Курс «Геометрия мер, разбиения и выпуклые тела»

Роман Николаевич Карасёв, r_n_karasev@mail.ru

В 2012–2013 учебном году будет прочитан курс по современному и активно развивающемуся разделу математики, лежащему где-то между алгеброй, топологией, дискретной геометрией, выпуклой геометрией и функциональным анализом. Приблизительное содержание курса следующее:

(1) Теорема Борсука–Улама в простейшем случае. Некоторые её обобщения.
(2) Теорема «о бутерброде» и её полиномиальная версия.
(3) Полиномиальное деление одной меры в духе Гута–Каца и его свойства.
(4) Теорема Семереди–Троттера о числе инцидентности точек и прямых. Оценки на множество сумм и множество произведений вещественных чисел.
(5) Соединение точек на плоскости графом с небольшим числом пересечений с любой прямой, теорема Шазеля–Вельцля.
(6) Деление меры на выпуклые части заданного размера, топологическая лемма об отображении симплекса в себя. Теорема Кнастера–Куратовского–Мазуркевича и теорема Брауэра о неподвижной точке.
(7) Монотонные отображения и оптимальный перенос мер.
(8) Неравенство Брунна–Минковского и изопериметрическое неравенство в евклидовом пространстве.
(9) Логарифмическая вогнутость и неравенство Прекопы–Ляйндлера. Функциональное неравенство Брунна–Минковского.
(10) Теорема Минковского о площадях граней.
(11) Смешанные объёмы выпуклых тел и их свойства.
(12) Классическое и функциональное неравенство Бляшке–Сантало.
(13) Разложение двух мер «на иголки» и изопериметрическое неравенство для гауссовой меры.
(14) Изопериметрическое неравенство и явление концентрации на сфере.
(15) Лемма Шидака и оценки объёма сечений куба.
(16) Оценки количества вершин и гиперграней центрально-симметричного выпуклого многогранника.
(17) Теорема Дворецкого о почти круглых сечениях выпуклого тела.
(18) Понятие о топологических результатах в духе теоремы Дворецкого, гипотеза Кнастера и алгебраическая теорема Дворецкого.

Конспект спецкурса на английском языке доступен по адресу:

rkarasev.ru/common/upload/mes_partition.pdf.

Лекции по курсу будут иногда проходить по понедельникам в 17:05 в аудитории 409 ГК, первая лекция в весеннем семестре 2013 года состоится 18 февраля, далее график будет определяться динамически. Всем, кто собирается посещать и/или сдавать курс, рекомендуется сообщить о себе по адресу r_n_karasev@mail.ru для получения рассылки.

Рекомендованная литература по курсу

[1] K. Ball. An elementary introduction to modern convex geometry. *Flavors of Geometry. MSRI Publications, 31*, 1997.
[2] K. Ball. An elementary introduction to monotone transportation. *Geometric Aspects of Functional Analysis, Lecture Notes in Mathematics 1850*, 99–106, 2004.
[3] M. Gromov. Convex sets and Kähler manifolds. *IHES*, www.ihes.fr/ gromov/PDF/[68].pdf, 1990.
[4] H. Kaplan, J. Matoušek, M. Sharir. Simple proofs of classical theorems in discrete geometry via the Guth–Katz polynomial partitioning technique. *Discrete Comput. Geom.*, 48(3):499–517, 2012.
[5] J. Matoušek. *Using the Borsuk-Ulam theorem: Lectures on topological methods in combinatorics and geometry.* Springer Verlag, 2003.
[6] Ф. Назаров, М. Содин, А. Вольберг. Геометрическая лемма Каннана–Ловаса–Шимоновича, не зависящие от размерности оценки распределения значений полиномов и распределение нулей случайных аналитических функций. *Алгебра и анализ*, 14(2):214–234, 2002.
[7] R.P. Stanley. Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 576:500–535, 1989.
[8] T. Tao. The Brunn–Minkowski inequality for nilpotent groups. terrytao.wordpress.com/2011/09/16/the-brunn-minkowski-inequality-for-nilpotent-groups/, 2011.