СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

09 ДЕКАБРЯ 2018

1–2 КУРС

1. Докажите, что положительные числа a, b, c являются сторонами некоторого треугольника тогда и только тогда, когда
$$1 + 2\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c > \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{ch}^2 b + \operatorname{ch}^2 c.$$

2. Докажите, что если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ трижды непрерывно дифференцируема и её третья производная ограничена по модулю числом $3C$, то выполняется неравенство
$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^3$$
при условии $f'(x) = f'(y) = 0$.

3. Последовательность $a_0, a_1, \ldots$ задана так: $a_0 = 1$, $a_1 = e^2$,
$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n}, \quad n > 1.$$
Докажите, что $a_n \leq e^{2\sqrt{n}}$.

4. Существуют ли рациональные числа a, b, c, d, для которых
$$\sqrt[5]{2} = a + b\cos\frac{2\pi}{7} + c\cos\frac{4\pi}{7} + d\cos\frac{6\pi}{7}?$$

5. При каких n пространство $\mathbb{R}^n$ можно разбить на единичные n-мерные кубы и покрасить кубы в $n+1$ цвет так, чтобы (замкнутые) кубы одного и того же цвета не пересекались?

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

09 ДЕКАБРЯ 2018

3–6 КУРС

1. Докажите, что положительные числа a, b, c являются сторонами некоторого треугольника тогда и только тогда, когда

$$1 + 2\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c > \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{ch}^2 b + \operatorname{ch}^2 c.$$

2. Пусть функция $f(z)$ аналитическая при $0 < |z| < 2$ и интеграл

$$\int_{0<|z|\leq 1} |f(z)|^2 \, dxdy$$

сходится (здесь $x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z$). Докажите, что особенность $f(z)$ в нуле устранима.

3. Существуют ли рациональные числа a, b, c, d, для которых

$$\sqrt[5]{2} = a + b\cos\frac{2\pi}{7} + c\cos\frac{4\pi}{7} + d\cos\frac{6\pi}{7}?$$

4. При каких n пространство $\mathbb{R}^n$ можно разбить на единичные n-мерные кубы и покрасить кубы в $n+1$ цвет так, чтобы (замкнутые) кубы одного и того же цвета не пересекались?

5. Пусть гладкая функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ имеет нулевой дифференциал (градиент) в каждой точке связного компактного множества $X \subset \mathbb{R}^2$. Докажите, что она постоянна на X.

   Обратите внимание, что связное множество и линейно связное множество — разные вещи. Множество $X \subset \mathbb{R}^2$ называется несвязным, если его можно разбить на два непересекающихся непустых множества, каждое из которых является пересечением $X \cap U$ с открытым U.