СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
15 МАЯ 2022 ГОДА

1. Последовательность равномерно непрерывных функций $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равномерно сходится к функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Можно ли утверждать, что f равномерно непрерывна?

Ответ: да.

Решение. Возьмём $\varepsilon > 0$. Применим определение равномерной сходимости и найдём f_n, такую что $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ для любого x. Применим определение равномерной непрерывности f_n и найдём $\delta > 0$, такое что $|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon$, если $|x' - x''| < \delta$.

Тогда при условии $|x' - x''| < \delta$ выполняется $|f(x') - f(x'')| < 2\varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ вначале выбиралось любое, то это означает равномерную непрерывность f.

2. Докажите, что всякое сечение куба $Q = [-1, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ линейным k-мерным подпространством $L \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет диаметр не менее $2\sqrt{k}$.

Решение. Сечение $Q \cap L$ пересекает грань куба F некоторой размерности. Если размерность F равна $m > n - k$, то пусть A — аффинная оболочка F. Тогда $S = L \cap A$ является аффинным пространством размерности не менее $m + k - n > 0$, и по крайней мере содержит прямую. Эта прямая должна пересечь границу ограниченного множества F в пространстве A, а значит должна пересечь грань куба F' меньше чем F размерности. То есть в этом случае L должно также пересечь грань куба меньшей размерности.

Повторяя такие рассуждения, мы получим, что L пересекает грань куба G размерности не более $n - k$. Заметим, что если $v \in L \cap G$, то $-v \in L \cap (-G)$. Грани куба размерности не более $n-k$ задаются равенствами не менее k координат точки числам из множества $\{-1, 1\}$. Длина вектора v тогда не менее $\sqrt{k}$, а расстояние между v и $-v$, то есть длина вектора $2v$, не менее $2\sqrt{k}$.

3. Докажите, что для любых двух линейных подпространств $V, W \subset \mathbb{R}^n$ одинаковой размерности найдётся ортогональное преобразование $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, такое что $A(V) = W$ и $A(W) = V$.

Решение. Если $V \cap W$ не нулевое, то возьмём факторпространство по нему, ортогональное преобразование потом можно будет поднять из него, определив его на $V \cap W$ как тождественное. Если $V + W \neq \mathbb{R}^n$, то достаточно построить A в $V + W$, определив его на ортогональном дополнении $V + W$ тождественно. В итоге сумму $V + W$ можно считать прямой.

Обозначим метрические проекции на подпространства P_V и P_W. Диагонализуем билинейную форму $(P_W v, v)$ на V, она симметрична из-за самосопряжённости P_W. Тогда мы получим ортонормированный базис $v_1, \dots, v_k \in V$, такой что

$$(P_W v_i, P_W v_j) = (v_i, P_W^2 v_j) = (v_i, P_W v_j) = 0.$$

при $i \neq j$. Те проекции $P_W v_i$, которые ненулевые, нормируем и запишем в базис W, остальные векторы ортонормированного базиса $w_1, \dots, w_k \in W$ выберем произвольно, они будут ортогональны $P_W(V)$, а значит и V. Тогда мы имеем

$$(v_i, w_j) = 0$$

при $i \neq j$. При этом v_i и w_j вместе образую базис всего пространства, поэтому корректно определено отображение по формулам $Av_i = w_i$, $Aw_i = v_i$. А так как при этом отображении сохраняется матрица Грама базиса, то оно на самом деле ортогонально.

Решение без базисов. После сведения к случаю прямой суммы V и W делаем следующее. Пусть $P_V : W \to V$, $P_W : V \to W$ — ортогональные проекции, $\varphi : V \to W$ — некоторая изометрия евклидовых пространств. Заметим, что

$$(v, P_V(w)) = (v, w) = (P_W(v), w) \quad \forall v \in V, w \in W,$$

так что $P_V^* = P_W$.

Посмотрев на полярное разложение оператора $P_V\varphi : V \to V$, понимаем, что φ можно домножить справа на ортогональное преобразование $\tau : V \to V$ так, чтобы $P_V\varphi\tau$ оказался самосопряжённым, то есть

$$P_V\varphi\tau = \tau^*\varphi^* P_W$$

и если обозначить изометрию $\psi = \varphi\tau : V \to W$, то

$$P_V\psi = \psi^* P_W$$

Теперь устроим требуемое преобразование A в прямой сумме $V \oplus W$, которое действует по формуле

$$A(v \oplus w) = \psi(v) \oplus \psi^{-1}(w) = \psi(v) \oplus \psi^*(w).$$

Мы уже знаем, что его ограничения на V и на W сохраняют скалярное произведение. Осталось доказать, что оно сохраняет скалярное произведение векторов из разных пространств прямой суммы.

$$(Av, Aw)) = \big(\psi(v), \psi^{-1}(w))\big) = \big(P_V\psi(v), \psi^{-1}(w)\big) = \\ = \big(\psi^{-1}P_W(v), \psi^{-1}(w)\big) = (P_W(v), w) = (v, w),$$

что и требовалось.

Замечание. Указанный факт также следует из того, что грассманово многообразие k-мерных линейных подпространств в $\mathbb{R}^n$ является *симметрическим пространством*, в котором любые две точки можно поменять местами симметрией с центром в середине кратчайшей геодезической, которая их соединяет.

4. Рассмотрим бесконечные в обе стороны последовательности комплексных чисел $c = (c_k)$, $k \in \mathbb{Z}$, с конечной нормой $\|c\| = \sqrt{\sum_k |c_k|^2}$. Пусть T_m — это операция сдвига последовательности на m, $(T_mc)_k = c_{k-m}$. Докажите, что для всякой последовательности c с конечной нормой норма последовательности

$$\frac{T_0c + T_1c + \dots + T_{n-1}c}{n}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$. Сложение и умножение последовательности на число определены покомпонентно.

Решение. Обозначим S_n линейную операцию над последовательностями из условия задачи
$$S_n(c) = \frac{T_0 c + T_1 c + \dots + T_{n-1} c}{n}.$$
Так как T_m не увеличивает норму последовательности, то и S_n — тоже, так как
$$\|S_n(c)\| \le \frac{\|T_0 c\| + \|T_1 c\| + \dots + \|T_{n-1} c\|}{n} = \|c\|.$$
Непосредственно проверяется, что для последовательностей c с одной единицей на некотором месте и остальными нулями выполняется $\|S_n(c)\| = 1/\sqrt{n} \to 0$. В силу линейности $\|S_n(c)\| \to 0$ верно и для любой конечной линейной комбинации таких последовательностей. Иначе говоря, утверждение задачи верно для последовательностей с конечным числом ненулевых элементов.

Теперь возьмём произвольную последовательность c, $\varepsilon > 0$, и приблизим c последовательностью c' с конечным числом ненулевых элементов с точностью ε. Это можно сделать, просто занулив некоторые члены последовательности c, сумма квадратов которых менее ε. Тогда из линейности
$$\|S_n(c)\| \le \|S_n(c')\| + \|S_n(c - c')\| \le \|S_n(c')\| + \varepsilon.$$
При $n \to \infty$ по доказанному $\|S_n(c')\| \to 0$, следовательно для достаточно больших n верно
$$\|S_n(c)\| < \varepsilon.$$
Меняя $\varepsilon > 0$, мы получаем определение предела $\|S_n(c)\| \to 0$.

Решение через ряды Фурье. Всякой рассматриваемой последовательности c_k можно сопоставить функцию $f \in L_2[-\pi, \pi]$ по формуле
$$f = \sum_k c_k e^{ikx},$$
где сумма понимается в смысле сходимости в L_2. Как известно (теорема Рисса–Фишера), это устанавливает изометричный изоморфизм между рассматриваемым пространством последовательностей и $L_2[-\pi, \pi]$. При этом операция T_m соответствует умножению функции на e^{imx} и нам остаётся доказать, что L_2-норма функции
$$g_n = \frac{1 + e^{ix} + \dots + e^{i(n-1)x}}{n} f$$
стремится к нулю при $n \to \infty$, если L_2-норма f была конечной. Выражение
$$\varphi_n(x) = \frac{1 + e^{ix} + \dots + e^{i(n-1)x}}{n} = \frac{1 - e^{inx}}{n(1 - e^{ix})}$$
ограничено единицей по модулю и стремится к нулю поточечно при $n \to 0$ почти всюду на отрезке $[-\pi, \pi]$, кроме точки $x = 0$. Следовательно, интеграл
$$\|g_n\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |g_n|^2\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n|^2 |f|^2\, dx$$
стремится к нулю при $n \to \infty$ по теореме об ограниченной сходимости. Что и требовалось доказать.