1. Приближение непрерывных функций

1.1. Докажите, что при $|x| < 1$ и любом $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняется формула

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

где

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

[[Можно подставить ряд Тейлора логарифма в ряд Тейлора экспоненты, или действовать как-то иначе.]]

1.2. Докажите, что если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и имеет компактный носитель (равна нулю за пределами некоторого отрезка), а $t_n \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательность функций

$$f_n(x) = f(x - t_n)$$

равномерно стремится к f.

[[Используйте равномерную непрерывность.]]

1.3. Докажите, что функцию $\sqrt{x}$ можно равномерно приблизить многочленами на любом фиксированном отрезке $[0, a]$.

[[Сдвиньте функцию и используйте ряд Тейлора с центром в a.]]

1.4. Докажите, что функцию $|x|$ можно равномерно приблизить многочленами на любом отрезке $[-a, a]$. Сведите к предыдущей задаче.

[[Сведите к предыдущей задаче с помощью $|x| = \sqrt{x^2}$.]]

1.5. Докажите, что всякая кусочно-линейная непрерывная на отрезке функция является линейной комбинацией функций вида $a|x - x_0|$ и константы.

[[Используйте индукцию по количеству точек разрыва производной.]]

1.6. Определим функции для положительных δ

$$\varphi_\delta(x) = \begin{cases} 0, & x < -\delta; \\ 1 - |x|/\delta, & |x| \leqslant \delta; \\ 0, & x > \delta. \end{cases}$$

Пусть дана непрерывная функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Докажите, что последовательность функций

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{m} f(k/m)\varphi_{1/m}(x - k/m)$$

равномерно стремится к f.

[[Заметьте, что всякая f_m кусочно-линейна и совпадает с f в точках вида k/m, используйте равномерную непрерывность.]]

1.7. Пусть дана непрерывная функция $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}$. Докажите, что последовательность функций

$$f_m(x) = \sum_{0 \leqslant k_1,\dots,k_n \leqslant m} f(k_1/m, \dots, k_n/m)\varphi_{1/m}(x_1 - k_1/m)\varphi_{1/m}(x_2 - k_2/m)\dots\varphi_{1/m}(x_n - k_n/m)$$

равномерно стремится к f.

[[Аналогично предыдущей задаче, сначала заметьте, что для равной единице функции в правой части тоже будет единица.]]

1.8. Выведите из предыдущих задач, что всякую непрерывную $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ можно равномерно приблизить многочленом.

[[Заметьте, что функции φ мы уже умеем приближать.]]

1.9. Докажите, не используя понятия определённого интеграла, что у всякой непрерывной на интервале функции есть первообразная.

[[Докажите сначала, что первообразная есть у многочлена.]]

1.10. Определим интеграл непрерывной функции одного аргумента $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a),$$

где F — любая первообразная f на отрезке. Докажите линейность и монотонность такого понятия интеграла.

[[Используйте линейность дифференцирования и теорему о среднем для производных.]]

1.11. Определим интеграл непрерывной функции $f : P \to \mathbb{R}$ на параллелепипеде $P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ по формуле повторного интегрирования

$$\int_P f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_n \dots dx_1.$$

Докажите, используя приближение многочленами, что это определение не зависит от порядка интегрирования, а также установите его линейность и монотонность.

[[Независимость от порядка интегрирования достаточно проверить для многочленов, а значит для отдельных мономов.]]

1.12 (Частный случай теоремы Стоуна–Вейерштрасса). Докажите, что всякую непрерывную на $[-\pi, \pi]$ функцию f, для которой $f(-\pi) = f(\pi)$, можно равномерно приблизить тригонометрическими многочленами вида

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,.$$

[[Обратите внимание, что линейная комбинация и произведение тригонометрических многочленов является тригонометрическим многочленом. Заметьте, что возможность складывать и умножать позволяет переходить от f к $g \circ f$ если g — многочлен, а значит и если g — произвольная непрерывная функция. Постройте таким способом из синусов и косинусов вариант функций из задачи 1.6.]]

1.13 (Частный случай теоремы Урысона). * Докажите, что для всякого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ найдётся функция $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, которая равна единице на K и равна нулю за пределами наперёд заданной окрестности $U_\varepsilon(K)$.

[[Посмотрите на функцию расстояния $\operatorname{dist}(x, K)$.]]

1.14 (Частный случай теоремы Титце). * Докажите, что непрерывную на компакте $K \subset \mathbb{R}^n$ функцию можно продолжить непрерывно на всё $\mathbb{R}^n$ так, что она будет равна нулю за пределами наперёд заданной окрестности $U_\varepsilon(K)$.

[[Один из вариантов решения: положить $L = \mathbb{R}^n \setminus U_\varepsilon(K)$, $V = \mathbb{R}^n \setminus (K \cup L)$ и продолжить f на L нулём. Потом сделать разбиение единицы $1 = \sum_n \rho_n(x)$ на V так, чтобы диаметр носителя ρ_n был не более его расстояния до $K \cup L$. Потом домножить ρ_n на значение в ближайшей к носителю ρ_n точке $K \cup L$ и сложить результаты. Другой вариант: вывести эту теорему из теоремы Урысона и непрерывности равномерного предела последовательности непрерывных функций, таким образом доказав полный вариант теоремы Титце для нормальных топологических пространств.]]

1.15. * Докажите, что функцию на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, которая является 1-липшицевой ($|f(x)-f(y)| \leqslant |x-y|$), можно продолжить на всё $\mathbb{R}^n$ так, что она останется 1-липшицевой.

[[Докажите, что можно продолжить 1-липшицевым образом на ещё одну точку $x \notin X$. Потом продолжайте по одной точке на счётное плотное в $\mathbb{R}^n \setminus X$ подмножество, а на всё $\mathbb{R}^n$ продолжите по непрерывности]]

1.16 (Теорема Киршбрауна). ** Докажите, что отображение $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$, которое является 1-липшицевым ($|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$), можно продолжить до $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ так, что оно останется 1-липшицевым.

[[Аналогично, достаточно продолжить на одну точку, но в этой теореме это посложнее.]]

2. Мера и интеграл Лебега

2.1. **Мера Лебега.**

2.1. Определим меру Лебега открытого $U \subset \mathbb{R}^n$ как его нижнюю меру Жордана, то есть точную верхнюю грань мер элементарных множеств, содержащихся в U. Докажите, что эта величина счётно субаддитивна на открытых множествах, то есть

$$\mu \bigcup_i U_i \leqslant \sum_i \mu U_i.$$

[[Докажите от противного, обратите внимание, что в определении нижней меры Жордана можно рассматривать только компактные элементарные множества.]]

2.2. Определим меру Лебега компактного $F \subset \mathbb{R}^n$ как его верхнюю меру Жордана, то есть точную нижнюю грань мер элементарных множеств, содержащих F. Докажите, что эта величина конечно супераддитивна на компактных множествах, то есть для попарно непересекающихся $F_1, \dots, F_N$

$$\mu \bigcup_{i=1}^N F_i \geqslant \sum_{i=1}^N \mu F_i.$$

[[Обратите внимание, что минимальное расстояние между парами F_i и F_j положительно, пусть оно равно δ, и приблизьте F_i сверху элементарными с точностью $\delta/2$ по расстоянию.]]

Определение 2.3. Определим верхнюю меру Лебега произвольного $X \subset \mathbb{R}^n$ как

$$\overline{\mu} X = \inf\{\mu U : U \supseteq X, \quad U \text{ открыто}\}.$$

Определим нижнюю меру Лебега произвольного $X \subset \mathbb{R}^n$ как

$$\underline{\mu} X = \sup\{\mu F : F \subseteq X, \quad F \text{ компактно}\}.$$

Если обе величины конечны и равны друг другу, назовём X *измеримым с конечной мерой.*

Определение 2.4. Назовём $X \subset \mathbb{R}^n$ *измеримым по Лебегу*, если его пересечение с любым параллелепипедом $P \subset \mathbb{R}^n$ измеримо. Если при этом $\underline{\mu} X = +\infty$, то будем считать, что $\mu X = +\infty$.

2.5. Множество конечной меры Лебега измеримо в смысле предыдущего определения.

[[Докажите и используйте равенство $\mu U \setminus F = \mu U - \mu F$ для открытого U и компактного $F \subset U$.]]

2.6. Докажите, что множество $X \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу с конечной мерой тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся элементарное $E \subset \mathbb{R}^n$, такое что

$$\overline{\mu}(X \setminus E) + \overline{\mu}(E \setminus X) < \varepsilon.$$

[[Если X измеримо, приблизьте его компактным снизу, а потом приблизьте компактное элементарным сверху. В обратную сторону, приблизьте X элементарным, а потом накройте части разности открытыми небольшой меры.]]

2.7. Докажите, что с помощью результата задачи 1.11 можно определить меру Лебега открытого $U \subset \mathbb{R}^n$ как

$$\mu U = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx_1 \dots dx_n : \text{по непрерывным} f : \mathbb{R}^n \to [0,1] \text{ с носителем в } U \right\}.$$

Докажите, что эта величина счётно субаддитивна на открытых множествах, то есть

$$\mu \bigcup_n U_n \leqslant \sum_n \mu U_n.$$

[[Используйте компактность носителя, сведя счётную аддитивность к конечной.]]

2.8. Докажите, что определение из предыдущей задачи эквивалентно определению меры Лебега открытого U как нижней меры Жордана.

[[Используйте непрерывные функции, которые равны единице на данном компакте и равны нулю за пределами его ε-окрестности.]]

2.9 (Счётная аддитивность меры Лебега). Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ представлено как счётное объединение попарно непересекающихся измеримых множеств, $X = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} X_i$. Докажите, что X измеримо и

$$\mu X = \sum_{i=1}^{\infty} \mu X_i.$$

[[Возьмите $\varepsilon > 0$ и приблизьте X_i компактным F_i и открытым U_i, $F_i \subseteq X_i \subseteq U_i$, так что $\mu(U_i \setminus F_i) \leqslant \varepsilon/2^i$.]]

2.10. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ имеет Лебегову меру нуль, функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема. Доказать, что $f(A)$ тоже имеет Лебегову меру нуль.

[[Заметьте, что f локально липшицево, то есть $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|$ на всяком отрезке $[a, b]$ с константой L, зависящей от $[a, b]$.]]

2.11. * Докажите, что утверждение предыдущей задачи будет неверно, если заменить непрерывную дифференцируемость f на непрерывность.

[[Попробуйте непрерывным отображением растянуть канторово множество.]]

2.12. Приведите пример замкнутого подмножества отрезка $[0, 1]$, состоящего только из иррациональных чисел и имеющего меру Лебега не менее 0.999.

[[Заметьте, что рациональных чисел счётное количество.]]

2.13. Докажите, что если $X \subset \mathbb{R}$ измеримо по Лебегу с конечной мерой, то мера

$$\mu(X \setminus (X + t))$$

стремится к нулю при $t \to 0$. Здесь $X + t$ – это сдвиг множества X на t.

[[Воспользуйтесь приближением измеримого множества X элементарным E, так что $\mu(X \setminus E) + \mu(E \setminus X)$ сколь угодно мало.]]

2.14. Докажите, что существует подмножество отрезка, не измеримое по Лебегу. Можно использовать аксиому выбора.

[[Вместо отрезка удобнее рассматривать окружность, взять поворот R на угол $t\pi$ с $t \notin \mathbb{Q}$, и придумать множество X, повороты которого $\{R^n X\}_{n\in\mathbb{Z}}$ попарно не пересекаются и покрывают всю окружность.]]

2.2. **Измеримые по Лебегу и борелевские функции.**

Определение 2.15. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ $(X \subseteq \mathbb{R}^n)$ называется *измеримой по Лебегу*, если для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x : f(x) \leqslant c\}$ измеримо по Лебегу.

2.16. Докажите, что в определение измеримой функции со строгим неравенством $\{x : f(x) < c\}$ эквивалентно определению с нестрогим неравенством.

[[Вспомните про счётную аддитивность меры Лебега.]]

2.17. Докажите, что у произвольной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ множество точек разрыва измеримо по Лебегу.

[[Запишите определение в кванторах, используя только переменные, принимающие счётные множества значений.]]

2.18. Докажите, что произведение измеримых по Лебегу функций $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ тоже измеримо по Лебегу.

[[Опишите множество $\{f(x)g(x) \leqslant c\}$ через множества $\{f(x) \leqslant c'\}$ и $\{g(x) \leqslant c''\}$ с помощью кванторов и переменных, принимающих лишь счётное число значений.]]

2.19. Докажите, что если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима по Лебегу, то её график имеет меру Лебега нуль на плоскости.

[[Заключите график в множество произвольно малой меры.]]

2.20. Докажите, что если неотрицательная $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ измерима по Лебегу, то множество

$$S(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant f(x) \leqslant y\}$$

измеримо по Лебегу.

[[Докажите для ступенчатых функций (со счётным числом измеримых по Лебегу ступенек), а потом приблизьте произвольную функцию ступенчатыми.]]

2.21. Докажите, что композиция борелевских функций одной переменной борелевская, а композиция измеримых по Лебегу функций не обязательно измерима по Лебегу.

[[Для борелевских функций просто проверьте по определению, что прообраз борелевского множества борелевский. Используйте факт, что всякое подмножество множества меры нуль тоже имеет меру нуль.]]

2.3. **Интеграл Лебега.**

Определение 2.22. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ $(X \subseteq \mathbb{R}^n)$ называется *счётно ступенчатой* (или в этом разделе просто *ступенчатой*), если X разбивается в счётное объединение измеримых множеств $X = \bigsqcup_i X_i$ и на каждом X_i функция равна константе c_i.

Определение 2.23. Для ступенчатой функции из предыдущего определения положим

$$\int_X f(x)\, dx = \sum_i c_i \mu X_i,$$

считая $0 \cdot (+\infty) = 0$ и требуя, чтобы сумма абсолютно сходилась.

2.24. Докажите линейность и монотонность интеграла Лебега для ступенчатых функций на измеримом по Лебегу множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

[[Заметьте, что если $X = \bigsqcup_i X_i'$ и $X = \bigsqcup_j X_j''$, то множества $X_i' \cap X_j''$ образуют счётное измеримое разбиение X.]]

2.25. Докажите, что для любой измеримой по Лебегу функции $f : X \to \mathbb{R}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся две ступенчатые функции $g, h : X \to \mathbb{R}$, такие что $g \leqslant f \leqslant h$ и

$$\int_X (h(x) - g(x))\, dx < \varepsilon.$$

[[В случае, когда мера X конечна, положите $X_i = \{x \in X : \varepsilon i \leqslant f(x) < \varepsilon(i+1)\}$ при $i \in \mathbb{Z}$ и рассмотрите подходящие функции на этих ступеньках. Множество X с бесконечной мерой разбейте на счётное число множеств с конечной мерой, на i-м множестве приблизьте функцию ступенчатыми с точностью $\varepsilon/2^i$.]]

Определение 2.26. Для измеримой по Лебегу функции $f : X \to \mathbb{R}$ ($X \subseteq \mathbb{R}^n$) определим *нижний интеграл Лебега* как

$$\sup \int_X g(x)\, dx$$

по интегрируемым ступенчатым $g \leqslant f$. Определим *верхний интеграл Лебега* как

$$\inf \int_X h(x)\, dx$$

по интегрируемым ступенчатым $h \geqslant f$.

Определение 2.27. Будем говорить, что измеримая $f : X \to \mathbb{R}$ ($X \subseteq \mathbb{R}^n$) *интегрируема по Лебегу с конечным интегралом*, если её нижний и верхний интегралы Лебега конечны и равны между собой. Для неотрицательной измеримой функции $f : X \to \mathbb{R} : +$ будем писать $\int_X f(x)\, dx = +\infty$, если её нижний интеграл Лебега бесконечен.

2.28. Для функции $f : X \to \mathbb{R}$ положим

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geqslant 0; \\ 0, & f(x) \leqslant 0. \end{cases}$$

и

$$f_-(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leqslant 0; \\ 0, & f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Докажите, что если $\int_X f(x)\, dx$ конечен, то $\int_X f_+(x)\, dx$ и $\int_X f_-(x)\, dx$ тоже конечны.

[[Приблизьте функцию ступенчатой снизу и сверху и вспомните про требование абсолютной сходимости их интегралов как сумм.]]

2.29. Докажите, что если $\int_X f(x)\, dx$ конечен, то $\int_X |f(x)|\, dx$ тоже конечен.

[[Используйте равенства $f(x) = f_+(x) + f_-(x)$ на $|f(x)| = f_+(x) - f_-(x)$ и предыдущую задачу.]]

2.30. Докажите линейность и монотонность интеграла Лебега.

[[Приблизьте интегрируемую функцию ступенчатыми снизу и сверху и используйте линейность и монотонность для них.]]

2.31. Пусть функция f интегрируема по Лебегу на множестве X положительной меры Лебега и $f(x) > 0$ для любого $x \in X$. Докажите что

$$\int_X f(x)\,dx > 0.$$

[[Рассмотрите множества $\{x : f(x) > 1/n\}$.]]

2.32. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ на измеримом $X \subset \mathbb{R}^n$ интегрируема по Лебегу. Положим для $M > 0$

$$f_M(x) = \begin{cases} M, & f(x) \geqslant M; \\ f(x), & |f(x)| \leqslant M; \\ -M, & f(x) \leqslant -M. \end{cases}$$

Докажите, что

$$\lim_{M\to+\infty} \int_X f_M(x)\,dx = \int_X f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \lim_{M\to+\infty} |f(x) - f_M(x)|\,dx = 0.$$

[[Приблизьте функцию сначала ступенчатой, а потом оставьте конечное число ступенек.]]

2.33 (Непрерывность интеграла Лебега по множествам). Пусть множества $X_k \subseteq \mathbb{R}^n$ измеримы по Лебегу и упорядочены по включению

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \dots \subseteq X_n \subseteq X_{n+1} \subseteq \dots.$$

Пусть также $X = \bigcup_k X_k$ и интеграл Лебега $\int_X f(x)\,dx$ существует. Докажите, что

$$\int_X f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{X_k} f(x)\,dx.$$

[[Сведите к ступенчатым функциям, потом к характеристическим функциям измеримых по Лебегу множеств, потом используйте счётную аддитивность меры Лебега.]]

2.34 (Непрерывность интеграла Лебега по множествам). Пусть множества $X_k \subseteq \mathbb{R}^n$ измеримы по Лебегу и упорядочены по включению

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq X_3 \supseteq \dots \supseteq X_n \supseteq X_{n+1} \supseteq \dots.$$

Пусть также $X = \bigcap_k X_k$ и интеграл Лебега $\int_{X_1} f(x)\,dx$ существует и конечен. Докажите, что

$$\int_X f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{X_k} f(x)\,dx.$$

[[Сведите к ступенчатым функциям, потом к характеристическим функциям измеримых по Лебегу множеств, потом используйте счётную аддитивность меры Лебега.]]

2.35 (Непрерывность интеграла Лебега по верхнему пределу). Пусть f интегрируема по Лебегу на отрезке $[a, b]$. Докажите, что выражение

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

непрерывно зависит от x.

[[Приблизьте функцию ограниченной, используя задачу 2.32.]]

2.36 (Абсолютная непрерывность интеграла Лебега). Пусть f интегрируема по Лебегу на отрезке $[a, b]$. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое, что если $X \subset [a, b]$ измеримо и $\mu X < \delta$, то

$$\int_X |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

[[Приблизьте функцию ограниченной, используя задачу 2.32.]]

2.37 (Теорема о монотонной сходимости). Пусть функции f_k $(k \in \mathbb{N})$ и f на измеримом X неотрицательны и измеримы по Лебегу, при этом при любом $x \in X$ последовательность $f_k(x)$ возрастает и стремится к $f(x)$. Докажите, что

$$\int_X f_k\,dx \to \int_X f\,dx, \quad k \to \infty.$$

[[Достаточно доказать, что левая часть не менее правой. Рассмотрите множества $X_{\varepsilon,k} = \{x \in X : f_k(x) \geqslant (1-\varepsilon)f(x)\}$, примените к ним непрерывность интеграла от f при $k \to \infty$, потом устремите $\varepsilon \to +0$.]]

2.38 (Счётная аддитивность интеграла Лебега). Пусть функции f_k $(k \in \mathbb{N})$ на измеримом X неотрицательны и измеримы по Лебегу. Докажите, что

$$\int_X \sum_k f_k\,dx = \sum_k \int_X f_k\,dx.$$

[[На самом деле это тоже теорема о монотонной сходимости.]]

2.39 (Теорема об ограниченной сходимости). Пусть неотрицательная функция g на измеримом X имеет конечный интеграл. Пусть f_k измеримы на X, $|f_k| \leqslant g$ для всех k и $f_k \to f$ поточечно на X. Докажите, что

$$\int_X f_k\,dx \to \int_X f\,dx, \quad k \to \infty.$$

[[Рассмотрите множества $X_{\varepsilon,k} = \{x \in X : \forall \ell \geqslant k\ |f_\ell(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon g(x)\}$, примените к ним непрерывность интеграла от g при $k \to \infty$, потом устремите $\varepsilon \to +0$.]]

2.40. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ измеримо по Лебегу. Докажите, что

$$\mu(X) = \int_0^1 \#(\mathbb{Z} \cap (X + t))\,dt,$$

где # означает количество элементов множества, возможно $+\infty$. Объясните, почему функция под интегралом измерима по Лебегу.

[[Разбейте множество X на его пересечения с промежутками $[n, n+1)$, используйте счётную аддитивность интеграла (задача 2.38).]]

2.41. Докажите, что интегрируемая по Риману на отрезке функция интегрируема и по Лебегу с тем же интегралом.

[[Заметьте, что понятие ступенчатой по Лебегу функции содержит в себе понятие ступенчатой по Риману.]]

2.42 (Критерий Лебега интегрируемости по Риману). Докажите, что $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда она ограничена и множество её точек разрыва имеет меру Лебега нуль.

[[Рассмотрите колебание функции в точке $\omega(f,x)$, обратите внимание, что множества

$$D_k = \{x \in [a,b] : \omega(f,x) \geqslant 1/k\}$$

компактны и мера множества точек разрыва равна нулю тогда и только тогда, когда верхняя мера Жордана всех этих множеств равна нулю. Используйте тот факт, что определение верхней меры Жордана использует покрытие конечным количеством промежутков.]]

2.43. Докажите, что для неотрицательной непрерывной функции $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ существование интеграла Лебега

$$\int_{[0,+\infty)} f(x)\, dx$$

равносильно существованию несобственного интеграла

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Докажите, что для знакопеременных функций это может быть не так.

[[Примените непрерывность интеграла Лебега по множествам. Заметьте, что интегрируемые по Лебегу функции интегрируемы абсолютно.]]

2.44 (Теорема о линейной замене переменных в интеграле Лебега). Докажите, что для интегрируемой $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и линейного преобразования $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\; y = |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax)\, dx.$$

[[Рассмотрите для начала элементарную замену $y = Ax$, при которой $(j \neq k)$

$$\forall i \neq j, y_i = x_i \text{ и } y_j = x_j + a_{jk}x_k,$$

и примените теорему Фубини.]]

2.4. **Применения интеграла Лебега.**

2.45 (Неравенство Коши–Буняковского). Пусть функции $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ измеримы по Лебегу и их квадраты $|f|^2, |g|^2$ имеют конечные интегралы. Докажите неравенство

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\, dx\right)^2 \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, dx\right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2\, dx\right).$$

[[Используйте неотрицательность интеграла от $(uf + vg)^2$ при любых $u, v \in \mathbb{R}$.]]

2.46 (Формула понижения). Докажите формулу для $p > 0$

$$\Gamma(p + 1) = p\Gamma(p),$$

где $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}\, dt$.

2.47 (Объём шара и интеграл Пуассона). Рассмотрим единичный шар

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 \leqslant 1\}.$$

Докажите, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\, dx = \mu B_n \cdot \Gamma(n/2 + 1).$$

Выведите отсюда, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

[[Используйте равенство интеграла мере под графиком, под графиком проинтегрируйте сначала по x, а потом по y.]]

2.48. Докажите, что для $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\Gamma(n + 1) = n!, \quad \Gamma(n + 1/2) = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^n},$$

где $(2n - 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n - 1)$ и считаем $(-1)!! = 1$.

[[Примените формулу понижения и вспомните выражение интеграла Пуассона через Γ.]]

2.49. Введём *бета-функцию* при $p, q > 0$

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt.$$

Докажите формулу

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

[[Напишите (используя теорему Фубини)

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_{x,y\geqslant 0} x^{p-1}y^{q-1}e^{-x-y}\,dxdy$$

и сделайте линейную замену переменной $s = x + y$ вместо, скажем, y. Потом проинтегрируйте по x, а затем по s.]]

2.50. Найдите при $u, v > 0$ интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \sin^u x \cos^v y\,dx.$$

[[Сведите к B.]]

2.51. Посчитайте интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 e^{-|x|^2}\,dx_1 \dots dx_n.$$

[[Используйте теорему Фубини и интегрирование по частям.]]

2.52. Пусть $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — положительно определённая квадратичная форма. Докажите формулу

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(x)}\,dx_1 \dots dx_n = \pi^{n/2} \cdot (\det Q)^{-1/2}.$$

[[Линейной ортогональной заменой переменных сделайте Q диагональной.]]

2.53 (Формула Стирлинга). Для $x \to +\infty$ докажите асимпотическую формулу для факториала

$$x! = \Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt = \sqrt{2\pi x}x^x e^{-x}(1 + o(1)).)$$

[[Сделайте замену $t = sx$ и запишите интеграл в виде

$$x! = x^{x+1}\int_0^{+\infty} e^{x(\ln s - s)}\,ds,$$

оцените полученный интеграл в окрестности точки максимума функции $\ln s - s$ через интеграл Пуассона.]]

2.54 (Дифференцирование под знаком интеграла). Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема по множеству X при любом $y \in (a,b)$, дифференцируема по y и для любого $y \in (a,b)$

$$|f'_y(x,y)| \leqslant g(x), \quad \int_X g(x)\,dx < +\infty.$$

Докажите, что тогда

$$\frac{d}{dy}\int_X f(x,y)\,dx = \int_X f'_y(x,y)\,dx.$$

[[Используйте определение производной в левой части и теорему об ограниченной сходимости.]]

2.5. **Лемма Безиковича и дифференцируемость почти всюду.**

2.55 (Лемма Безиковича о покрытии на прямой). * Пусть в каждой точке x измеримого $X \subset \mathbb{R}$ дан набор отрезков $\{I_{x,k}\}_k$, каждый из которых содержит x строго внутри и длины которых стремятся к нулю при $k \to \infty$. Докажите, что из всех этих отрезков можно выбрать счётную систему попарно не пересекающихся отрезков $\mathcal{C}$, которая покрывает почти всё X, то есть $\mu X \setminus \bigcup \mathcal{C} = 0$.

[[Докажите, что какая-то конечная попарно не пересекающаяся система таких отрезков покрывает не менее $1/4$ меры X. Сначала можно заменить X компактом $K \subseteq X$ с мерой $\mu K \geqslant 1/2\mu X$, потом перейти к конечному покрытию и заметить, что минимальное конечное покрытие можно покрасить в два цвета так, что отрезки разных цветов не пересекаются.

После этого можно выбросить объединение найденных отрезков из X, в системах $\{I_{x,k}\}_k$ для оставшихся точек выбросить отрезки, пересекающиеся с выбранными и вновь оказаться в условиях задачи. Далее можно продолжить так же счётное число раз, накрыв счётным числом отрезков почти всё X.]]

2.56 (Лемма Безиковича о покрытии в $\mathbb{R}^n$). * Пусть в каждой точке x измеримого $X \subset \mathbb{R}^n$ дан набор шаров $\{B_{x,k}\}_k$ с центрами в x, радиусы которых стремятся к нулю при $k \to \infty$. Тогда из всех этих шаров можно выбрать счётную систему попарно не пересекающихся шаров $\mathcal{C}$, которая покрывает почти всё X, то есть $\mu X \setminus \bigcup \mathcal{C} = 0$.

[[Аналогично одномерному случаю, надо вначале покрыть конечной системой непересекающихся шаров какую-то фиксированную долю X. Для этого надо покрыть X некоторой подсистемой из этих шаров $\mathcal{D}$, которую можно раскрасить в конечное число $M(n)$ цветов так, что шары одного цвета из $\mathcal{D}$ попарно не пересекаются. Тогда один из цветов будет покрывать не менее $1/M(n)$ от меры X. Для построения $\mathcal{D}$ можно использовать жадный алгоритм, который сводится к выбору на каждом шаге самого большого шара (точнее, близкого к супремуму) из тех шаров системы, центры которых не покрыты ранее выбранными шарами. Далее надо доказать, что в результате работы жадного алгоритма выбранный на некотором шаге шар пересекает не более $M(n) - 1$ предыдущих, для подходящей константы $M(n)$, зависящей только от размерности.]]

2.57 (Плотность измеримого множества). Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$ измеримо. Докажите, что для почти всех $x \in X$

$$\lim_{t\to+0} \frac{\mu(X \cap [x-t, x+t])}{2t} = 1$$

и для почти всех $x \notin X$

$$\lim_{t\to+0} \frac{\mu(X \cap [x-t, x+t])}{2t} = 0.$$

[[Предположите противное первому утверждению (второе аналогично). С помощью счётной аддитивности противное переформулируйте так: на множестве $Y \subseteq X$ меры $\delta > 0$ для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\liminf_{t\to+0} \frac{\mu(X \cap [x-t, x+t])}{2t} \leqslant 1 - \varepsilon.$$

Погрузите Y в открытое $V \supseteq Y$ меры $\delta' < (1+\varepsilon^2)\delta$. Рассмотрите отрезки $[x-t, x+t] \subseteq V$, для которых

$$\mu(X \cap [x-t, x+t]) \leqslant (1-\varepsilon/2)\mu[x-t, x+t]$$

и примените к ним лемму Безиковича.]]

2.58 (Усреднение интегрируемой функции). Докажите, что если f локально интегрируема на $\mathbb{R}$, то для почти всех $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \lim_{t\to+0} \frac{\int_{x-t}^{x+t} f(\xi)\, d\xi}{2t} = \lim_{t\to+0} \frac{\int_{x}^{x+t} f(\xi)\, d\xi}{t} = \lim_{t\to+0} \frac{\int_{x-t}^{x} f(\xi)\, d\xi}{t}.$$

[[Действуйте аналогично решению предыдущей задачи.]]

2.59 (Дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом). * Докажите, что если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема, то функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

почти всюду дифференцируема и $F'(x) = f(x)$ почти всюду.

[[На самом деле это переформулировка предыдущей задачи.]]

2.60. Докажите, что если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) с ограниченной производной, то

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\, dx.$$

[[Используйте определение производной и теорему об ограниченной сходимости.]]

2.61. * Докажите, что если f на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|,$$

то она почти всюду имеет производную и её приращение на отрезке равно интегралу производной,

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\, dx.$$

[[Рассмотрите верхнюю правую производную, обозначим её $\varphi(x)$, она измерима, ограничена, и следовательно интегрируема.

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)\, dt$$

почти всюду имеет производную, равную $\varphi(x)$. Разность $f(x) - \Phi(x)$ почти всюду имеет правую производную, равную нулю. Из этого (с помощью леммы Безиковича) выведите, что $f(x) - \Phi(x)$ не убывает. Следовательно приращение функции не меньше интеграла от правой верхней производной. Докажите, аналогично, что приращение f не больше интеграла от правой нижней производной. Следовательно, почти всюду правая нижняя и правая верхняя производные совпадают и f является интегралом от своей правой производной с переменным верхним пределом с точностью до константы. Аналогично рассматривается левая производная.]]

2.62. Приведите пример непрерывной и непостоянной на отрезке функции, у которой производная почти всюду (по мере Лебега) существует и почти всюду равна нулю.

[[Вспомните про канторово множество, пусть функция возрастает только на нём, а на его дополнении кусочно постоянна.]]

2.63. ** Докажите, что монотонная на отрезке функция почти всюду имеет производную.

[[Действуйте аналогично доказательству дифференцируемости почти всюду липшицевой функции, но более аккуратно.]]

2.6. **Приближение функций свёртками.**

2.64. Пусть $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — неотрицательная бесконечно гладкая функция, отличная от нуля только при $|x| \leqslant 1$ и пусть $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1$. Положим

$$\varphi_k(x) = k^n \varphi(kx),$$

эти функции тоже имеют единичные интегралы и φ_k отлична от нуля только при $|x| \leqslant 1/k$. Теперь для непрерывной $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определим свёртки

$$f_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - t)\varphi_k(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\varphi_k(x - t)\, dt.$$

Докажите, что функции f_k бесконечно дифференцируемые и $f_k \to f$ равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{R}^n$.

[[Выпишете разность $f - f_k$ как интеграл и оцените его. Продифференцируйте одно из определений f_k по x, воспользовавшись теоремой об ограниченной сходимости.]]

2.65. В условиях предыдущей задачи докажите, что если исходная функция f имеет непрерывные производные до m-го порядка, то производные f_k до m-го порядка равномерно на компактах сходятся к соответствующим производным f.

[[Продифференцируйте другое определение f_k по x, воспользовавшись теоремой об ограниченной сходимости.]]

3. Дифференциальная геометрия

3.1. **Векторные поля — определение.**

3.1. Докажите, что всякую гладкую функцию в окрестности $0 \in \mathbb{R}^n$ можно представить в виде

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x)$$

с гладкими g_i.

[[Используйте формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.]]

3.2 (Лемма Морса). * Докажите, что всякую гладкую функцию, у которой дифференциал в нуле равен нулю и матрица вторых производных $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ невырождена, можно криволинейной заменой координат привести к виду

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2$$

в некоторой окрестности нуля, где $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

[[Используйте формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, а потом вспомните процедуру приведения квадратичной формы к каноническому виду.]]

3.3. Определим *касательный вектор* в точке $p \in \mathbb{R}^n$ как $\mathbb{R}$-линейное отображение $X : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее

$$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g).$$

Докажите, что размерность пространства касательных векторов в точке $T_p\mathbb{R}^n$ равна n. Докажите, что касательное пространство в точке не изменится, если заменить $\mathbb{R}^n$ на произвольную окрестность $U \ni p$.

[[Используйте задачу 3.1.]]

3.4. Докажите, что для открытого $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$-линейное отображение $X : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$, удовлетворяющее соотношению

$$X(fg) = X(f)g + fX(g)$$

задаётся *векторным полем* на U, то есть семейством гладко зависящих от точки касательных векторов в точке. Докажите, что в локальной системе координат на U векторное поле можно задать как

$$X = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

где коэффициенты X_i являются гладкими функциями.

[[Примените X к координатным функциям и установите его вид.]]

3.5. Докажите, что для всякого гладкого отображения между многообразиями $\varphi : M \to N$ определено отображение касательных векторов, переводящее вектор X на M в вектор $\varphi_* X$ на N по формуле

$$\varphi_*(X)f = X(f \circ \varphi).$$

Выпишите, как это отображение выглядит в явном виде в координатах.

[[Проверьте тождество Лейбница и используйте дифференцирование композиции.]]

3.6. Заметьте, что всякая гладкая функция $f \in C^\infty(M)$ может быть рассмотрена как отображение $M \to \mathbb{R}$ и тогда f_* из предыдущего определения даёт дифференциал $d_p f : T_p M \to \mathbb{R}$ в любой точке $p \in M$, и такие дифференциалы порождают всякое кокасательное пространство $T_p^* M$ в точке $p \in M$.

[[Выпишите всё это в координатах.]]

3.2. **Дифференциальные формы — определение и дифференцирование.**

3.7. Определим *дифференциальную форму степени* k на многообразии M как отображение наборов из k гладких векторных полей $X_1, \dots, X_k$ на M в бесконечно гладкие функции на M, $(X_1, \dots, X_k) \to \alpha(X_1, \dots, X_k)$, линейное по каждому аргументу и относительно умножения на бесконечно гладкие функции, то есть

$$\alpha(f_1 X_1, \dots, f_k X_k) = f_1 \dots f_k \alpha(X_1, \dots, X_k),$$

и кососимметричное, то есть меняющее знак при перестановке любых двух своих аргументов. Докажите, что задать дифференциальную форму степени k — это то же самое, что задать в каждой точке $p \in M$ полилинейное кососимметричное отображение

$$\alpha_p : \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_{k} \to \mathbb{R},$$

гладко зависящее от точки p. Множество таких форм обозначим $\Omega^k(M)$.

3.8. Докажите, что для всякой $f \in C^\infty(M)$ её дифференциал можно считать формой первой степени в соответствии с формулой

$$df(X) = X(f).$$

3.9. Для всякой $f \in C^\infty(M)$ попробуйте определить *гессиан* (второй дифференциал) в точке p как квадратичную форму на $T_p M$, не зависящую от системы координат. Убедитесь, что это возможно только при $df = 0$ в точке p.

[[Для $X \in T_p M$ возьмите кривую γ с $\gamma(0) = p$ и $\dot\gamma(0) = X$. Посмотрите, зависит ли $\frac{d^2}{dt^2} f(\gamma(t))|_{t=0}$ от выбора γ.]]

3.10. Какой коэффициент $c_{k,\ell}$ надо подобрать в определении внешнего умножения кососимметричных полилинейных форм

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1, \dots, X_{k+\ell}) = c_{k,\ell} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} (\operatorname{sgn} \sigma) \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \beta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(\ell)})$$

чтобы выполнялась ассоциативность умножения и условие нормировки

$$(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) = 1?$$

[[Можно сгруппировать перестановки по тому, какие k элементов первые и какие ℓ элементов последние, выбрав по одной перестановке из каждой группы и суммируя только по ним. Тогда определение будет давать правильную нормировку.]]

3.11. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — область. Докажите, что на гладких дифференциальных формах на U существует единственный $\mathbb{R}$-линейный оператор d, повышающий степень формы на 1 и удовлетворяющий условиям: а) для функций df является дифференциалом; б) $d^2 = 0$; в) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta$.

[[Докажите сначала единственность, а потом определите оператор явно в какой-то системе координат, единственность будет гарантировать, что такое же определение будет работать в любой системе координат.]]

3.3. **Дифференциальные формы — интегрирование.**

3.12. Для гладкой формы с компактным носителем $\nu = a(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ на пространстве $\mathbb{R}^n$ (иначе говоря $\nu \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$) определим (например, через кратный интеграл Римана)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nu := \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\ dx_1 \dots dx_n.$$

Докажите, что если $\nu = d\lambda$ и $\lambda \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$, то

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nu = 0.$$

[[Используйте сведение кратного интеграла к повторному и формулу Ньютона–Лейбница.]]

3.13. Пусть $\varphi(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ — функция с компактным носителем и единичным интегралом. Докажите, что для всякой $\nu \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ найдётся число I и форма $\lambda \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$, такие что

$$\nu = I\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n + d\lambda.$$

[[Начните со случая размерности 1, потом примените одномерную конструкцию последовательно ко всем координатам, считая остальные параметрами.]]

3.14. Докажите, что факторпространство $\Omega_c^n(\mathbb{R}^n)/d\Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ одномерно, то есть всевозможные способы определить интеграл формы $\nu \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ так, чтобы интеграл от $d\lambda$ равнялся нулю, могут отличаться только умножением на константу.

[[Используйте предыдущую задачу, найдя явного представителя в каждом классе $\Omega_c^n(\mathbb{R}^n)/d\Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$.]]

3.15. Докажите, что для всякого гладкого отображения между многообразиями $\varphi : M \to N$ определено отображение дифференциальных форм $\varphi^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$, действующее по формуле

$$\varphi^* \alpha(X_1, \dots, X_k) = \alpha(\varphi_* X_1, \dots, \varphi_* X_k).$$

Выпишите, как это отображение выглядит в явном виде в координатах при $k = \dim M = \dim N$, и может быть в некоторых других случаях. Докажите, что оно коммутирует с оператором d.

[[Можно просто проверить всё в координатах.]]

3.16 (Замена переменных в кратном интеграле). Рассмотрим гладкое отображение $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ с компактным носителем, то есть $\varphi(x) = x$ за пределами некоторого компактного множества. Докажите, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^* \nu = \int_{\mathbb{R}^n} \nu.$$

Какая формула получится, если мы представим ν в виде $a(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ и выпишем $\varphi^* \nu$ через якобиан φ?

[[Используйте одномерность $\Omega_c^n(\mathbb{R}^n)/d\Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ и предыдущую задачу.]]

3.17. Докажите, что гладкое отображение $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ с компактным носителем сюръективно.

[[Примените предыдущую задачу к форме ν с носителем, сосредоточенным в малой окрестности некоторой точки $p \in \mathbb{R}^n$.]]

3.4. **Гладкие многообразия.**

3.18. Докажите, что для любого покрытия $\{U_\alpha\}_\alpha$ многообразия M найдётся набор неотрицательных гладких функций $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ таких, что

$$\forall\alpha\ \operatorname{supp}\rho_\alpha \subset U_\alpha$$

и

$$\forall x \in M\ \sum_\alpha \rho_\alpha(x) = 1$$

(сумма конечна при каждом x). Это называется *разбиение единицы*.

[[Рассмотрите случай компактного M, когда это утверждение намного проще и разбиение единицы конечно.]]

3.19. Докажите, что гладкие отображения между многообразиями $M \to N$ находятся в однозначном соответствии с *гомоморфизмами алгебр* $C^\infty(N) \to C^\infty(M)$, то есть отображениями колец функций, сохраняющих сложение, умножение, и переводящих константу в ту же константу.

[[В одну сторону очевидно. Обратно, если есть гомоморфизм колец f^* и если без ограничения общности N вложено $\mathbb{R}^\nu$, то посмотрите на образы координатных функций в $\mathbb{R}^\nu$ при отображении f^*, они являются координатами некоторого отображения $M \to \mathbb{R}^\nu$.]]

3.20. С какими алгебраическими объектами находятся в однозначном соответствии точки многообразия M?

3.21. Докажите, что n-мерное многообразие M ориентируемо тогда и только тогда, когда существует дифференциальная форма $\nu \in \Omega^n(M)$, которая ни в одной точке не равна нулю.

[[Ориентацию системы координат можно производить условием $\nu\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) > 0$, для построения глобальной формы можно складывать локальные.]]

3.22. Для n-мерного многообразия с краем M назовём ориентации M и края ∂M согласованными, если в локальной системе координат $x_1, \dots, x_n$ в окрестности некоторой точки края M задано неравенством $x_n \geqslant 0$, а ∂M — соответственно равенством $x_n = 0$, ориентация M положительна относительно $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, а ориентация ∂M положительна относительно $(-1)^n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$. Докажите, что это согласование не зависит от выбора системы координат.

[[При замене координат посмотрите на n-ю строчку матрицы Якоби и разложите по ней.]]

3.23. Докажите, что если отображение $f : M \to \mathbb{R}^n$ гладких многообразий инъективно, $\operatorname{rk} Df \equiv \dim M$ всюду и M компактно, то его образ $f(M)$ является вложенным в $\mathbb{R}^n$ многообразием.

[[Заметьте, что топологии на M и на $f(M)$ в этом случае полностью совпадают и что локально всё выглядит правильно из теоремы об обратном отображении.]]

3.24. Опишите все компактные одномерные гладкие многообразия (возможно с краем) с точностью до диффеоморфизма.

[[Сначала покажите, что многообразие распадается на компоненты (линейной) связности, которых для компактного многообразия должно быть конечное число. Далее изучите связные компактные многообразия.]]

3.25. * Опишите все не обязательно компактные одномерные гладкие многообразия (возможно с краем) с точностью до диффеоморфизма.

[[Действуйте аналогично предыдущей задаче. В данном случае не обязательно есть конечное покрытие координатными картами, но по определению многообразия есть счётное покрытие, с которым надо аккуратно поработать.]]

3.26. Пусть M — ориентированное многообразие, $\nu \in \Omega^n_c(M)$ — некоторая форма с компактным носителем, а $\varphi \in C^\infty(M)$ — фазовая функция. Докажите, что интеграл с параметром

$$\int_M e^{it\varphi(x)}\nu$$

при $t \to +\infty$ с точностью до быстро убывающих (быстрее любой степени t) слагаемых определяется значениями подинтегрального выражения в произвольно малой окрестности множества критических точек φ, то есть точек, где $d\varphi_x = 0$.

[[Для окрестности V множества критических точек φ рассмотрите компакт и сделайте разбиение единицы для $\operatorname{supp}\nu\setminus V$, $\rho_1+\dots+\rho_N \equiv 1$ так, чтобы в окрестности носителя каждой ρ_i функцию φ можно было бы выбрать за одну из координат. Потом по теореме Фубини начните интегрирование слагаемого $\rho_i e^{it\varphi}\nu$ с этой координаты и в интеграле по этой координате сделайте преобразования типа:

$$\int a(\varphi)e^{it\varphi}\,d\varphi = \frac{i}{t}\int a'(\varphi)e^{it\varphi}\,d\varphi = \frac{i^2}{t^2}\int a''(\varphi)e^{it\varphi}\,d\varphi = \dots.$$

]]

3.27. * В том же интеграле с параметром

$$\int_M e^{it\varphi(x)}\nu$$

получите выражение для вклада невырожденной критической точки φ с точностью до быстро убывающих слагаемых при $t \to +\infty$.

[[Может помочь лемма Морса 3.2.]]

3.5. **Формула Стокса и когомологии де Рама.**

3.28 (Формула Стокса). Докажите для ориентированного многообразия с краем $(M, \partial M)$ размерности n и формы с компактным носителем на нём α степени $n-1$

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha.$$

[[Сведите к случаю $(M, \partial M) = (\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{n-1})$ через разбиение единицы.]]

3.29. Докажите, что площадь области, ограниченной замкнутой гладкой кривой без самопересечений $C \subset \mathbb{R}^2$, можно посчитать по формуле:

$$A = \pm \int_C x dy,$$

где знак выбирается в зависимости от ориентации кривой.

3.30. Докажите, что объём области в $\mathbb{R}^3$, ограниченной гладкой связной вложенной поверхностью без края $S \subset \mathbb{R}^3$, можно посчитать по формуле:

$$V = \pm \int_S x dy \wedge dz,$$

где знак выбирается в зависимости от ориентации поверхности.

3.31. * Для гладкого отображения $f : M \to N$ и дифференциальной формы α на N определите естественным образом форму $f^*\alpha$ на M. Докажите, что если два отображения $f_0, f_1 : M \to N$ гладко гомотопны, то есть существует гладкое отображение

$$h : M \times [0,1] \to N, \text{ такое что } f_0(x) \equiv h(x,0), f_1(x) \equiv h(x,1),$$

и $d\alpha = 0$, то найдётся β, такая что $f_0^*\alpha - f_1^*\alpha = d\beta$.

Для этого рассмотрите форму $h^*\alpha$ на цилиндре $M \times [0,1]$ и примените к ней оператор $dH + Hd$, где операция «интегрирования по слоям» H определена на формах, делящихся на dt как

$$H(dt \wedge \beta(x,t)) = \int_0^1 \beta(x,t)\, dt,$$

а на формах, не делящихся на dt, определена как 0.

[[Нужные формулы проверьте в координатах.]]

3.32 (Лемма де Рама). * Определим когомологии де Рама

$$H^k(M) = \ker d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)/d\Omega^{k-1}(M).$$

Докажите, что $H^k(\mathbb{R}^n) = 0$ при $k \neq 0$ и $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$.

[[Постройте гомотопию между тождественным отображением $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и отображением всего $\mathbb{R}^n$ в начало координат.]]

3.33. Придумайте форму $\alpha \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, у которой $d\alpha = 0$ и для которой не существует $\beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, такой что $d\beta = \alpha$.

[[Постарайтесь придумать α такой, чтобы её интеграл по единичной сфере был ненулевым. Тогда отсутствие «первообразной» будет следовать из формулы Стокса.]]

3.34. Для не обязательно компактного многообразия без края M рассмотрим дифференциальные формы с компактным носителем $\Omega_c^*(M)$ и определим *когомологии де Рама с компактным носителем*

$$H_c^k(M) = \ker d : \Omega_c^k(M) \to \Omega_c^{k+1}(M)/d\Omega_c^{k-1}(M).$$

Докажите, что если $n = \dim M$, M ориентируемо и связно, то $H_c^n(M)$ одномерно.

[[Задача 3.14 доказывает это для $\mathbb{R}^n$, модифицируйте доказательство для произвольного M.]]

3.6. **Векторные поля — дифференцирование.**

3.35. Для векторного поля X на некотором многообразии определим оператор i_X на дифференциальных формах по формуле

$$i_X\alpha(X_2, \dots, X_k) = \alpha(X, X_2, \dots, X_k).$$

Докажите правило Лейбница для него

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha}\alpha \wedge i_X\beta.$$

3.36. Для векторного поля X на некотором многообразии определим оператор на дифференциальных формах как «суперкоммутатор»

$$L_X = i_X d + d\, i_X.$$

Докажите правило Лейбница для него

$$L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge L_X\beta.$$

3.37. Определение производной Ли L_X для форм первой степени по двойственности можно распространить и на векторные поля, требуя выполнения равенства

$$X(\alpha(Y)) = L_X(\alpha)(Y) + \alpha(L_X Y).$$

Докажите корректность определения и выведите из него формулу

$$L_X Y = -L_Y X$$

для двух векторных полей.

[[Заметьте, что определение эквивалентно формуле

$$\alpha(L_X Y) = i_X d(i_Y\alpha) - i_Y d(i_X\alpha) - i_Y i_X d\alpha.$$

Проверьте, что правая часть умножается на функцию f, если α умножается на f.]]

3.38. Положим для векторных полей $L_X Y = [X, Y]$. Докажите, что

$$[X, Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

и докажите тождество Якоби

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

[[Первое равенство следует из решения предыдущей задачи, если взять $\alpha = df$. Второе следует из первого.]]

3.39 (Теорема о дивергенции). Пусть на многообразии M фиксирована форма объёма ν. Тогда дивергенцию векторного поля X можно определить как

$$L_X\nu = (\operatorname{div} X)\nu.$$

Как написать интеграл по многообразию с краем

$$\int_M (\operatorname{div} X)\nu$$

через интеграл по краю ∂M?

[[Вспомните формулу для производной Ли дифференциальной формы и примените формулу Стокса.]]

3.7. **Векторные поля — интегрирование.**

3.40. Докажите, что если векторное поле в точке p не равно нулю, то в некоторой криволинейной системе координат в окрестности точки p оно может быть приведено к виду $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$.

[[Используйте существование и гладкую зависимость от параметров решения дифференциального уравнения.]]

3.41. Пусть векторные поля $X_1, \dots, X_k$ линейно независимы в точке p многообразия M. Докажите, что если какая-то скобка $[X_i, X_j]$ в точке p не является линейной комбинацией $X_1, \dots, X_k$, то нет k-мерных подмногообразий $N \subset M$, с $TN = \langle X_1, \dots, X_k \rangle$ в окрестности p.

[[Заметьте, что если два векторных поля касаются N в некоторой окрестности p, то их коммутатор тоже касается N.]]

3.42. * Пусть векторные поля $X_1, \dots, X_k$ линейно независимы в окрестности точки p многообразия M и всякая скобка $[X_i, X_j]$ линейно выражается через $X_1, \dots, X_k$ с коэффициентами-функциями. Пусть поле X_i из нашего списка порождает однопараметрическое семейство диффеоморфизмов φ^t. Докажите, что $\varphi^t_* \langle X_1, \dots, X_k \rangle = \langle X_1, \dots, X_k \rangle$ в окрестности p.

[[Используйте утверждение (геометрический смысл скобки Ли векторных полей): $\frac{d}{dt}\varphi^t_* Y = -[X, \varphi^t_* Y]$.]]

3.43 (Теорема Фробениуса). Пусть векторные поля $X_1, \dots, X_k$ линейно независимы в окрестности точки p многообразия M и всякая скобка $[X_i, X_j]$ линейно выражается через $X_1, \dots, X_k$ с коэффициентами-функциями. Докажите, что в некоторой окрестности p найдётся подмногообразие $N \subset M$ размерности k, проходящее через p и у которого $TN \subseteq \langle X_1, \dots, X_k \rangle$.

[[Рассмотрите однопараметрические семейства φ_i^t для соответствующих векторных полей X_i и подмногообразие, определённое как

$$N = \{\varphi_k^{t_k} \circ \varphi_{k-1}^{t_{k-1}} \circ \dots \circ \varphi_1^{t_1}(p) : (t_1, \dots, t_k) \text{ из окрестности } (0, \dots, 0)\}.$$

]]

3.44. Докажите, что для формы 1-й степени α на многообразии M через каждую точку $p \in M$ проходит (локально) подмногообразие $N \subset M$ коразмерности 1 с $\alpha|_N = 0$ тогда и только тогда, когда

$$d\alpha = \beta \wedge \alpha$$

для ещё одной формы β.

[[Рассмотрите систему линейно независимых векторных полей $X_1, \dots, X_{n-1}$, таких что $\alpha(X_i) = 0$.]]

3.8. **Степень отображения.**

3.45. Определим *степень отображения* $f : N \to M$ между многообразиями равной размерности для значения y как количество прообразов $f^{-1}(y)$, взятых со знаками, соответствующими якобианам отображений в соответствующих точках, требуем чтобы якобианы были ненулевые, то есть значение y было *регулярным*. Если многообразия не ориентированы, то степень смотрим по модулю два. Докажите, что степень отображения $f : N \to M$ для связного M и компактного без края N не зависит от выбора регулярного значения в $y \in M$.

[[Примените теорему Сарда о плотности множества регулярных значений в M. Две близкие регулярные точки соедините отрезком и примените теорему Сарда в композиции f и «проекции вдоль этого отрезка».]]

3.46 (Теорема Брауэра о неподвижной точке). Всякое непрерывное отображение шара в себя $f : B \to B$ имеет неподвижную точку $f(x) = x$.

[[Поразмышляйте над формулой
$$g(x) = \frac{x - f(x)}{|x - f(x)|}.$$
]]

3.47. Докажите, что для непрерывного отображения сферы в себя $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ либо найдётся x, такая что $f(x) = -x$, либо f сюръективно.

[[Попробуйте сделать гомотопию между f и тождественным отображением. Заметьте, что степень корректно определена для всего лишь непрерывных отображений.]]

3.48. Докажите, что если степень непрерывного отображения $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ не равна $(-1)^{n-1}$, то f имеет неподвижную точку $f(x) = x$.

[[Рассмотрите отображение, действующее по формуле $g(x) = -f(x)$.]]

3.49. Классифицируйте непрерывные отображения окружности в себя $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ с точностью до гомотопии.

[[Рассмотрите стандартную параметризацию $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ и найдите непрерывное $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такое что $\tau \circ g = f \circ \tau$, изучите свойства таких g.]]

3.50. Пусть $f : N \to M$ — гладкое собственное отображение ориентированных многообразий без края одной и той же размерности n, причём M связно. Докажите, что для всякой $\omega \in \Omega^n_c(M)$ выполняется
$$\int_N f^*\omega = \deg f \cdot \int_M \omega.$$

[[Посмотрите на ω с носителем в окрестности регулярного значения. Произвольную ω разбейте в сумму форм с маленькими носителями и с помощью леммы **??** сдвиньте их с критических значений на регулярные.]]

3.51. Пусть $f : N \to M$ — гладкое отображение ориентированных многообразий с краем одной и той же размерности, причём $f(\partial N) = \partial M$. Докажите, что $\deg f = \deg f|_{\partial N}$.

[[Можно рассуждать геометрически, а можно использовать предыдущую задачу и формулу Стокса.]]

3.52. Рассмотрим симплекс Δ^n, заданный в барицентрических координатах как
$$t_0, t_1, \dots, t_n \geqslant 0,\ \ t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1.$$
Пусть его непрерывное отображение в себя $f : \Delta^n \to \Delta^n$ обладает таким свойством: если $t_i = 0$, то при любых остальных координатах соответствующая координата образа, $f_i(t_0, t_1, \dots, t_n) = 0$. Докажите, что тогда f сюръективно.

[[Приблизьте отображение гладким с тем же свойством, потом поработайте с его степенью в том же духе, как работают со степенью отображений многообразий с краем, переводящих край в край.]]

3.9. **Немного римановой геометрии.**

3.53. Докажите, что на всяком гладком многообразии существует риманова структура.

[[Решите вопрос локально, используйте разбиение единицы и тот факт, что сумма положительно определённых квадратичных форм тоже положительно определена.]]

3.54 (Формула риманова объёма). Докажите, что для (полу)римановой метрики g формула

$$\mathrm{vol}_g = \sqrt{|\det g|} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

где $\det g$ подразумевает детерминант матрицы Грама g, корректно определяет одну и ту же плотность меры в любой системе координат. Понятие *плотность меры* означает величину, которая преобразуется почти как дифференциальная форма высшего ранга, но умножаясь на модуль якобиана, а не на сам якобиан.

[[Проверьте, как меняется выражение при замене координат.]]

3.55. Найдите объём единичной сферы $\mathbb{S}^n$ с римановой метрикой, индуцированной с $\mathbb{R}^{n+1}$.

[[Используйте тот факт, что риманов объём гиперповерхности можно выразить через риманов объём её t-окрестности при малых t.]]

3.56 (Звёздочка Ходжа). Докажите, что в присутствии (полу)римановой метрики g на ориентированном многообразии M^n формула

$$\alpha \wedge *\beta = \tilde{g}(\alpha, \beta)\, \mathrm{vol}_g,$$

корректно определяет линейный оператор $* : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$, где $\tilde{g}$ — соответствующая g билинейная форма на $\Omega^*(M)$.

[[Посмотрите на ситуацию в ортонормированном базисе в данной точке.]]

3.57. В ортогональной матрице A с положительным детерминантом размера $n \times n$ взяли левую верхнюю подматрицу B размера $k \times k$ и правую нижнюю подматрицу C размера $(n-k) \times (n-k)$. Докажите, что $\det B = \det C$.

[[Действие ортогонального оператора A можно распространить на $\wedge^*(\mathbb{R}^n)$, назовём этот оператор $\wedge A$, его матричные элементы являются минорами исходной матрицы A. Заметьте, что $\wedge A$ коммутирует с действием звёздочки Ходжа на $\wedge^*(\mathbb{R}^n)$ и звёздочка Ходжа сама ортогональна.]]

3.58. Докажите, что если у векторного поля X в $\mathbb{R}^3$ нулевая дивергенция, то у него есть векторный потенциал

$$X = \mathrm{rot}\, A.$$

[[Используйте лемму де Рама 3.32.]]

3.59. Выпишите оператор Лапласа для функций в сферических координатах.

[[Используйте выражение $\Delta f = *d*df$ и тот факт, что векторные поля $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \vartheta}$ ортогональны (но не ортонормированы).]]

3.60. * Функция f на римановом многообразии называется *гармонической*, если $\Delta f = *d*df = 0$. Докажите, что у гармонической на $\mathbb{R}^n$ функции все средние значения на сферах с центрами в нуле равны её значению $f(0)$.

[[Заметьте, что оператор Лапласа линеен и инвариантен относительно вращений, следовательно функция, получающаяся из f усреднением относительно всех вращений $\mathrm{SO}(n)$ тоже гармоническая и зависит только от расстояния до начала координат. Найдите общий вид гармонических функций, зависящих только от расстояния до начала координат.]]

3.61. * Докажите, что у гармонической на гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^n$ функции все средние значения на сферах с центрами в точке p равны её значению $f(p)$.

[[Модифицируйте предыдущее рассуждение, используйте теорему о дивергенции для нахождения среднего значения $\frac{\partial f}{\partial r}$ по сферам, где $\frac{\partial}{\partial r}$ — градиент функции расстояния до точки p.]]

3.62. * Докажите, что непостоянная гармоническая функция на многообразии не может иметь компактный носитель.

[[Выразите интеграл $\int_M |df|^2 \operatorname{vol}_g = \int_M df \wedge *df$ через лапласиан Δf.]]

3.63. Пусть (M, g) — многообразие с римановой метрикой g (невырожденной, но необязательно положительно определённой). Докажите, что существует единственная операция *ковариантное дифференцирование векторных полей* $\nabla_X Y$, удовлетворяющая условиям:
 а) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$ и $\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$ для умножения на функцию;
 б) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$;
 в) $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.

3.64 (Формула Козюля). Докажите, что из приведённых выше свойств следует формула

$$\begin{aligned}&2g(\nabla_X Y, Z) =\\ &\quad = X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X).\end{aligned}$$

Докажите, что из этой формулы, наоборот, следуют свойства ковариантного дифференцирования.

3.65. Получите выражение в координатах для

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i},\ Y = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x_i},\ Z = \sum_i Z^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

при условии $\nabla_X Y = Z$ как

$$Z^k = \sum_i X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x_i} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} X^i Y^j.$$

Проверьте, что *символы Кристоффеля*

$$\Gamma_{\ell ij} = \sum_k g_{\ell k} \Gamma^k_{ij}$$

можно в координатах найти как

$$\Gamma_{\ell ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\ell i}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{\ell j}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\ell}\right).$$

[[Используйте формулу Кошуля для попарно коммутирующих векторных полей $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_\ell}$.]]

3.66 (Кривизна Римана). Докажите, что выражение

$$R_{X,Y} Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

является тензором, то есть при умножении на функцию f векторного поля X, Y, или Z выражение просто умножается на f.

3.67. Докажите, что выражение

$$g(R_{X,Y} Z, T)$$

меняет знак при перестановке X и Y, меняет знак при перестановке Z и T и не меняется при обмене пар X, Y и Z, T.

4. Гармонический анализ и функциональные пространства

4.1. **Неравенства и приближения.**

4.1 (Неравенство Гёльдера). Докажите неравенство для измеримых по Лебегу на множестве X функций при конечных интегралах в правой части

$$\int_X |fg|\,dx \leqslant \left(\int_X |f|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\int_X |g|^q\right)^{1/q},$$

здесь $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

[[Начните со случая, когда оба интеграла в правой части равны 1 и воспользуйтесь неравенством $ab \leqslant a^p/p + b^q/q$ для неотрицательных a и b.]]

4.2 (Двойственность). Докажите что

$$\left(\int_X |f|^p\right)^{1/p} = \sup\left\{\int_X fg\,dx : \left(\int_X |g|^q\right)^{1/q} \leqslant 1\right\},$$

здесь $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

[[Примените неравенство Гёльдера и придумайте g, чтобы в нём выполнялось равенство.]]

4.3 (Неравенство Минковского). Докажите неравенство для измеримых по Лебегу на множестве X функций

$$\left(\int_X |f+g|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_X |f|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\int_X |g|^p\right)^{1/p},$$

здесь $p \geqslant 1$.

[[Примените предыдущую задачу, заметив, что выражение $\left(\int_X |f|^p\,dx\right)^{1/p}$ выпукло по f как супремум выпуклых функций и 1-однородно.]]

4.4. Определим (с помощью предыдущей задачи) для $p \geqslant 1$ норму для измеримых по Лебегу на множестве X функций

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p\right)^{1/p}.$$

Докажите, что $\|f\|_p = 0$ тогда и только тогда, когда f равна нулю почти всюду (в смысле меры Лебега).

[[Вспомните задачу 2.31.]]

4.5. Пусть у последовательности измеримых функций (u_k) сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_p$$

конечна. Докажите, что $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ определена для почти всех x и

$$\|S\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_p.$$

[[Примените неравенство Минковского и теорему о монотонной сходимости к выражению $\rho_N(x) = \left(\sum_{k=1}^{N} |u_k(x)|\right)^p$.]]

4.6. Факторпространство пространства функций с конечным значением нормы $\|f\|_p$ по модулю функций с нулевой нормой назовём $L_p(X)$, расстоянием между $f, g \in L_p(X)$ будем считать $\|f - g\|_p$. Докажите, что пространство L_p полно — всякая фундаментальная последовательность в нём сходится к единственному элементу $L_p(X)$.

[[Выберите из фундаментальной последовательности подпоследовательность f_k так, чтобы $\|f_k - f_\ell\|_p \leqslant 2^{-k}$ при $\ell > k$. Таким образом вопрос сведётся к сумме функционального ряда, нормы членов которого в сумме дают конечное число.]]

4.7. Назовём функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ступенчатой*, если она является линейной комбинацией характеристических функций отрезков (точка считается отрезком). Докажите, что всякую $f \in L_p(\mathbb{R})$ можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить ступенчатой.

[[Для L_1 сначала приблизьте функцию ступенчатой со счётным числом измеримых по Лебегу ступенек. Потом оставьте конечное число ступенек, каждую ступеньку приблизьте элементарным множеством (объединением конечных промежутков). Сведите случай L_p к случаю L_1, обрезав функцию по значениям, чтобы было $|f| \leqslant M$ для некоторой константы M.]]

4.8. Докажите, что всякую $f \in L_p(\mathbb{R})$ можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить бесконечно дифференцируемой функцией с компактным носителем.

[[Приблизьте бесконечно гладкой для начала одну ступеньку.]]

4.2. **Ограниченная вариация и абсолютная непрерывность.**

4.9. Функция f на промежутке I имеет *ограниченную вариацию*, если для любых $x_0 < x_1 < \dots < x_N \in I$

$$|f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \dots + |f(x_N) - f(x_{N-1})| \leqslant M,$$

для некоторой константы M. Наименьшую константу M в этом неравенстве назовём $\|f\|_B$. Докажите, что функцию ограниченной вариации можно представить в виде суммы двух монотонных и ограниченных функций, $f = g + h$, одна из которых возрастает, а другая убывает. Докажите, что при этом можно добиться равенства $\|f\|_B = \|g\|_B + \|h\|_B$.

[[Посмотрите, как меняется вариация на части $I_\xi = \{x \in I : x \leqslant \xi\}$ в зависимости от ξ.]]

4.10. Функция f на промежутке I *абсолютно непрерывна*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что любых $x_1 \leqslant y_1 \leqslant x_2 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant x_N \leqslant y_N \in I$ из неравенства

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_N - y_N)| \leqslant \delta$$

следует

$$|f(x_1) - f(y_1)| + |f(x_2) - f(y_2)| + \dots + |f(x_N) - f(y_N)| \leqslant \varepsilon.$$

Докажите, что абсолютно непрерывная функция на конечном отрезке имеет ограниченную вариацию.

[[В определении ограниченной вариации разбейте набор отрезков на фиксированное число наборов, в каждом из которых сумма длин $< \delta$.]]

4.11. Докажите, что если функция f на интервале (a, b) задана как интеграл от интегрируемой по Лебегу функции

$$f(x) = \int_a^x g(t)\, dt,$$

то она абсолютно непрерывна.

[[Достаточно рассмотреть случай неотрицательной g, далее полезно обрезать значения функции g константой M так, чтобы её интеграл изменился не более чем на $\varepsilon/2$, для обрезанной функции утверждение очевидно.]]

4.12. ** Докажите, что если функция f на интервале (a, b) задана как интеграл от интегрируемой по Лебегу функции

$$f(x) = \int_a^x g(t)\,dt,$$

то f почти всюду дифференцируема и почти всюду $f'(x) = g(x)$.

[[Вспомните про дифференцируемость почти всюду монотонной функции, изучите отклонение $f'(x)$ от $g(x)$ вверх и вниз, примените определение производной и лемму Безиковича 2.55 о покрытии для отрезков, демонстрирующих отклонение производной.]]

4.13. ** Докажите, что абсолютно непрерывная на отрезке функция f задаётся как интеграл от интегрируемой по Лебегу функции.

[[Сведите задачу к рассмотрению монотонной функции. Рассмотрите $g(x) = f'(x)$ (почти всюду) и вычтите из f интеграл g. После этого остаётся доказать, что абсолютно непрерывная функция с почти всюду нулевой производной является константой. Здесь может помочь определение производной и лемма Безиковича 2.55 о покрытии. Другой вариант доказательства — применить теорему Радона–Никодима.]]

4.3. **Осцилляция.**

4.14. Докажите, что если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то выражение

$$c(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx$$

ограничено и непрерывно зависит от y. Докажите, что если производная $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и производные до k-й включительно находятся в $L_1(\mathbb{R})$, то

$$c(y) = O\left(\frac{1}{y^k}\right), \quad y \to \infty.$$

[[Используйте теорему об ограниченной сходимости и интегрирование по частям.]]

4.15 (Лемма об осцилляции). Докажите, что если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то выражение

$$c(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx$$

стремится к нулю при $y \to \infty$. Докажите, что если производная $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и производные до k-й включительно находятся в $L_1(\mathbb{R})$, то

$$c(y) = o\left(\frac{1}{y^k}\right), \quad y \to \infty.$$

[[Используйте предыдущую задачу и приближение функции бесконечно дифференцируемой.]]

4.16 (Лемма о равномерной осцилляции). Докажите, что если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то выражение

$$c(y, \xi, \eta) = \int_\xi^\eta f(x)e^{-ixy}\,dx$$

стремится к нулю при $y \to \infty$ равномерно по ξ, η.

[[Разбейте $\mathbb{R}$ на промежутки, на каждом из которых интеграл функции $< \varepsilon$ и примените лемму об осцилляции к каждому из них.]]

4.4. **Ряды и интегралы Фурье.**

4.17. Докажите, что всякую (комплекснозначную) $f \in L_2[-\pi,\pi]$ можно сколь угодно близко в норме $\|\cdot\|_2$ приблизить *тригонометрическим многочленом*

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

[[Выведите из задачи 1.12 или из общей теоремы Стоуна–Вейерштрасса.]]

4.18 (Оптимальность коэффициентов Фурье). Докажите что для всякой $f \in L_2[-\pi,\pi]$ и данного числа n лучшее приближение f тригонометрическим многочленом

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

дают коэффициенты

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx.$$

[[Для этого удобно воспользоваться скалярным произведением в $L_2[-\pi,\pi]$

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx,$$

для которого $\|f\|_2 = \sqrt{(f,f)}$.]]

4.19 (Сходимость ряда Фурье в среднеквадратичном). Докажите что для всякой комплекснозначной $f \in L_2[-\pi,\pi]$

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

в смысле сходимости суммы в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$, если

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx.$$

[[Используйте две предыдущие задачи.]]

4.20. Определим пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ как пространство бесконечно дифференцируемых функций, у которых конечны все полунормы ($k,n \geqslant 0$)

$$\|f\|_{n,k} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|x^k f^{(n)}(x)\right|$$

и определим базу топологии в нём через ε-окрестности в этих полунормах. Докажите, что преобразование Фурье F переводит $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ непрерывно в этой топологии.

[[Надо оценить супремум от преобразования Фурье функции через супремумы её и её же, умноженной на x^2. Далее надо выяснить, во что преобразование Фурье переводит производную функции и во что оно переводит функцию, умноженную на x.]]

4.21. Предположим, линейное отображение $T : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ коммутирует с дифференцированием и умножением функции на x. Докажите, что T — это умножение на константу, то есть $T(f) = cf$ для некоторой константы c и любой $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

[[Докажите, что в каждой точке функция f умножается на одну и ту же константу при операции T. Задача 3.1 может помочь.]]

4.22. Докажите формулу обращения для преобразования Фурье на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, рассмотрев $T = F \circ F^{-1}$ и воспользовавшись предыдущей задачей с заменой $C^\infty(\mathbb{R})$ на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

[[Останется проверить, что константа равна 1, это можно сделать, рассмотрев $f(x) = e^{-x^2}$ и использовав задачу 4.40.]]

4.23. Определим нормированное преобразование Фурье

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx}\, dx.$$

Докажите для функций $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ его унитарность:

$$(\hat{f}, \hat{g}) = (f, g),$$

где скалярное произведение определено стандартно:

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

[[Удобно доказать $(\hat{f}, g) = (f, \tilde{g})$, выписав это в виде повторного интеграла и поменяв порядок интегрирования.]]

4.24. Докажите, что преобразование Фурье тогда продолжается до унитарного оператора $F : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$.

[[Рассмотрите последовательности элементов из $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, фундаментальные относительно нормы L_2.]]

4.5. **Равномерная и поточечная сходимость рядов Фурье.**

4.25 (Вторая теорема о среднем). Докажите, что для монотонной и ограниченной на интервале (a, b) функции f и $g \in L_1(a, b)$ найдётся $c \in [a, b]$, такое что

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(a+0) \int_a^c g(x)\, dx + f(b-0) \int_c^b g(x)\, dx.$$

[[Сведите к случаю $f(b-0) = 0$, сформулируйте утверждение в виде неравенства, докажите его для непрерывно дифференцируемой f, используйте предельный переход для перехода к произвольной f.]]

4.26. Докажите, что если $f \in L_1(\mathbb{R})$ и имеет ограниченную вариацию, то

$$|c(y)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\, dx \right| \leqslant \frac{2\|f\|_B}{|y|}.$$

[[Используйте вторую теорему о среднем и разложение функции ограниченной вариации в сумму монотонных.]]

4.27. Выведите формулу для n-й суммы ряда Фурье 2π-периодической функции

$$T_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t)\, dt,$$

с *ядром Дирихле*

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2}.$$

Докажите, что

$$\left| \int_a^b D_n(t)\, dt \right| \leqslant C$$

для любых $a, b \in [-\pi, \pi]$, $n \in \mathbb{N}$ и не зависящей от a, b, n константы C.

[[Используйте вторую теорему о среднем.]]

4.28. Запишем для $\delta \in (0, \pi)$

$$T_n(f,x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) D_n(t)\, dt =$$
$$= \int_{-\delta}^{\delta} (f(x+t) - f(x)) D_n(t)\, dt + \int_{\delta \leqslant |\xi| \leqslant \pi} (f(x+t) - f(x)) D_n(t)\, dt.$$

Докажите, что если $f \in L_1[-\pi, \pi]$, то

$$\int_{\delta \leqslant |\xi| \leqslant \pi} (f(x+t) - f(x)) D_n(t)\, dt \to 0$$

при $n \to \infty$. Докажите, что если f ограничена, то это выражение стремится к нулю равномерно по $x \in [-\pi, \pi]$.

[[Используйте вторую теорему о среднем и лемму о равномерной осцилляции.]]

4.29. Функция f называется *гёльдеровой степени* $\alpha > 0$, если для любых x, y из области определения

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^{\alpha}$$

с некоторой константой C. Докажите, что для гёльдеровой 2π-периодической функции

$$T_n(f,x) \to f(x)$$

равномерно при $n \to \infty$.

[[Используйте представление суммы Фурье через ядро Дирихле.]]

4.30. Докажите, что для непрерывной 2π-периодической функции ограниченной вариации

$$T_n(f,x) \to f(x)$$

равномерно при $n \to \infty$.

[[Используйте вторую теорему о среднем.]]

4.31. Разложите функцию, заданную формулой $\cos ax$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ при $a \notin \mathbb{Z}$, в ряд Фурье. Выведите из полученного выражения формулы:

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg} x &= v.p. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x - \pi k} \\
\frac{1}{\sin x} &= v.p. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x - \pi k} \\
\sin x &= x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right).
\end{aligned}$$

Здесь $v.p. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=-n}^{n} a_n$.

4.32. Докажите формулу дополнения для бета-функции при $p \in (0, 1)$:

$$B(p, 1-p) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{-p}\, dt = \frac{\pi}{\sin \pi p}.$$

[[С помощью замены переменной напишите
$$B(p,1-p)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx=\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx=\int_0^1\frac{x^{p-1}+x^{-p}}{1+x}\,dx.$$
Разложите в сумму $\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ и переставьте сумму с интегралом по теореме о монотонной сходимости (это можно, если считать бесконечную сумму пределом частичных сумм с чётным количеством слагаемых). Потом воспользуйтесь одним из равенств в предыдущей задаче.]]

4.33. Докажите, что если 2π-периодическая функция гёльдерова степени $\alpha>0$, то её коэффициенты Фурье можно оценить как
$$|c_n|\leqslant C\left(\frac{\pi}{n}\right)^{-\alpha}.$$

[[В определении c_n разбейте $[\pi,\pi]$ на n равных отрезков и оцените интеграл на каждом из них.]]

4.34. Определите порядок убывания коэффициентов Фурье функции $f(x)=\sqrt{|x|}$ на $[-\pi,\pi]$, разложенной по тригонометрической системе.

[[Выпишите коэффициент Фурье по определению и сделайте замену $nx=t$.]]

4.35 (Расходимость ряда Фурье в точке). Докажите, что ряд Фурье непрерывной 2π-периодической функции
$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin|2^{k^3}x|$$
расходится в нуле.

[[Выпишите коэффициенты Фурье по косинусам о оцените их сумму. Воспользуйтесь тем, что для функции вида $\sin k|x|$ значение суммы Фурье в нуле неотрицательно.]]

4.6. **Суммы Фейера.**

4.36. Определим *ядро Фейера*
$$\Phi_n(t)=\frac{D_0(t)+D_1(t)+\dots+D_n(t)}{n+1}=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\frac{n+1-|k|}{n+1}e^{ikx}.$$
Получите формулу для ядра Фейера, показывающую, что $\Phi_n(t)\geqslant 0$.

[[Используйте геометрические прогрессии с комплексным знаменателем или суммы синусов.]]

4.37. Определим *суммы Фейера*
$$S_n(f,x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\Phi_n(t)\,dt.$$
Докажите, что для непрерывной 2π-периодической f
$$S_n(f,x)\to f(x)$$
равномерно. Это даёт другое доказательство задачи 1.12.

[[Заметьте, что $\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(t)\,dt=1$ и преобразуйте разность $S_n(f,x)-f(x)$.]]

4.38. Докажите, что для $f\in L_1[-\pi,\pi]$
$$S_n(f,x)\to f(x)$$
в смысле сходимости в $L_1[-\pi,\pi]$.

[[Запишите интеграл от $S_n(f,x)-f$ и поработайте с ним.]]

4.39. * Пусть последовательность $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ положительных чисел убывает, стремится к нулю и выпукла (в смысле $a_{n-1} - 2a_n + a_{n+1} \geqslant 0$ при $n \geqslant 1$). Докажите, что сумма

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

неотрицательна (в некоторых точках может быть $+\infty$).

[[Воспользуйтесь преобразованием Абеля для рядов.]]

4.7. **Многомерное преобразование Фурье.**

4.40. Докажите, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{2} - i(x,y)}\, dx = (2\pi)^{n/2} e^{-\frac{|y|^2}{2}}.$$

[[Начните со случая $n = 1$, общий случай сводится к этому по теореме Фубини. Используйте дифференцирование по параметру y (обоснованное теоремой об ограниченной сходимости), напишите и решите дифференциальное уравнение для интеграла как функции от параметра.]]

4.41 (Достаточное условие сходимости интеграла Фурье). Пусть функция $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ непрерывна в точке x, а функция

$$c(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x,y)}\, dx$$

тоже оказалась в $L_1(\mathbb{R}^n)$. Докажите, что

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} c(y) e^{i(x,y)}\, dy.$$

[[Посчитайте выражение

$$f_t(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} c(y) e^{i(x,y) - t\frac{|y|^2}{2}}\, dy,$$

подставив в него определение $c(y)$, изменив порядок интегрирования по теореме Фубини. С помощью предыдущей задачи получите равенство

$$f_t(x) = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\frac{|x|^2}{2t}}\, dx.$$

Перейдите в этом выражении к пределу $\to +0$, получив $f(x)$. Перейдите к аналогичному пределу в определении $f_t(x)$, используя теорему об ограниченной сходимости.]]

4.42. Докажите, что существование у f производных до $n+1$ порядка, лежащих в $L_1(\mathbb{R}^n)$, достаточно для абсолютной сходимости $c(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x,y)}\, dx$.

[[Выведите из существования производных у f тот факт, что $P(y)c(y)$ стремится к нулю на бесконечности для многочлена $P(y)$ степени не более $n + 1$, аналогично одномерному случаю в теореме **??**.]]

4.43. Определим $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ аналогично одномерному случаю, рассмотрев полунормы

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}} \left| \mathbf{x}^{\mathbf{k}} \frac{\partial^{|\mathbf{n}|} f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{n}}} \right|.$$

Докажите, что преобразование Фурье функции из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ можно представить как композицию преобразований Фурье по каждой переменной. Докажите, что преобразование Фурье переводит $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в себя непрерывно в топологии $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и продолжается до унитарного оператора $F : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$.

[[Можно воспользоваться тем, что преобразование Фурье от функции нескольких переменных раскладывается в композицию преобразований Фурье по каждой переменной отдельно.]]

4.44. Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, рассмотрим их свёртку $h = f * g$. Докажите, что

$$\hat{h}(y) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(y) \hat{g}(y).$$

[[Запишите определение преобразования Фурье, подставьте в него определение свёртки и воспользуйтесь теоремой Фубини.]]

4.8. **Пространства непрерывных функций.**

4.45. Предположим, что непрерывная 2π-периодичная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обладает таким свойством: множество её сдвигов $\{f(x+t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ порождает конечномерное подпространство в пространстве непрерывных функций $C(\mathbb{R})$. Докажите, что f — тригонометрический многочлен.

[[Рассмотрите ряд Фурье f, если он бесконечен, то постройте бесконечное количество линейно независимых функций, комбинируя сдвиги f.]]

4.46. Пусть $C[a, b]$ — пространство непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой

$$\|f\|_C = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Докажите, что это пространство полное, то есть всякая фундаментальная последовательность имеет единственный предел.

[[Это по сути теорема о непрерывности равномерного предела.]]

4.47. * Придумайте какой-нибудь базис в пространстве $C[0, 1]$, то есть систему функций $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$, такую что любая другая непрерывная функция $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ однозначно раскладывается в равномерно сходящийся ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x).$$

[[Сначала заметьте, что любую непрерывную функцию легко равномерно приблизить кусочно-линейными.]]

4.48. Докажите, что система $1, x, x^2, x^3, \dots$ не является базисом ни в $C[0, 1]$, ни в $L_2[0, 1]$ (в последнем случае сходимость ряда надо понимать в смысле нормы $\|\cdot\|_2$).

[[Вспомните про ряды Тейлора и аналитические функции.]]

4.9. **Банаховы и гильбертовы пространства.**

4.49 (Теорема Бэра). Докажите, что счётное семейство открытых всюду плотных подмножеств банахова пространства имеет непустое пересечение.

[[Если $\{U_n\}$ — эти множества, то постройте последовательность вложенных шаров $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$ стремящегося к нулю радиуса, таких что $B_n \subset U_n$.]]

4.50 (Теорема Бэра). Докажите, что если банахово пространство E покрыто счётным семейством замкнутых множеств, то одно из них имеет непустую внутренность.

[[Возьмите дополнения и сведите к предыдущей формулировке.]]

4.51 (Неподвижные точки сжимающих отображений). Пусть E — *банахово пространство*, то есть нормированное линейное пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность имеет единственный предел. Пусть $X \subset E$ — замкнутое подмножество и $f : X \to X$ является *сжимающим* (*липшицевым с меньшей единицы константой*)

$$\exists C < 1\ \forall x, y \in X\ \|f(x) - f(y)\| \leqslant C\|x - y\|.$$

Докажите, что f имеет неподвижную точку $f(x) = x$.

[[Примените f много раз к одной точке.]]

4.52 (Двойственное пространство). Для банахова пространства E введём E' — пространство непрерывных линейных отображений $\lambda : E \to \mathbb{R}$. Норму в E' определим как

$$\|\lambda\| = \sup\{|\lambda(x)| : \|x\| \leqslant 1\}.$$

Докажите, что с такой нормой пространство E' банахово.

[[Проверьте конечность нормы и полноту по определению для некоторой фундаментальной последовательности.]]

4.53 (Теорема Банаха–Штейнгауза). Пусть семейство элементов $Y \subset E'$ ограничено в любой точке $x \in E$, то есть множество

$$\{\lambda(x) : \lambda \in Y\}$$

ограничено для любого $x \in E$. Тогда Y ограничено в смысле нормы в E'.

[[Рассмотрите замкнутое $F = \{x \in E : \forall \lambda \in Y\ |\lambda(x)| \leqslant 1\}$. Примените теорему Бэра к набору его увеличенных копий $\{nF\}_{n\in\mathbb{N}}$.]]

4.54 (Расходимость ряда Фурье в точке). На пространстве $\dot{C}[-\pi, \pi]$ непрерывных 2π-периодических функций определим линейный функционал

$$\lambda_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t)\, dt.$$

Посчитайте его норму по определению и убедитесь, что $\|\lambda_n\| \to +\infty$ при $n \to \infty$. С помощью теоремы Банаха–Штейнгауза докажите, что для некоторой $f \in \dot{C}[-\pi, \pi]$ ряд Фурье расходится в нуле.

[[Заметьте, что $\|\lambda_n\| = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt$ и оцените этот интеграл.]]

4.55 (Гильбертово пространство). Пусть норма в банаховом пространстве E порождается положительно определённым скалярным произведением

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)},$$

тогда пространство называется *гильбертовым* (возможен и соответствующий случай гильбертова пространства над комплексными числами). Докажите, что гильбертовость E равносильна свойству

$$\forall x, y \in E\ |x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

[[Вспомните, что билинейная форма восстанавливается из квадратичной и заметьте, что критерий гильбертовости достаточно проверить на нормированной двумерной плоскости.]]

4.56 (Метрическая проекция в гильбертовом пространстве). Пусть H — гильбертово пространство, $V \subset H$ — его замкнутое линейное подпространство. Докажите, что для всякой $x \in H$ существует единственная $\pi_V(x) \in V$, ближайшая к x, то есть

$$\|x - \pi_V(x)\| = \inf_{y \in V} \|x - y\|.$$

[[Рассмотрите последовательность $y_n \in V$, которая доставляет нижнюю грань и докажите её фундаментальность.]]

4.57 (Двойственное к гильбертову пространству). Для всякого y в гильбертовом пространстве H положим

$$\lambda_y(x) = (x, y).$$

Докажите, что $\lambda_y \in H'$, $\|\lambda_y\| = \|y\|$ и докажите, что все элементы H' имеют такой вид.

[[Для доказательства последнего утверждения рассмотрите метрическую проекцию нуля на $\{x \in H : \lambda(x) = 1\}$ для любого $\lambda \in H'$.]]

4.58 (Сепарабельные гильбертовы пространства). Докажите, что если в гильбертовом пространстве H есть счётное всюду плотное подмножество, то в нём есть *ортонормированный базис*, то есть набор $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, такой что

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

и

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < +\infty \right\}.$$

[[Заметьте, что метод ортогонализации Грама–Шмидта работает в данной ситуации.]]

4.59 (Компактность и вполне ограниченность). Докажите, что замкнутое подмножество X банахова пространства E компактно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть конечным числом шаров радиуса ε, то есть выбрать конечное множество $X_\varepsilon \subset E$, такое что X лежит в ε-окрестности X_ε.

[[Заметьте, что доказательство критерия компактности (через ограниченность и замкнутость) в конечномерном случае по сути проходит и здесь.]]

4.60. Докажите, что единичный шар в банаховом пространстве компактен тогда и только тогда, когда оно конечномерно.

[[В одну сторону очевидно, в другую сторону примените вполне ограниченность с $\varepsilon = 1/2$.]]

4.61 (Теорема Арцела–Асколи). Пусть M — компактное метрическое пространство, $C(M)$ — пространство непрерывных функций на нём с нормой $\sup_x |f(x)|$. Докажите, что замкнутое ограниченное $X \subset C(M)$ компактно тогда и только тогда, когда X *равностепенно непрерывно*, то есть

$$\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall f \in X\ \forall x, y \in X\ \operatorname{dist}(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

[[Воспользуйтесь эквивалентностью компактности и вполне ограниченности.]]

4.62 (Слабая топология). *Слабая топология* в двойственном пространстве E' порождается окрестностями нуля

$$U_{x,\varepsilon} = \{\lambda \in E' : |\lambda(x)| < \varepsilon\}, \quad x \in E, \varepsilon > 0$$

и их сдвигами. Проверьте, что слабая сходимость $\lambda_n \to \lambda$ означает поточечную сходимость, то есть

$$\forall x \in E\ \lambda_n(x) \to \lambda(x).$$

[[Выпишите, что значит $\lambda_n \in \lambda + U_{x,\varepsilon}$.]]

4.63 (Теорема Банаха–Алаоглу). ** Докажите, что ограниченное и замкнутое множество $X \subset E'$ компактно в слабой топологии.

[[Примените теорему Тихонова о компактности произведения компактов в любом количестве. Более просто, в частном случае существования счётного всюду плотного множества в E можно проверить, что всякая ограниченная последовательность $\lambda_n \in E'$ имеет частичный слабый предел.]]

4.64 (Теорема Риса). ** Рассмотрим линейный функционал $\lambda : C[a,b] \to \mathbb{R}$. Пусть он непрерывен и неотрицателен ($\lambda(f) \geqslant 0$ для неотрицательных f). Докажите, что он определяет борелевскую меру на $[a,b]$, например для открытых $U \subseteq [a,b]$ можно положить

$$\mu_\lambda(U) = \sup\{\lambda(f) : f \in C[a,b], 0 \leqslant f \leqslant 1, \operatorname{supp} f \subset U\}.$$

Что делать, если функционал не является неотрицательным?

[[Проверьте нужные свойства определённой в условии меры. Для не обязательно положительного функционала надо использовать понятие *меры со знаком*, определив её *вариацию* как

$$|\mu_\lambda|(U) = \sup\{\lambda(f) : f \in C[a,b], -1 \leqslant f \leqslant 1, \operatorname{supp} f \subset U\}.$$

]]

4.10. **Распределения.**

4.65. Пусть в векторном пространстве V топология задана семейством полунорм $\|\cdot\|_\alpha$ при $\alpha \in A$. Докажите, что линейный функционал $\lambda : V \to \mathbb{R}$ непрерывен тогда и только тогда, когда найдутся $C > 0$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in A$ такие что для любого $v \in V$

$$|\lambda(v)| \leqslant C \max\{\|v\|_{\alpha_1}, \dots, \|v\|_{\alpha_k}\}.$$

[[Вспомните, что такое открытая окрестность нуля в V по определению и выпишите ограниченность λ на этой окрестности.]]

4.66. ** Определим пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ как множество всех бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций с компактным носителем. Сходимость $\varphi_n \to 0$ в этом пространстве определим так: носители всех φ_n должны лежать в одном и том же отрезке и $\varphi_n^{(k)} \to 0$ равномерно по x для любого $k \in \mathbb{Z}^+$. Какая топология в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ соответствует такому понятию сходимости?

[[Представьте $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ в виде объединения $\mathcal{D}_{[a,b]}$ его подпространств, состоящих из функций с носителями на отрезках $[a,b]$. Опишите топологию на каждом из них и опишите, как из этих топологий строится топология на всём $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.]]

4.67. Определим $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ как множество непрерывных линейных функционалов $\lambda : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Они называются *распределениями* или *обобщёнными функциями*. Распределение λ называется *регулярным*, если оно представляется в виде

$$\lambda(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\, dx$$

с f локально интегрируемой по Лебегу. Докажите, что распределение, определённое формулой

$$\delta(f) = f(0)$$

(*дельта-функция*) лежит в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, но не является регулярным.

[[Подействуйте δ на $\varphi(kx)$, устремив $k \to \infty$.]]

4.68. Докажите, что всякое распределение $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ имеет первообразную, то есть такую $\mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, что

$$\mu' = \lambda$$

в смысле дифференцирования распределений. Докажите, что любые две первообразные одного и того же распределения отличаются на константу.

[[Обратите внимание, что взятие первообразной определено не для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и опишите, для каких φ оно определено и как.]]

4.69. Определим пространство $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ как пространство непрерывных линейных функционалов $\lambda : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. С помощью задачи 4.20 определите преобразование Фурье $F : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Чему будет равно преобразование Фурье от дельта-функции $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$?

[[Выпишите формулу $F\delta(\varphi) = \delta(F^{-1}\varphi)$ в явном виде.]]

4.70. Пусть для функции $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ можно указать такое целое N, что для всякого целого $k \geqslant 0$

$$f^{(k)}(x) = O(|x|^{N-k}), \quad x \to \infty.$$

Докажите, что f можно считать элементом из $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, а преобразование Фурье $\hat{f}(y)$ при $y \neq 0$ тоже можно считать функцией от y и при любом M

$$\hat{f}(y) = o(|y|^{-M}), \quad y \to \infty.$$

[[Примените преобразование Фурье производной.]]

4.71. Докажите, что если $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и преобразование Фурье $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, то $f \equiv 0$.

[[Воспользуйтесь аналитичностью преобразования Фурье.]]

4.72. * Пусть $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неотрицательная бесконечно гладкая функция, отличная от нуля только при $|x| \leqslant 1$ и пусть $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 1$. Положим

$$\varphi_k(x) = k\varphi(kx),$$

эти функции тоже имеют единичные интегралы и φ_k отлична от нуля только при $|x| \leqslant 1/k$. Для всякого $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ определим свёртку

$$f_k(y) = \lambda(\varphi_k(y - x)),$$

где в правой части мы применяем λ к функции от x. Докажите, что $f_k \to \lambda$ в смысле (поточечной) сходимости в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

[[Докажите, что $\langle f_k, \psi\rangle = \langle \lambda, \varphi_k * \psi\rangle$ для всякой $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, если для функций свёртка определена стандартным образом $(\varphi_k * \psi)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(x)\psi(y - x)\, dx$. Вспомните задачи 2.64 и 2.65.]]

4.73. * Для $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ будем говорить, что $\lambda|_U = 0$, если $\lambda(\varphi) = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ с носителем в U. Докажите, что если $\lambda|_U = 0$ и $\lambda|_V = 0$, то $\lambda|_{U\cup V} = 0$.

[[Воспользуйтесь разбиением единицы.]]

4.74. * Для $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ положим

$$Z_\lambda = \bigcup \{U : \lambda|_U = 0\}.$$

Докажите, что $\lambda|_{Z_\lambda} = 0$. Дополнение $\mathbb{R}\setminus Z_\lambda$ называется *носителем* λ, $\operatorname{supp}\lambda$, по построению это замкнутое множество.

4.75. * Распределение $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ называется *неотрицательным*, если

$$\lambda(\varphi) \geqslant 0 \quad \text{для всякой всюду неотрицательной} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Докажите, что у неотрицательного распределения есть регулярная первообразная.

[[Можно действовать по аналогии с задачей 4.64.]]

4.76. ** Докажите, что всякое распределение $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ на любом отрезке $[a, b]$ можно представить как производную некоторого порядка от регулярного распределения. *Представить на отрезке* здесь означает, что значения λ и некоторого другого распределения будут совпадать на $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ с носителями в $[a, b]$.

[[Используйте задачи 4.65, 4.66 и возможность интегрировать распределения. Заметьте, что для определяемых далее пространств $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ рассуждения будут попроще, так как задача 4.65 применима непосредственно.]]

4.77. ** Определим пространство $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ как $C^\infty(\mathbb{R})$ со следующим понятием сходимости: $\varphi_n \to 0$, если для любого $k \in \mathbb{Z}^+$ на всяком отрезке $\varphi_n^{(k)} \to 0$ равномерно (но необязательно равномерно на всём $\mathbb{R}$). Какая топология соответствует этому понятию сходимости?

[[Определите семейство норм, задающее топологию.]]

4.78. ** Определим пространство $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ непрерывных линейных функционалов $\lambda : \mathcal{E}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Докажите, что образ естественного вложения $\mathcal{E}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ состоит из распределений с компактным носителем.

[[Используйте задачу 4.65 чтобы заметить, что $\lambda(\varphi)$ зависит только от значения φ на некотором отрезке.]]

4.79. * Докажите, что преобразования Фурье элементов $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ являются аналитическими функциями.

[[Заметьте, что для $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ оказывается $\hat{\lambda}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda(e^{-iyx})$.]]

4.80. * Пусть функционал $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ обладает свойством

$$\lambda(\varphi\psi) = \lambda(\varphi)\lambda(\psi)$$

для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$. Докажите, что тогда

$$\lambda(\varphi) = \varphi(x)$$

для некоторого $x \in \mathbb{R}$. Докажите аналогичное утверждение для $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

[[Используйте задачу 3.1, примените λ к функции $\varphi(x) = x$ и используйте свойства λ.]]