

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
14 МАЯ 2017 ГОДА

1. Пусть смешанное произведение трёх векторов $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ по модулю не менее 1. Докажите, что векторное произведение какой-то пары из этих векторов по модулю не менее 1.
2. Найдите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}}$$

Количество радикалов равно n , первый знак минус, потом плюсы.

3. Докажите, что матрица $n \times n$ с элементами

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n (ij)^k$$

невырожденна.

4. Пусть K — компактное подмножество евклидова пространства, а $f : K \rightarrow K$ — отображение, такое что $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$ для любых $x, y \in K$. Докажите, что любая точка $x \in K$ является предельной точкой последовательности $(f^n(x))_n$, где

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x) \dots))}_n.$$

5. В Средиземном море есть четыре острова α, β, γ и δ , на которых живут математики А, В, Г и Д. Как-то утром, они решили, что каждый обойдёт свой остров один раз против часовой стрелки, причём так, что всё время их положения будут образовывать квадрат АВГД. Удивительно, но им это удалось. Найдите площадь острова δ , если известны площади островов α, β и γ .