если его граница — некоторая простая замкнутая ломаная.

Очевидно, что в общем сумма Минковского двух простых многоугольников может не быть простым многоугольником. Неформально говоря, в ней могут быть «дыры». Как уже указывалось, мы хотим дать достаточные условия того, чтобы сумма Минковского была простым многоугольником. Нам потребуются следующие определения.

**Определение 6.** Для двух векторов на плоскости определим *косое произведение*

$$[v, w] = v_x w_y - v_y w_x.$$

Два ненулевых вектора  $v, w$  называются *параллельными*, если  $v = \alpha w$ . Если при этом  $\alpha < 0$ , мы называем векторы *противоположными*.

**Определение 7.** Для двух непротивоположных векторов  $v, w$  обозначим  $\angle(v, w)$  угол между векторами со знаком, положительным если  $[v, w] > 0$  и отрицательным если  $[v, w] < 0$ .

**Определение 8.** Если последовательность сдвигов ломаной  $P$  не содержит пары последовательных противоположных сдвигов, мы говорим, что  $P$  *невозвратная*.

**Определение 9.** Пусть ломаная  $P$  с последовательностью сдвигов  $S(P) = (s_1, \dots, s_n)$  невозвратная. *Вращение* ломаной  $P$  (и вращение последовательности  $S(P)$ ) — это

$$\text{rot } P = \sum_{i=1}^{n-1} \angle(s_i, s_{i+1}).$$

Если ломаная имеет 2 вершины, положим  $\text{rot } P = 0$ .

Если ломаная  $P$  замкнутая, то (с нумерацией по модулю  $n$ )

$$\text{rot } P = \sum_{i=1}^n \angle(s_i, s_{i+1}).$$

**Определение 10.** Пусть  $P$  — невозвратная ломаная. Обозначим *угловую выпуклость*  $P$

$$\text{aco } P = \min_{L \subseteq P} \text{rot } L,$$

где минимум берётся по всем *отрезкам ломаной*  $L \subseteq P$  (получаемым из  $P$  удалением некоторых вершин в начале, и некоторых вершин в конце).

**Определение 11.** Пусть  $K$  — простой многоугольник и граница  $P = \partial K$  ориентирована так, что  $\text{rot } P = 2\pi$ . Обозначим *угловую выпуклость*  $K$

$$\text{aco } K = \min_{L \subseteq P} \text{rot } L,$$

где минимум берётся по всем простым ломаным  $L \subseteq P$ , ориентированным вдоль  $P$ .

Угловая выпуклость многоугольника  $K$  проиллюстрирована на его диаграмме направлений (направлений рёбер, проходимых против часовой стрелки) на Рисунке 1

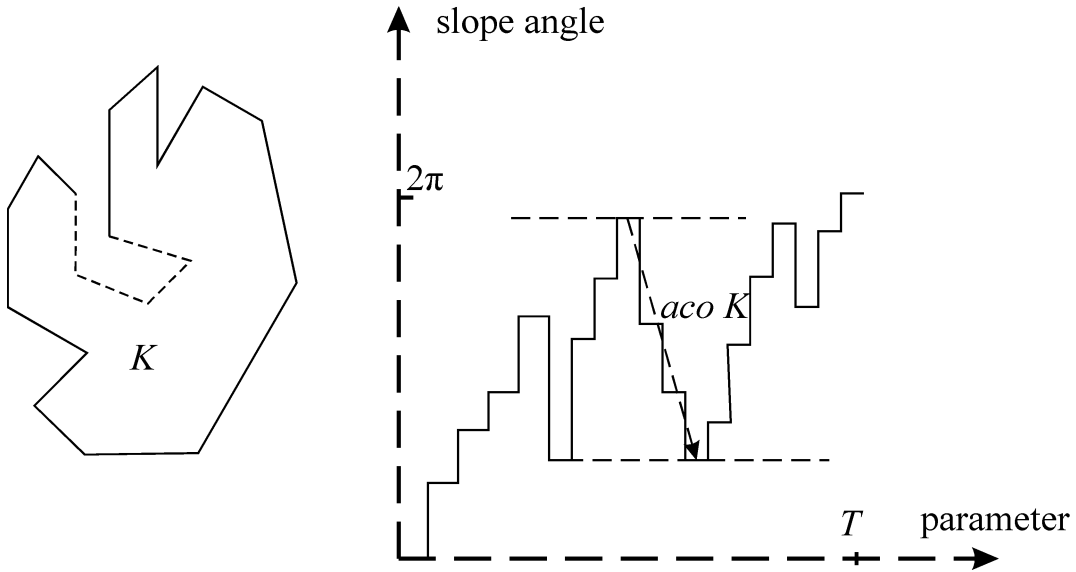


Рис. 1. Диаграмма направлений и угловая выпуклость многоугольника,  $T$  — полная длина.

### 3. СОРТИРОВАННАЯ СУММА ЛОМАННЫХ

Мы сформулируем и докажем леммы, которые обобщают алгоритм нахождения суммы Минковского выпуклых многоугольников через сортировку рёбер. Начнём с определений.

**Определение 12.** Обозначим конкатенацию последовательностей  $S$  и  $S'$  через  $S \circ S'$ . Обозначим первый элемент в непустой последовательности  $S$  через  $\text{head } S$ , обозначим последовательность  $S$  без первого элемента через  $\text{tail } S$ .

**Определение 13.** Пусть две ломаные  $P = v_1, \dots, v_{n+1}$  и  $Q = w_1, \dots, w_{m+1}$  невозвратные, обозначим их последовательности сдвигов  $S(P) = s_1, \dots, s_n$  и  $S(Q) = t_1, \dots, t_m$ . Также предположим, что  $\angle(s_1, t_1) = 0$  и  $\text{rot } P = \text{rot } Q$ .

Определим *сортированную сумму*  $R = P +_s Q$  следующим образом. Пусть её первая вершина — это  $v_1 + w_1$ , а последовательность сдвигов  $S(P +_s Q)$  формируется по следующему алгоритму:

- 1) В начале  $S_1 = S(P), S_2 = S(Q), S_3 = \emptyset$ ;
- 2) Если  $S_1 = \emptyset$  и  $S_2 = \emptyset$ , то  $S(P +_s Q) = S_3$  и алгоритм завершается;
- 3) Если  $S_1 = \emptyset$ , то  $S(P +_s Q) = S_3 \circ S_2$  и алгоритм завершается;
- 4) Если  $S_2 = \emptyset$ , то  $S(P +_s Q) = S_3 \circ S_1$  и алгоритм завершается;
- 5) Если  $\text{rot } S_1 \geq \text{rot } S_2$ , то  $S_3 = S_3 \circ \text{head } S_1$ ,  $S_1 = \text{tail } S_1$  и переходим к шагу 2;
- 6) Если  $\text{rot } S_1 < \text{rot } S_2$ , то  $S_3 = S_3 \circ \text{head } S_2$ ,  $S_2 = \text{tail } S_2$  и переходим к шагу 2.

Неформально говоря, мы производим слияние сдвигов из двух последовательностей сдвигов так, что из двух вариантов на каждом шаге мы выбираем «самый правый», а если направления совпадают, то мы выбираем из первой последовательности. Условие

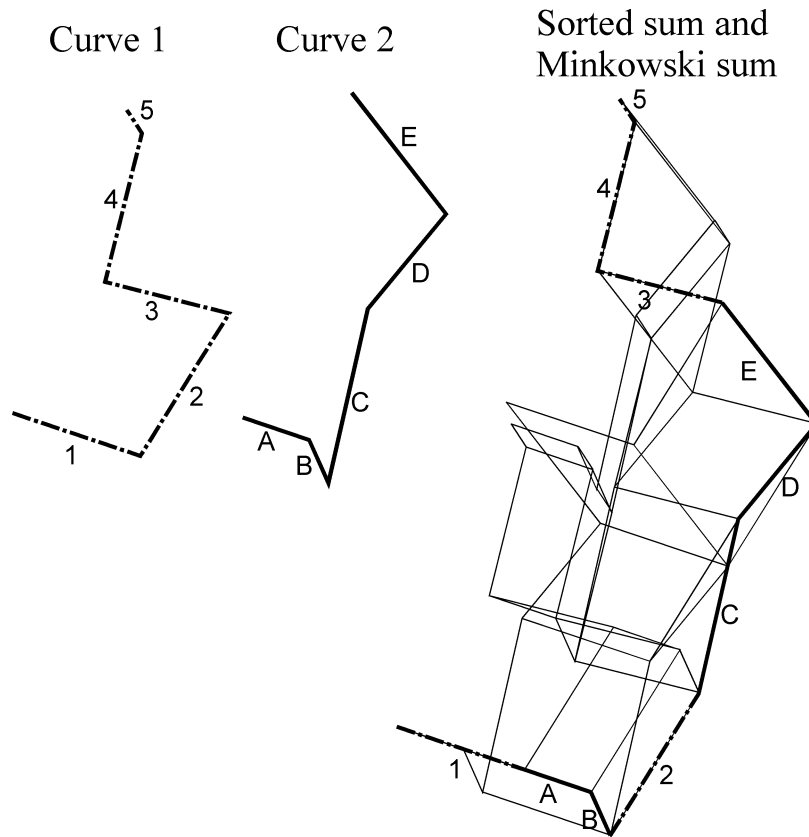


РИС. 2. Сумма Минковского и сортированная сумма двух ломаных.

того, что начала и концы обеих последовательностей имеют одинаковые направления, и вращения совпадают, в общем случае может быть опущено, но оно существенно используется в леммах 2, 3 и 4. Пример сортированной суммы ломаных изображён на рисунке 2.

Сначала мы установим связь между сортированной суммой и суммой Минковского.

**Лемма 1.** Пусть ломаные  $P$  и  $Q$  удовлетворяют условиям определения 13, и пусть они кусочно-линейно параметризованы

$$P = \{p(t) : t \in [0, 1]\}, \quad Q = \{q(t) : t \in [0, 1]\}.$$

Тогда найдутся неубывающие кусочно линейные сюръективные функции  $\phi, \psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , такие что

$$r(t) = p(\phi(t)) + q(\psi(t))$$

является параметризацией  $R$ , в частности  $P +_s Q \subseteq P + Q$  (сумма Минковского  $P$  и  $Q$  как фигур на плоскости).

*Доказательство.* Пусть  $|S(P)| = n$ ,  $|S(Q)| = m$ , тогда  $|S(P +_s Q)| = n + m$ . Без ограничения общности мы можем предположить, что параметризация  $p$  отображает точки  $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$  в вершины  $P$ , а  $q$  отображает точки  $0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}, 1$  в вершины  $Q$ .

Будем строить непрерывные и кусочно-линейные  $\phi$  и  $\psi$ , так что  $\phi$  на отрезке  $[\frac{i-1}{n+m}, \frac{i}{n+m}]$  ( $i = 1, \dots, n+m$ ) либо постоянна, либо линейно возрастает на  $\frac{1}{n}$ , а  $\psi$  на том же отрезке либо постоянна, либо линейно возрастает на  $\frac{1}{m}$ .

Определим следующее правило: если  $i$ -й сдвиг в  $S(P +_s Q)$  взят из  $S(P)$ , то  $\phi$  возрастает, а  $\psi$  остаётся постоянной, если сдвиг взят из  $S(Q)$ , то  $\phi$  остаётся постоянной, а  $\psi$  возрастает.

В первом случае обозначим  $S(P +_s Q) = S' \circ s_i \circ S''$ , где  $|S'| = i - 1$ . Тогда для  $t_1 = \frac{i-1}{n+m}$  и  $t_2 = \frac{i}{n+m}$

$$p(\phi(t_1)) + q(\psi(t_1)) = v_1 + w_1 + \sum S' \cap S(P) + \sum S' \cap S(Q) = v_1 + w_1 + \sum S' \in P +_s Q,$$

и

$$p(\phi(t_2)) + q(\psi(t_2)) = v_1 + w_1 + \sum S' \cap S(P) + s_k + \sum S' \cap S(Q) = v_1 + w_1 + \sum S' + s_i \in P +_s Q.$$

Эти равенства показывают, что точки  $p(\phi(t_1)) + q(\psi(t_1))$  и  $p(\phi(t_2)) + q(\psi(t_2))$  — две последовательные вершины ломаной  $P +_s Q$ , а для  $t \in [t_1, t_2]$  точка  $p(\phi(t)) + q(\psi(t))$  лежит на соответствующем ребре  $P +_s Q$ .

Второй случай рассматривается аналогично.  $\square$

**Лемма 2.** Пусть  $P, Q, R$  удовлетворяют условиям определения 13. Если  $\text{асо } P, \text{асо } Q > -\pi$ , то ломаная  $R = P +_s Q$  невозвратная.

*Доказательство.* Предположим противное: два последовательных сдвига  $s_k$  и  $t_l$  (занумерованные по своим номерам в  $S(P)$  и  $S(Q)$ ) противоположны. Рассмотрим последовательности  $S_1$  и  $S_2$  из определения в состоянии до присоединения  $s_k$  и  $t_l$  к  $S_3$ , тогда  $s_k = \text{head } S_1, t_l = \text{head } S_2$ .

Сдвиги  $s_k$  и  $t_l$  противоположны, следовательно  $\text{rot } S_1 = \text{rot } S_2 + (2N + 1)\pi$  для некоторого  $N \in \mathbb{Z}$ . Так как  $s_k$  идёт перед  $t_l$  в  $S(P +_s Q)$ , то  $\text{rot } S_1 \geq \text{rot } S_2$ . Тогда получаем

$$\text{rot } S_1 \geq \text{rot } S_2 + \pi.$$

Если  $|S_1| \geq 2$ , то по построению  $\text{rot tail } S_1 \leq \text{rot } S_2$ , и тогда  $\angle(\text{head } S_1, \text{head tail } S_1) \geq \pi$ , что невозможно. Если  $|S_1| = 1$ , то  $\text{rot } S_2 \leq -\pi$ , что противоречит ограничению на угловую выпуклость.  $\square$

**Лемма 3.** Пусть  $P, Q, R$  удовлетворяют условиям определения 13. Если  $\text{асо } P, \text{асо } Q > -\pi$ , то  $\text{rot } R = \text{rot } P = \text{rot } Q$ .

*Доказательство.* Обозначим  $\text{rot } P = \text{rot } Q = \alpha$ . Чтобы доказать, что  $\text{rot } S(P +_s Q) = \alpha$ , достаточно доказать следующее утверждение: если на некотором шаге построения последний элемент в  $S_3$  пришёл из  $S(P)$ , то  $\text{rot}(S_3 \circ S_1) = \alpha$ , если последний элемент в  $S_3$  пришёл из  $S(Q)$ , то  $\text{rot}(S_3 \circ S_2) = \alpha$ .

Докажем это по индукции. Если  $|S_3| \leq 2$ , утверждение верно. Пусть  $S_3 = S'_3 \circ x \circ y$ , если  $x$  и  $y$  пришли из  $S(P)$ , то

$$\text{rot}(S_3 \circ S_1) = \text{rot}(S'_3 \circ x \circ y \circ S_1) = \alpha$$

по предположению индукции. Аналогично если  $x, y \in S(Q)$ . Осталось рассмотреть случай  $x \in S(P), y \in S(Q)$ . Рассмотрим два случая, в зависимости от того, пусто  $S_1$  или нет.

Случай 1:  $S_1$  не пусто. По построению сортированной суммы имеем:

$$\text{rot}(x \circ S_1) \geq \text{rot}(y \circ S_2) \geq \text{rot } S_1,$$

а так как  $\text{rot}(x \circ S_1) = \angle(x, \text{head } S_1) + \text{rot } S_1$ , то получается

$$|\text{rot}(x \circ S_1) - \text{rot}(y \circ S_2)| < \pi.$$

По предположению индукции  $\text{rot}(S'_3 \circ x \circ S_1) = \alpha$ . Разность

$$\begin{aligned} \text{rot}(S_3 \circ S_2) - \text{rot}(S'_3 \circ x \circ S_1) &= \text{rot}(x \circ y \circ S_2) - \text{rot}(x \circ S_1) = \\ &= \angle(x, y) + \text{rot}(y \circ S_2) - \text{rot}(x \circ S_1) \end{aligned}$$

должна быть кратна  $2\pi$ . Но её модуль не более  $2\pi$ , так как  $|\angle(x, y)| < \pi$  и  $|\text{rot}(x \circ S_1) - \text{rot}(y \circ S_2)| < \pi$ . Следовательно  $\text{rot}(S_3 \circ S_2) = \alpha$ .

Случай 2:  $S_1$  пусто. Тогда, аналогично предыдущему случаю:

$$0 \geq \text{rot}(y \circ S_2),$$

и разность

$$\text{rot}(S'_3 \circ x \circ y \circ S_2) - \text{rot}(S'_3 \circ x) = \text{rot}(x \circ y \circ S_2) = \angle(x, y) + \text{rot}(y \circ S_2)$$

должна быть кратна  $2\pi$ . Так как  $|\angle(x, y)| < \pi$  и  $0 \geq \text{rot}(y \circ S_2) \geq \text{асо } Q$ , разность должна быть нулевой.  $\square$

**Лемма 4.** Пусть  $P, Q, R$  удовлетворяют условиям определения 13. Если  $\text{асо } P, \text{асо } Q > -\pi$ , то  $\text{асо } R \geq \min\{\text{асо } P, \text{асо } Q\}$ .

*Доказательство.* Обозначим  $\alpha = \text{rot } P = \text{rot } Q = \text{rot } R$ ,  $\gamma = \min\{\text{асо } P, \text{асо } Q\}$ .

Предположим противное: для некоторого отрезка  $S$  последовательности  $S(P +_s Q)$  оказалось  $\text{rot } S < \gamma$ . Это эквивалентно следующему утверждению: последовательность  $S_3$  в процессе построения сортированной суммы принимает два значения  $S'_3$  и  $S''_3$  (в таком порядке), для которых

$$\text{rot } S''_3 < \text{rot } S'_3 + \gamma.$$

Положим  $S'_3 = T' \circ x$ ,  $S''_3 = T'' \circ y$  и обозначим значения  $S_1$  и  $S_2$  в соответствующие моменты  $S'_1, S'_2, S''_1, S''_2$ .

Если  $x$  и  $y$  пришли из  $S(P)$ , то (см. доказательство леммы 3)

$$\text{rot}(x \circ S'_1) = \alpha - \text{rot } S'_3, \quad \text{rot}(y \circ S''_1) = \alpha - \text{rot } S''_3$$

и по предположению

$$\text{rot}(x \circ S'_1) < \text{rot}(y \circ S''_1) + \gamma.$$

Если  $S'_1 = \Sigma \circ y \circ S''_1$ , то

$$\text{rot}(x \circ \Sigma \circ y) + \text{rot}(y \circ S''_1) < \text{rot}(y \circ S''_1) + \gamma,$$

и следовательно  $\text{rot}(x \circ \Sigma \circ y) < \gamma$ , что противоречит условию  $\text{асо } P \geq \gamma$ . Если  $x$  и  $y$  оба из  $S(Q)$  получаем аналогичное противоречие.

Теперь предположим, что  $x$  пришёл из  $S(Q)$ ,  $y$  из  $S(P)$ . Тогда

$$\text{rot}(x \circ S'_2) = \alpha - \text{rot } S'_3, \quad \text{rot}(y \circ S''_1) = \alpha - \text{rot } S''_3$$

и по предположению

$$\text{rot}(x \circ S'_2) < \text{rot}(y \circ S''_1) + \gamma.$$

По построению  $\text{rot } S'_1 \leq \text{rot}(x \circ S'_2)$  (когда  $x$  был добавлен к  $S_3$ ) и

$$\text{rot } S'_1 < \text{rot}(y \circ S''_1) + \gamma.$$

Если  $S'_1 = \Sigma \circ y \circ S''_1$ , то

$$\text{rot}(\Sigma \circ y) + \text{rot}(y \circ S''_1) < \text{rot}(y \circ S''_1) + \gamma,$$

и следовательно  $\text{rot}(\Sigma \circ y) < \gamma$ , что противоречит условию  $\text{асо } P \geq \gamma$ .

Случай, когда  $x$  пришёл из  $S(P)$ ,  $y$  пришёл из  $S(Q)$  рассматривается аналогично.  $\square$

#### 4. УСТРАНЕНИЕ САМОПЕРЕСЕЧЕНИЙ

В этом разделе мы рассматриваем ломаную  $P$  с самопересечениями. Мы определённым образом преобразуем её в ломаную без самопересечений, и описываем, как могло измениться вращение ломаной  $P$ . Нам понадобится определение.

**Определение 14.** Ломаная  $P$  находится в общем положении, если

- 1) все её вершины различны;
- 2) любые два ребра пересекаются не более чем в одной точке, причём общая точка — это либо общая вершина, либо относительно внутренняя точка обоих рёбер;
- 3) любые три ребра не имеют общих точек.

Очевидно, что произвольно малым шевелением вершин можно любую ломаную привести в общее положение.

**Определение 15.** Пусть ломаная  $P$  находится в общем положении. Предположим, что она задана кусочно-линейной параметризацией  $P = \{p(t) : t \in [a, b]\}$  и имеет самопересечение  $p(t_1) = p(t_2)$  для некоторых  $t_1 < t_2$ . Пусть *удаление петли* — это преобразование, заменяющее  $P$  на конкатенацию ломаных  $P' = \{p(t) : t \in [a, t_1]\}$  и  $P'' = \{p(t) : t \in [t_2, b]\}$ .

Ясно, что вообще  $\text{rot } P$  меняется на кратную  $2\pi$  величину при удалении петли. Следующая лемма уточняет это утверждение.

**Лемма 5.** Пусть  $P$  — ломаная в общем положении. Предположим, что отрезок  $P$  между  $p(t_1)$  и  $p(t_2)$  имеет вращение  $> -\pi$ . Тогда вращение  $\text{rot } P$  не возрастает при удалении петли.



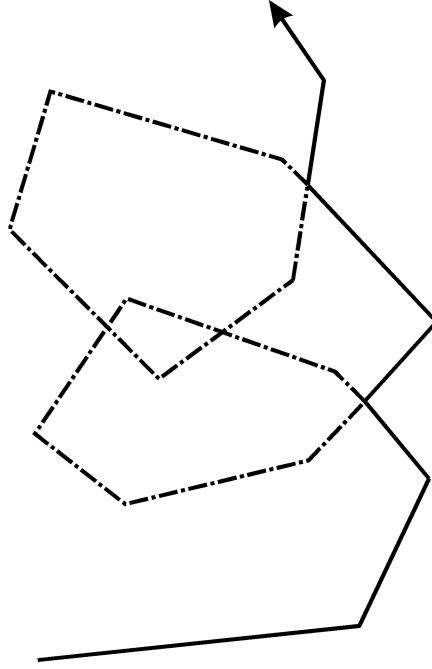


Рис. 3. Удаление петель в ломаной.

*Доказательство.* Пусть  $p(t_1)$  лежит на ребре с направлением  $s_1$ ,  $p(t_2)$  лежит на другом ребре с направлением  $s_2$ . Обозначим отрезок  $P$  между  $p(t_1)$  и  $p(t_2)$  через  $L$ .

Отождествив  $p(t_1)$  и  $p(t_2)$  в ломаной  $L$ , мы получим замкнутую ломаную, следовательно

$$\text{rot } L + \angle(s_2, s_1) = 2\pi N, \quad N \in \mathbb{Z}.$$

Так как  $\text{rot } L > -\pi$  и  $|\angle(s_2, s_1)| < \pi$ , получаем, что  $\text{rot } L + \angle(s_2, s_1) \geq 0$ .

После удаления  $L$  вращение новой ломаной отличается от  $\text{rot } P$  на  $\angle(s_1, s_2) - \text{rot } L = -\angle(s_2, s_1) - \text{rot } L \leq 0$ , следовательно, оно не возрастает.  $\square$

**Лемма 6.** Пусть  $P$  — ломаная в общем положении и  $\text{асо } P > -\pi$ . Тогда можно удалить все петли в  $P$ , не увеличив её вращение.

*Доказательство.* Рассмотрим все случаи самопересечения ломаной  $P$ , и выберем первую по параметру точку  $p(t_1) = p(t_2)$ . Удалим петлю между  $p(t_1)$  и  $p(t_2)$ . И далее будем продолжать действовать также, пока не удалим все самопересечения. Ясно, что при этом удаляются неперекрывающиеся отрезки  $P$ , каждый из удалённых отрезков имел угловую выпуклость  $> -\pi$  и по лемме 5 угловая выпуклость не увеличилась.  $\square$

Пример удаления всех петель показан на рисунке 3.

## 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Сначала сделаем определения.

**Определение 16.** Выпуклая оболочка двух лучей  $r_1$  и  $r_2$  с общим началом называется *угловой областью* (или просто углом). Для угловой области  $A$  её *угловая мера* — это  $\angle A = |\angle(r_1, r_2)|$ .

Теперь определим вращение для кусочно-гладких кривых.

**Определение 17.** Пусть  $C = \{c(t) : t \in [a, b]\}$  — гладкая кривая (с ненулевой производной по параметру). Тогда определена единичная нормаль

$$\tau(t) = \frac{c'(t)}{|c'(t)|}$$

как непрерывное отображение  $\tau : [a, b] \rightarrow S^1$  в единичную окружность. Рассмотрим универсальное накрытие  $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , заданное полярным углом. Отображение  $\tau$  непрерывно поднимается до отображения  $\tilde{\tau} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , так что  $\tau = \kappa \circ \tilde{\tau}$ .

Тогда *вращение* кривой  $C$  — это  $\tilde{\tau}(b) - \tilde{\tau}(a)$ .

**Определение 18.** Пусть  $C = \{c(t) : t \in [a, b]\}$  — кусочно гладкая кривая, являющаяся конкатенацией гладких кривых  $C_1 \circ \dots \circ C_n$ . Обозначим значения параметра, при которых  $C_i$  переходит в  $C_{i+1}$  за  $t_i$ . Потребуем, чтобы векторы  $c'_-(t_i)$  и  $c'_+(t_i)$  (левая и правая производные) не были противоположными.

Тогда *вращение* кривой  $C$  — это

$$\text{rot } C = \sum_{i=1}^n \text{rot } C_i + \sum_{i=1}^{n-1} \angle(c'_-(t_i), c'_+(t_i)).$$

Ясно, что если кривая  $C$  аппроксимирована ломаной  $P$  с достаточно малым шагом, то  $\text{rot } C = \text{rot } P$ . Угловая выпуклость кривой определяется аналогично случаю ломаной.

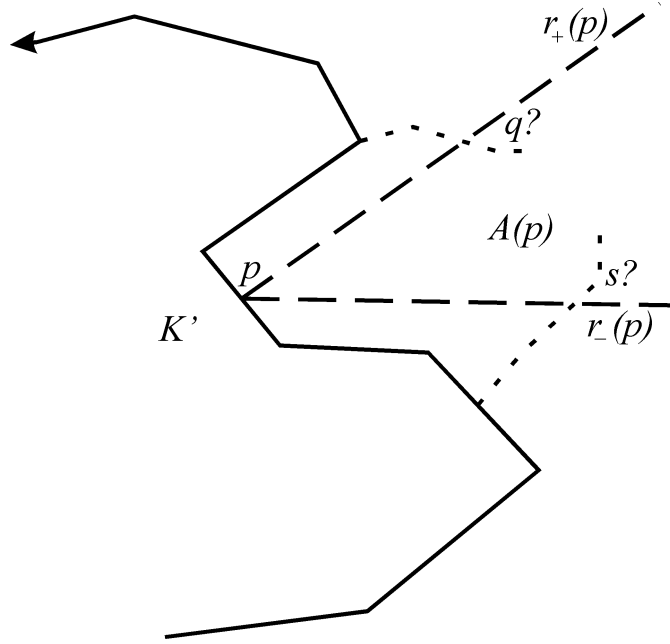
Теперь мы переходим к доказательству теоремы 2. Ломаная  $P = \partial K$  может быть аппроксимирована гладкой кривой следующим образом: пусть  $v_i$  — её вершина с ненулевым углом  $\angle(v_i - v_{i-1}, v_{i+1} - v_i)$ , в малой окрестности  $v_i$  мы заменим объединение двух равных малых отрезков  $P$  (первый из  $v_i$  назад по  $\partial P$ , второй из  $v_i$  вперёд по  $\partial P$ ) на дугу окружности  $A_i$ , так чтобы производная получившейся кривой стала непрерывной. Если брать отрезки достаточно малыми, то новая граница  $P'$  не будет иметь самопересечений. Обозначим за  $K'$  область, ограниченную  $P'$ , тогда точка  $x$  (для которой мы проверяем свойство отделимости) всё ещё будет лежать за пределами  $P'$  при достаточно близком приближении  $P'$  к  $P$ .

Заметим, что по построению  $\text{rot } A_i = \angle(v_i - v_{i-1}, v_{i+1} - v_i)$ , следовательно  $\text{асо } P' = \text{асо } P = \gamma$ .

Для любых двух точек  $p_1, p_2 \in P'$  обозначим  $[p_1, p_2]_{P'}$  отрезок кривой  $P'$ , ориентированный по  $P'$ , начинающийся в  $p_1$  и заканчивающийся в  $p_2$ . Рассмотрим следующие функции точки  $p \in P'$

$$\gamma_+(p) = \min_{q \in P'} \text{rot}[p, q]_{P'}, \quad \gamma_-(p) = \min_{q \in P'} \text{rot}[q, p]_{P'}.$$

Очевидно, что они непрерывны и по условия на угловую выпуклость  $\gamma_-(p) + \gamma_+(p) \geq \gamma$ .


 Рис. 4. Фигура  $K'$  и угловая область  $A(p)$ .

Рассмотрим лучи  $r_+(p)$  и  $r_-(p)$  с началом  $p$ , такие что

$$\angle(\tau(p), r_+(p)) = \gamma_+(p), \quad \angle(r_-(p), \tau(p)) = \gamma_-(p).$$

Заметим, что лучи  $r_+(p)$  и  $r_-(p)$  выходят во внешнюю сторону или по касательной к  $K'$ , и угол между ними не менее  $\pi + \gamma > 0$ . Обозначим угловую область  $A(p) = \text{conv}(r_+(p) \cup r_-(p))$ .

Мы собираемся показать, что  $K' \cap \text{int } A(p) = \emptyset$ . Предположим противное, в этом случае  $P'$  пройдёт через внутреннюю часть  $A(p)$ . Такая ситуация изображена на рисунке 4.

Начнём двигать точку  $q$  из  $p$  вдоль  $P'$ . Посмотрим, когда  $q$  первый раз попадёт внутрь  $\text{int } A(p)$ . Пусть при этом  $q$  пересекла луч  $r_+(p)$ , тогда вращение замкнутой кусочно-гладкой кривой без самопересечений  $[p, q]_{P'} \circ [q, p]$  (последний отрезок — это отрезок прямой) равно  $-2\pi$ , и ясно что  $\text{rot}[p, q]_{P'}$  должен быть не более  $\gamma_+(p)$ , что приводит к противоречию.

Остаётся другая возможность: точка  $q$  (при движении из  $p$  вдоль  $P'$ ) попадёт внутрь  $A(p)$  через  $r_-(p)$ . Пусть  $q$  — эта первая такая точка на луче  $r_-(p)$ , в этом случае рассмотрим замкнутую кривую без самопересечений  $[p, q]_{P'} \circ [q, p]$  ограничивающую область  $L$ . Если теперь двигать точку  $s$  из  $p$  вдоль  $P'$  в обратном направлении, она где-то должна выйти из  $L$ , причём сделать это она может только через  $[q, p]$ , попав в  $\text{int } A(p)$ . Пусть  $s$  — первая точка на  $[q, p]$ , которая это сделала. Тогда замкнутая простая кривая  $[s, p]_{P'} \circ [p, s]$  имеет вращение  $-2\pi$  и  $\text{rot}[s, p]_{P'} < \gamma_-(p)$ , что приводит к противоречию.

Следовательно, теорема доказана для точек  $x$ , достаточно близких к  $P'$ , докажем её для всех  $x$  за пределами  $P'$ . Для  $p \in P'$  обозначим  $\nu(p)$  направление биссектрисы  $A(p)$ , а  $\mu(p)$  — единичное направление  $x - p$ . Возникают два отображения  $\nu : P' \rightarrow S^1$  и  $\mu : P' \rightarrow S^1$ . Отображение  $\nu$  гомотопно гауссовому отображению кривой  $P'$ , следовательно  $\deg \nu = 1$ . Отображение  $\mu$  гомотопно постоянному (гомотопия получается при сдвиге  $x$  в бесконечность, не пересекая  $P'$ ), значит  $\deg \mu = 0$ . Тогда  $\nu$  и  $\mu$  должны совпасть на некоторой точке  $p$ . Другой (более элементарный) способ доказать это — заметить, что вращение вектора  $\nu(p)$  при обходе точкой  $p$  кривой  $P'$  равно  $2\pi$ , а вращение  $\mu(p)$  равно нулю.

Ясно, что для такого  $p$  точка  $x$  лежит внутри  $A(p)$ , и угловая область  $A(p) + x - p \subset \text{int } A(p)$  — то что нужно в теореме.

## 6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Обозначим  $\gamma = \min\{\text{асо } K, \text{асо } L\}$ . Рассмотрим множество  $M = K + L$ . Далее мы докажем, что оно односвязно (не имеет дыр, то есть ограниченных компонент связности дополнения  $\mathbb{R}^2 \setminus M$ ), но сначала предположим что дыры могут быть и внешнюю часть границы  $B$  (граница неограниченной компоненты  $\mathbb{R}^2 \setminus M$ ). Покажем, что  $\text{асо } B \geq \gamma$ .

Предположим, что для некоторых двух точек  $p, q \in B$  оказалось  $\text{rot}[p, q]_B = \delta < \gamma$  (обозначение отрезка кривой то же, что и в доказательстве теоремы 2). Можно предположить, что  $p$  и  $q$  лежат внутри рёбер  $B$ . Тогда из определения суммы Минковского следует, что

$$p = a + b, \quad a \in K, \quad b \in L, \quad q = c + d, \quad c \in K, \quad d \in L.$$

Одна из точек  $a$  и  $b$  (пусть для определённости  $a$ ) лежит на ребре (так как  $p$  лежит на ребре) ломаной  $\partial K$  с внешней нормалью  $\nu$ . Другая точка  $b$  либо лежит на ребре  $L$  с той же нормалью, либо является вершиной  $L$ .

В последнем случае скалярное произведение  $(\nu, x)$  на некоторой малой окрестности точки  $b$  в  $L$  достигает строгого максимума в точке  $b$ , тогда можно добавить «виртуальное ребро» длины ноль к  $L$  в точке  $b$ , имеющее внешнюю нормаль  $\nu$ . Это виртуальное ребро не влияет на вращение отрезков ломаной  $\partial L$ . Далее мы предполагаем, что точки  $a, b, c, d$  лежат на (возможно виртуальных) рёбрах, рёбра точек  $a, b, p$  имеют одинаковое направление, и рёбра точек  $c, d, q$  также имеют одинаковое направление.

Заметим, что если  $\text{асо } \partial K > -\pi$ , то для всякого отрезка ломаной  $[x, y]_{\partial K}$  его вращение не более  $3\pi$ , иначе дополнительный отрезок  $[y, x]_{\partial K}$  имел бы вращение  $\leq -\pi$ . Тогда получается, что  $\text{rot}[a, c]_{\partial K} = \delta + 2\pi N$ ,  $N \in \mathbb{Z}$ . Из условия угловой выпуклости и предыдущего замечания следует, что  $\text{rot}[a, c]_{\partial K} = \delta + 2\pi$ . Следовательно

$$\text{rot}[c, a]_{\partial K} = \text{rot}[d, b]_{\partial L} = -\delta.$$

Рассмотрим сортированную сумму  $S = [c, a]_{\partial K} +_s [d, b]_{\partial L}$ . По лемме 3 и лемме 4 имеем  $\text{rot } S = -\delta$ ,  $\text{асо } S \geq \gamma > -\pi$ . Из леммы 1 получаем, что  $S \subseteq M$ . Ситуация изображена на рисунке 5.

Заметим, что  $M = \text{cl int } M$ ,  $\text{int } M$  связно, поэтому можно привести ломаную  $S$  в общее положение так, что она останется в  $M$  и единственными точками в  $S \cap \partial M$

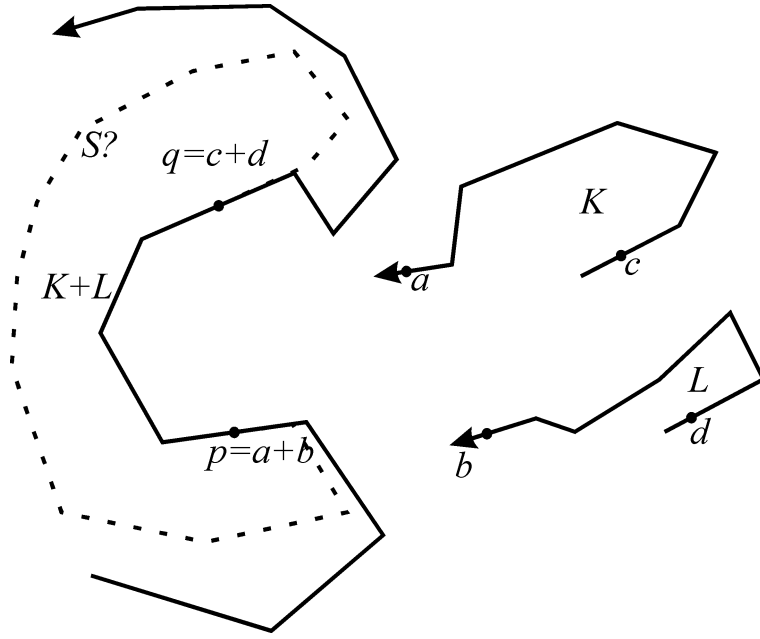


РИС. 5. Точки  $p = a + b$ ,  $q = c + d$  и ломаная  $S = [c, a]_{\partial K} +_s [d, b]_{\partial L}$ .

будут  $p$  и  $q$ . Мы предполагаем, что вращение  $S$  при этом возмущении изменяется на произвольно малое значение, и  $\text{асо } S$  остаётся  $> -\pi$ .

Удалим петли на  $S$  по лемме 6 и получим простую ломаную  $S_0 \subseteq M$ , у которой  $\text{rot } S_0 \leq -\delta$ . Из леммы 1 известно, что  $S_0$  соединяет  $q$  и  $p$ . Более того, по определению сортированной суммы направления рёбер в точках  $p$  и  $q$  совпадают (с точностью до малого значения при переходе к общему положению) с направлениями рёбер (возможно виртуальных) ломаной  $[p, q]_B$ . Значит, замкнутая ломаная  $C = S_0 \circ [p, q]_B$  имеет число вращения  $\leq 0$  и не имеет самопересечений.

Следовательно  $\text{rot } C = -2\pi$ , и ограничиваемая ею область находится справа от  $C$ . Но  $C \subset M$ , и вдоль ломаной  $[p, q]_B$  множество  $M$  находится слева от  $[p, q]_B$  ( $B$  ориентировано против часовой стрелки), что приводит к противоречию. Таким образом доказано, что  $\text{асо } B \geq \gamma$ .

Теперь мы должны доказать, что  $M$  не имеет дыр. Предположим противное: точка  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus M$  не соединяется с  $\infty$  в дополнении к множеству  $M$ . Пошевелим вершины  $K$  и  $L$  на величины  $< \delta$ . Если  $\delta$  выбрано достаточно малым, то условие  $\text{асо } K, \text{асо } L > -\pi$  сохранится, а точка  $x$  останется вне  $M$ . Более того, если  $M$  не имеет дыр, содержащих  $x$  после шевеления, то дополнение  $\mathbb{R}^2 \setminus M$  содержит (по теореме 2) угловую область  $A$  с вершиной  $x$  и угловой мерой  $\geq (\pi + \gamma)/2$ . Следовательно, для достаточно малого  $\delta$  область  $A$  не может быть «блокирована» при возврате к невозмущённым  $K$  и  $L$ , что даёт противоречие. Итак, мы доказали, что для достаточно малого ( $< \delta$ ) шевеления  $K$  и  $L$  их сумма  $M$  всё ещё имеет дыры, то есть свойство «иметь дыры» открыто.

Рассмотрим параметризованное семейство множеств

$$M(t) = K + tL.$$

Заметим, что все рёбра  $M(t)$  содержатся в прямых линиях (определяемых парами точек)

$$\{(v_1 + tw_1, v_2 + tw_1), (v_1 + tw_1, v_1 + tw_2)\},$$

где  $v_1, v_2 \in K$  и  $w_1, w_2 \in L$  — вершины ломаных. Шевеля ломаные  $K$  и  $L$  мы можем требовать, чтобы все такие прямые (их конечное число) имели различное направление. Также потребуем, чтобы при изменении  $t$  в промежутке  $(0, +\infty)$ , никакие 4 прямых не пересекались в одной точке — этого можно потребовать из соображений общего положения.

Если параметр  $t$  достаточно близок к нулю, то множество  $M(t)$  имеет следующее строение: около ребра  $K$  оно имеет «длинное» ребро, а около вершины  $K$  может быть устроено сложнее. Но так как  $K$  является уловой областью  $K \cap U(v)$  (возможно вогнутой) в некоторой окрестности вершины  $v \in K$ , то  $M(t)$  в этой окрестности  $U(v)$  (и для достаточно малых  $t$ ) является объединением семейства параллельных переносов  $K \cap U(v)$ , то есть звёздно. Следовательно, для достаточно малых  $t$ , локально  $M(t)$  имеет такую же топологию, как и  $K$ , а значит глобально не может иметь дыр.

Теперь рассмотрим

$$t_0 = \inf\{t : K + tL \text{ имеет дыры}\},$$

уже доказано, что  $t_0 > 0$ , предположим  $t_0 < +\infty$ . Так как свойство «иметь дыру» открыто в данном случае,  $M(t_0)$  не имеет дыр. Посмотрим, что произойдёт при увеличении  $t$  на малое значение  $< \delta$ . Из предположений общего положения  $M(t)$  может измениться только добавлением некоторого ребра вместо вершины, но это не может привести к появлению дыры. Следовательно  $t_0 = +\infty$  и доказательство закончено.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P.K. Agarwal, E. Flato, D. Halperin, “Polygon decomposition for efficient construction of Minkowski sums”, *Lecture Notes in Computer Science*, **1897**, Springer Verlag, 2000, 20–31.
- [2] J.A. Bennell, K.A. Dowsland, W.B. Dowsland, “The irregular cutting-stock problem - a new procedure for deriving the no-fit polygon”, *Computers and Operations Research*, **28**:3 (2001), 271–287.
- [3] E.K. Burkea, R.S.R. Helliera, G. Kendalla, G. Whitwell, “Complete and robust no-fit polygon generation for the irregular stock cutting problem”, *European Journal of Operational Research*, **179**:1 (2007), 27–49.
- [4] Г.Е. Иванов, “Множества, слабо выпуклые по Виалю и по Ефимову–Стечкину”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:6 (2005), 35–60.
- [5] P. Pansu, ““Quasiconvex” domains in  $\mathbb{R}^n$ ”, *Appendix A in “Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces” by M. Gromov*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2001, 393–400.

*E-mail address:* r\_n\_karasev@mail.ru

141700, г. Долгопрудный Московской области, Институтский пер. 9, Московский физико-технический институт, кафедра высшей математики