СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

14 ДЕКАБРЯ 2014

1 КУРС

1. На плоскости нарисованы две гиперболы H_1 и H_2 с общими асимптотами. Аффинное преобразование плоскости переводит H_1 в себя. Верно ли, что оно переводит H_2 в себя?

   Ответ: да.

   Решение. В некоторой системе координат гиперболы имеют вид

   $$xy = a \quad \text{и} \quad xy = b$$

   с ненулевыми a и b. Очевидно, что первую сохраняют диагональные линейные преобразования вида

   $$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1/k & 0 \end{pmatrix}$$

   с ненулевым k. То же верно и для второй гиперболы.

2. Пусть дан набор последовательностей $\mathcal{A}$ из нулей и единиц и функция $f : \{0,1\}^k \to \{0,1\}$. Известно, что всякая последовательность $(a_n) \in \mathcal{A}$ удовлетворяет соотношению

   $$a_n = f(a_{n+1}, \dots, a_{n+k})$$

   при всех $n \in \mathbb{N}$. Каково максимальное (в зависимости от k) количество элементов в $\mathcal{A}$?

   Ответ: 2^k.

   Решение. Приведём пример, где последовательностей 2^k. Пусть $f(a_{n+1}, \dots, a_{n+k}) = a_{n+k}$, то есть мы рассматриваем последовательности с условием $a_{n+k} = a_n$. Очевидно, что задав произвольно первые k членов последовательности, мы далее продолжаем её с периодом k и получаем последовательность, удовлетворяющую соотношению. При этом первые k членов можно задать 2^k способами.

   Докажем, что $m > 2^k$ последовательностей сделать нельзя. Предположим противное — нашлись различные $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathcal{A}$. Пусть N настолько большое, что уже на отрезке $[1, N]$ видно, что все они различны. Но на отрезке $[1, N]$ последовательность однозначно определена её значениями $a_{N-k+1}, \dots, a_N$, которых k штук и всевозможных их комбинаций не более $2^k < m$. Противоречие.

3. У матрицы $n \times n$ суммы чисел в любой строке и в любом столбце равны нулю. Докажите, что все её миноры $(n-1) \times (n-1)$ равны по абсолютной величине.

Решение. Достаточно доказать, что левый верхний минор равен правому верхнему, остальные равенства сводятся к этому перестановкой строк, столбцов, и применением транзитивности.

Пусть столбцы нашей матрицы без последней строки — это $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}^{n-1}$. Тогда $c_1 + \dots + c_n = 0$ по условию и

$$\det(c_2, \dots, c_n) = \det(c_2, \dots, c_{n-1}, -c_1 - c_2 - \dots - c_{n-1}) = \\ = -\det(c_2, \dots, c_{n-1}, c_1) = (-1)^{n-1} \det(c_1, c_2, \dots, c_{n-1}).$$

4. Предположим, что функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет производную $f^{(k)}(x)$ для любого k и любого $x \neq 0$. Также предположим, что при $x \to 0$ она представляется в виде
$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k + o(x^k)$$
при любом натуральном k.

а) Обязана ли f иметь производную $f^{(k)}(0)$ для любого k?

б) Тот же вопрос при условии, что все производные $f^{(k)}(x)$ ограничены в некоторой проколотой окрестности нуля.

Ответ: а) нет; б) да.

Решение. Контрпример для случая (а):

$$f(x) = e^{-1/x^2} \cos e^{1/x^2}$$

при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Эта функция бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и при этом является $o(x^k)$ при $x \to 0$ для любого k. Однако, уже её первая производная не ограничена в окрестности нуля, что исключает существование второй производной.

Решение для случая (б). Ограниченность $f^{(k+2)}(x)$ в окрестности нуля влечёт существование предела $f^{(k+1)}(x)$ в нуле, что при условии непрерывности $f^{(k)}(x)$ показывает, что $f^{(k+1)}(0)$ существует и непрерывна в нуле (следствие из правила Лопиталя). Это позволяет по индукции доказать существование всех производных, начиная с $k = 0$.

5. Пусть кривая $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ задана параметрически как $\bar{r} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, причём параметризация удовлетворяет условию Гёльдера

$$|\bar{r}(t) - \bar{r}(s)| \leq C|t - s|^\alpha$$

с $C > 0$ и показателем $\alpha > 1/2$. Докажите, что Γ не может замести единичный квадрат.

Решение. Рассмотрим точки $(i/n, j/n)$ в единичном квадрате, $i, j = 0, \dots, n$. Пусть кривая их все обходит в некотором порядке $\bar{r}(t_1), \dots, \bar{r}(t_{(n+1)^2})$. Поскольку

$$|\bar{r}(t_{i+1}) - \bar{r}(t_i)| \geq 1/n,$$

имеем $|t_{i+1} - t_i| \geq 1/(Cn)^{1/\alpha}$, что больше $1/n^2$ при достаточно большом n. Значит, $|t_{(n+1)^2} - t_1| > (n^2 + 2n)/n^2 > 1$, что неверно.

Другое решение. Будем обозначать $M(X)$ верхнюю меру Жордана множества X на плоскости, она определена для любого X. Если Γ покрывает единичный квадрат, то $M(\Gamma) \geq 1$. Разбив множество параметров $[0, 1]$ на n отрезков длины $\varepsilon = 1/n$ и рассмотрев соответствующие части $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$, для одной из Γ_i получаем неравенство

$$M(\Gamma_i) \geq 1/n = \varepsilon.$$

Но по условию Гёльдера Γ_i содержится в круге радиуса не более $C\varepsilon^\alpha$ и её верхняя мера не более $\pi C^2 \varepsilon^{2\alpha}$. Получаем неравенство

$$\pi C^2 \varepsilon^{2\alpha} > \varepsilon,$$

которое неверно при достаточно малых ε.

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
14 ДЕКАБРЯ 2014

2–6 КУРС

1. Пусть дан набор последовательностей $\mathcal{A}$ из нулей и единиц и функция $f : \{0,1\}^k \to \{0,1\}$. Известно, что всякая последовательность $(a_n) \in \mathcal{A}$ удовлетворяет соотношению
$$a_n = f(a_{n+1}, \dots, a_{n+k})$$
при всех $n \in \mathbb{N}$. Каково максимальное (в зависимости от k) количество элементов в $\mathcal{A}$?

   Ответ: 2^k.

   Решение. Приведём пример, где последовательностей 2^k. Пусть $f(a_{n+1}, \dots, a_{n+k}) = a_{n+k}$, то есть мы рассматриваем последовательности с условием $a_{n+k} = a_n$. Очевидно, что задав произвольно первые k членов последовательности, мы далее продолжаем её с периодом k и получаем последовательность, удовлетворяющую соотношению. При этом первые k членов можно задать 2^k способами.

   Докажем, что $m > 2^k$ последовательностей сделать нельзя. Предположим противное — нашлись различные $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathcal{A}$. Пусть N настолько большое, что уже на отрезке $[1, N]$ видно, что все они различны. Но на отрезке $[1, N]$ последовательность однозначно определена её значениями $a_{N-k+1}, \dots, a_N$, которых k штук и всевозможных их комбинаций не более $2^k < m$. Противоречие.

2. Существует ли непрерывная на всей плоскости функция двух переменных, имеющая ровно два локальных экстремума, такая, что значение в точке локального минимума больше, чем в точке локального максимума?

   Ответ: да.

   Решение. Придумаем сначала гладкую функцию одной переменно $h(x)$, которая является нечётной, имеет максимум при $x = 1$, минимум при $x = 2$, причём $h'(0) > 0$, $h(2) > 0$ и точек экстремума кроме $x = -2, -1, 1, 2$ нет. Такое несложно нарисовать на графике, при желании можно выписать какую-то явную формулу.

   Теперь положим
$$f(x, y) = h(x) + xy^2.$$
Ясно, что точки с $x = 0$ не будут точками экстремума, так как $f'_x(0, y) = h'(0) + y^2 > 0$. При $x \neq 0$ и $y \neq 0$ производная $f'_y(x, y) = 2xy \neq 0$, так что там тоже экстремумов нет. В итоге точки экстремума f имеют $y = 0$, а x соответствуют точкам экстремума h. Далее легко заметить, что $(1, 0)$ является точкой максимума по x и минимума по y, то есть не точкой экстремума $f(x, y)$, а $(2, 0)$ продолжает оставаться точкой минимума и для $f(x, y)$, причём $f(2, 0) > 0$. Аналогично, при отрицательных x остаётся только точка максимума $f(-2, 0) < 0$.

   Можно проверить, что явно заданная функция $f(x, y) = x(x^2 - 1)^2 + x + xy^2$ подходит, хотя её экстремумы находятся не в точках $|x| = 1, 2$.

3. Пусть E — конечномерное евклидово пространство, A и B — линейные операторы в нём. Оказалось, что для любого $x \in E$ получается $|Ax| \le |Bx|$. Докажите, что $|\det A| \le |\det B|$.

   Решение. Если $\det B = 0$, то $Bx = 0$ для некоторого ненулевого вектора x, следовательно $Ax = 0$ и $\det A = 0$. Поэтому далее рассматриваем случай, когда оба определителя не равны нулю и операторы обратимы.

   Рассмотрим шар $X = \{y \in E : |y| \le 1\}$, пусть его объём равен ω. Тогда по свойству определителя, объём множества $A^{-1}X = \{x \in E : |Ax| \le 1\}$ равен $|\det A|^{-1}\omega$, а объём множества $B^{-1}X = \{x \in E : |Bx| \le 1\}$ равен $|\det B|^{-1}\omega$. Так как $|Ax| \le |Bx|$, то второе множество содержится в первом, и из монотонности объёма
   $$|\det B|^{-1}\omega \le |\det A|^{-1}\omega \ \Rightarrow\ |\det A| \le |\det B|.$$

   Замечание. Утверждение остаётся верным, если вместо евклидовой нормы $|\cdot|$ рассматривать произвольную норму $\|\cdot\|$ на конечномерном пространстве E.

4. Пусть кривая $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ задана параметрически как $\bar r : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, причём параметризация удовлетворяет условию Гёльдера
   $$|\bar r(t) - \bar r(s)| \le C|t-s|^\alpha$$
   с $C > 0$ и показателем $\alpha > 1/2$. Докажите, что Γ не может замести единичный квадрат.

   Решение. Рассмотрим точки $(i/n, j/n)$ в единичном квадрате, $i, j = 0, \dots, n$. Пусть кривая их все обходит в некотором порядке $\bar r(t_1), \dots, \bar r(t_{(n+1)^2})$. Поскольку
   $$|\bar r(t_{i+1}) - \bar r(t_i)| \ge 1/n,$$
   имеем $|t_{i+1} - t_i| \ge 1/(Cn)^{1/\alpha}$, что больше $1/n^2$ при достаточно большом n. Значит, $|t_{(n+1)^2} - t_1| > (n^2+2n)/n^2 > 1$, что неверно.

   Другое решение. Будем обозначать $M(X)$ верхнюю меру Жордана множества X на плоскости, она определена для любого X. Если Γ покрывает единичный квадрат, то $M(\Gamma) \ge 1$. Разбив множество параметров $[0,1]$ на n отрезков длины $\varepsilon = 1/n$ и рассмотрев соответствующие части $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$, для одной из Γ_i получаем неравенство
   $$M(\Gamma_i) \ge 1/n = \varepsilon.$$

   Но по условию Гёльдера Γ_i содержится в круге радиуса не более $C\varepsilon^\alpha$ и её верхняя мера не более $\pi C^2 \varepsilon^{2\alpha}$. Получаем неравенство
   $$\pi C^2 \varepsilon^{2\alpha} > \varepsilon,$$
   которое неверно при достаточно малых ε.

5. Многочлен $P(x,y)$ принимает значение ноль ровно в 5 точках вещественной плоскости. Какую наименьшую степень он может иметь?

Ответ: 6.

Решение. Ясно, что многочлен знакопостоянный, иначе нулей был бы континуум. Пусть его степень n. Если n нечётно, то можно выбрать прямую, ограничение на которую тоже имеет степень n, что противоречит знакопостоянству. Итак, n обязательно чётно.

Если три точки из пяти точек лежат на одной прямой, то на этой прямой возникает многочлен с тремя кратными корнями, тогда степень не меньше 6.

Если такого нет, то через эти пять точек можно провести невырожденную кривую второго порядка и рационально её параметризовать. В рациональной параметризации параметром t числители и знаменатель будут иметь степень 2 (например, как в стандартной параметризации окружности тангенсом половинного угла). После подстановки параметризации в многочлен получается уравнение степени $2n$ с 5 кратными корнями, то есть его степень не меньше 10. Итого $n \geq 5$; из чётности получаем $n \geq 6$.

Наконец, неотрицательный многочлен степени 6 с любым количеством $k \in [1, 9]$ корней получить просто, нарисовав две кривые не более чем третьего порядка $Q(x, y) = 0$ и $R(x, y) = 0$ с k общими точками и положив

$$P(x, y) = Q(x, y)^2 + R(x, y)^2.$$